11 Undicesimo foglio

In questo foglio di esercizi si assuma ogni anello commutativo con identità, un morfismo fra anelli in questo contesto manda l'identità nell'identità.

Esercizio 11.1. Siano I, J, K tre ideali di A. Dimostrare che:

1. Se $I + J + K = A$, allora $I^n + J^n + K^n = A$ per ogni $n > 1$.
2. Se $I + J = J + K = K + I = A$, allora $IJ + JK + KI = A$.

Esercizio 11.2. Qualche operazione fra ideali:

1. Sia $A = \mathbb{F}_5[x]$, $I = (x^2 + 1)$, $J = (x^3 - 1)$. Descrivere $I + J$, IJ, $I \cap J$.
2. Sia $A = \mathbb{Q}[x, y]$. Dimostrare che $I = (x - 1, y - 1)$ contiene $J = (1 - xy)$. Mostrare che I è massimale e J non lo è. J è un ideale primo?
3. Sia A un anello e I un suo ideale, definiamo $\sqrt{I} := \{x \in A \colon \exists n \in \mathbb{N}\ x^n \in I\}$ Dimostrare che:
   a) $\sqrt{I}$ è un ideale [una possibilità è ricondursi all'esercizio 10.8],
   b) $\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$,
   c) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

Esercizio 11.3. Sia A un dominio ad ideali principali. Dimostrare che se B è un dominio d'integrità e $\phi : A \to B$ è un omomorfismo suriettivo, allora ϕ è un isomorfismo oppure B è un campo.

Esercizio 11.4. Sia A un dominio ad ideali principali. Dimostrare che ogni ideale primo di A diverso da (0) è massimale.

Esercizio 11.5. Sia $f : A \to B$ un omomorfismo di anelli. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1. Se P è un ideale primo di A, allora $(f(P))$ è un ideale primo di B.
2. Se M è un ideale massimale di A, allora $(f(M))$ è un ideale massimale di B.
3. Se P è un ideale primo di B, allora $f^{-1}(P)$ è un ideale primo di A.
4. Se M è un ideale massimale di B, allora $f^{-1}(M)$ è un ideale massimale di A.