Esercizi - foglio 14 (consegna 8 aprile)

Esercizio 11.1 Per ognuno dei seguenti polinomi stabilire se sono irriducibili o no negli anelli $\mathbb{Q}[x]$ e $\mathbb{Z}[x]$:

(a) $8x^3-6x+1$, (b) $7x^5-21x^4+105$, (c) x^4-5x^2+6, (d) x^5+5x+5, (e) x^5+5x^2+1.

Esercizio 11.2 (Artin 11.4.3) Scomporre x^3+x+1 in fattori irriducibili in $\mathbb{F}_p[x]$ per $p=2,3,5$.

Esercizio 11.3 In classe abbiamo visto il seguente criterio di irriducibilità per un polinomio primitivo $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$: se $\bar{f}(x)$ è irriducibile in $\mathbb{F}_p[x]$, allora $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$. Tale criterio è condizione necessaria ma non sufficiente, come mostra il seguente esempio.

(a) Mostrare che x^4+1 è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.
(b) Mostrare che x^4+1 è riducibile in $\mathbb{F}_2[x]$.
(c) Dato un primo dispari p, si consideri l'omomorfismo di gruppi $\varphi : \mathbb{F}_p^\times \to \mathbb{F}_p^\times$ che mappa $x \mapsto x^2$. Verificare che $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{F}_p^\times$ è un sottogruppo di indice 2 e dedurre che, se $a, b \notin \mathrm{Im}(\varphi)$, allora $ab \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Dedurre, in particolare, che tra $-1, 2, -2$ almeno uno è in $\mathrm{Im}(\varphi)$.
(d) Verificare l'identità $x^4+1 = x^4-(-1)$ e dedurre che, se $-1 \in \mathrm{Im}(\varphi)$, allora x^4+1 è riducibile in $\mathbb{F}_p[x]$.
(e) Verificare l'identità $x^4+1 = (x^2+1)^2-2x^2$ e dedurre che, se $2 \in \mathrm{Im}(\varphi)$, allora x^4+1 è riducibile in $\mathbb{F}_p[x]$.
(f) Verificare l'identità $x^4+1 = (x^2-1)^2-(-2)x^2$ e dedurre che, se $-2 \in \mathrm{Im}(\varphi)$, allora x^4+1 è riducibile in $\mathbb{F}_p[x]$.
(g) Concludere che, per ogni primo p, x^4+1 non è irriducibile in $\mathbb{F}_p[x]$.

Esercizio 11.4 Scomporre i seguenti interi di Gauss in primi in $\mathbb{Z}[i]$:

(a) $3+4i$; (b) 25; (c) $9-15i$.

Esercizio 11.5 (Artin 11.5.6) Sia $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Dimostrare che p è un elemento primo di $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ se e solo se il polinomio x^2-3 è irriducibile in $\mathbb{F}_p[x]$.

Esercizio 11.6 Sia R un anello unitario. Descrivere tutti gli omomorfismi di R-moduli $R \to R$.

Esercizio 11.7 Un R-modulo si dice semplice se gli unici suoi sottomoduli sono quelli banali. Mostrare che se S, S' sono R-moduli semplici, allora un R-omomorfismo $S \to S$ è un isomorfismo oppure manda ogni elemento in 0.