Algebra I - Soluzioni 8

17 Maggio

1 Esercizi

Esercizio 1. Per trovare i fattori invarianti bisogna portare la matrice

$$\begin{pmatrix} 1-x & & & \\ & 1-x & & \\ & & 2-x & \\ & & & -3-x \end{pmatrix}$$

nella forma di Smith. I passaggi algoritmici sono i seguenti:

$$\begin{pmatrix} 1-x & & & \\ & 1-x & & \\ & & 2-x & \\ & & & -3-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & & & \\ & 1-x & & \\ 2-x & & 2-x & \\ & & & -3-x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-x & & & \\ & 1-x & & \\ 1 & & 2-x & \\ & & & -3-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 2-x & \\ & 1-x & & \\ 1-x & & & \\ & & & -3-x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & 2-x & \\ & 1-x & & \\ & & -(1-x)(2-x) & \\ & & & -3-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1-x & & \\ & & -(1-x)(2-x) & \\ & & & -3-x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1-x & & \\ & & -(1-x)(2-x) & \\ & -3-x & & -3-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1-x & & \\ & & -(1-x)(2-x) & \\ & -4 & & -3-x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -4 & & -3-x \\ & & -(1-x)(2-x) & \\ & 1-x & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -4 & & -3-x \\ & & -(1-x)(2-x) & \\ & & & \frac{1}{4}(1-x)(-3-x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & (1-x)(2-x) & \\ & & & (1-x)(3+x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & (1-x)(2-x) & \\ & & 5(1-x) & (1-x)(3+x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 5(1-x) & (1-x)(3+x) \\ & & (1-x)(2-x) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 5(1-x) & (1-x)(3+x) \\ & & & -\frac{1}{5}(1-x)(3+x)(2-x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 5(1-x) & \\ & & & -\frac{1}{5}(1-x)(3+x)(2-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & (1-x) & \\ & & & (1-x)(2-x)(3+x) \end{pmatrix}$$

Si può osservare anche che la matrice iniziale

$$\begin{pmatrix} 1-x & & & \\ & 1-x & & \\ & & 2-x & \\ & & & -3-x \end{pmatrix}$$

è in forma di Jordan. In particolari i blocchi associati a $(1-x)$ sono separati, dunque nei fattori irriducibili i due $(1-x)$ appartengono a due fattori distinti. Siccome tutti gli altri sono coprimi si ha

$$\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{C}[x]/(1-x) \oplus \mathbb{C}[x]/(1-x)(2-x)(3+x).$$

Esercizio 2. I polinomi si scompongono nel seguente modo:

- ◇) $(x-2)$,
- ◇) $(x^2+x-6) = (x+3)(x-2)$,
- ◇) $(x^3-x^2-8x+12) = (x-2)^2(x+3)$.

La forma di Jordan di T dunque è

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & -3 & & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & -3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Bisogna trovare dei numeri $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_n$ il cui prodotto sia l'ordine del gruppo abeliano. Iniziamo con $|G| = 16 = 2^4$

- $G = C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$,
- $G = C_2 \times C_2 \times C_4$,
- $G = C_4 \times C_4$,
- $G = C_2 \times C_8$,
- $G = C_{16}$.

Ancora scomponiamo $|G| = 24 = 2^3 \cdot 3$

- $G = C_2 \times C_2 \times C_6$,
- $G = C_2 \times C_{12}$,
- $G = C_{24}$.

E infine $|G| = 36 = 2^2 \cdot 3^2$

- $G = C_6 \times C_6$,
- $G = C_2 \times C_{18}$,
- $G = C_3 \times C_{12}$,

- $G = C_{36}$.

Esercizio 4. Se lo dimostriamo per la somma di due moduli, allora per induzione si può generalizzare ad una somma finita qualsiasi. Sia allora $M = U \oplus V$ somma diretta con U e V noetheriani. Consideriamo una catena di R-sottomoduli di M

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq \ldots \subseteq J_n \subseteq \ldots$$

e vogliamo mostrare che si stabilizza. Consideriamo le due proiezioni

$$\pi_U : M \to U \qquad \pi_V : M \to V$$

e le due catene

$$\pi_U(J_1) \subseteq \pi_U(J_2) \subseteq \ldots \subseteq \pi_U(J_n) \subseteq \ldots$$

e

$$\pi_V(J_1) \subseteq \pi_V(J_2) \subseteq \ldots \subseteq \pi_V(J_n) \subseteq \ldots$$

Queste due catene vivono in spazi noetheriani, quindi eventualmente si stabilizzano. Siano N_U e N_V i due indici in cui le catene si stabilizzano, e sia $N := \max\{N : U, N_V\}$. Osserviamo dunque che $J_N = J_{N+h} \quad \forall h$. Sia $x \in J_{N+1} \setminus J_N$, siccome M è somma diretta, allora $x = x_U + x_V$ con

$$x_U \in \pi_U(J_{N+1}) \qquad \text{e} \qquad x_V \in \pi_V(J_{N+1}).$$

Poiché queste catene si stabilizzavano, come osservato prima, allora

$$x_U \in \pi_U(J_N) \qquad \text{e} \qquad x_V \in \pi_V(J_N),$$

da cui $x \in \pi_U(J_{N+1}) \oplus \pi_V(J_{N+1}) = \pi_U(J_N) \oplus \pi_V(J_N) = J_N$.

Da qua segue che $J_N = J_{N+1}$ e iterando $J_N = J_{N+h}$, dunque la catena si stabilizza.

Esercizio 5. Consideriamo l'omomorfismo di R-moduli

$$\begin{aligned} \pi : R &\to R/I_1 \oplus \cdots \oplus R/I_n \\ x &\mapsto (\pi_1(x), \ldots, \pi_n(x)) \end{aligned}$$

dove

$$\pi_k : R \to R/I_k$$

è la proiezione canonica a quoziente.

Un elemento x è nel nucleo di π se

$$\pi(x) = (0, \ldots, 0),$$

cioè se $x \in I_k \quad \forall k$, cioè

$$x \in \cap I_k = \emptyset.$$

Possiamo dunque identificare R con il sottomodulo immagine $\pi(R) \subseteq R/I_1 \oplus \cdots \oplus R/I_n$. Il modulo

$$R/I_1 \oplus \cdots \oplus R/I_n$$

è noetheriano perché è somma diretta finita di moduli noetheriani, e R è sottomodulo di un modulo noetheriano, dunque ancora noetheriano.

Esercizio 6. Il gruppo Q_8 delle unità dei quaternioni è

$$\begin{pmatrix} 1 & i & j & k \\ -1 & -i & -j & -k \end{pmatrix}$$

Un automorfismo deve mandare 1 in 1. Inoltre un autormofismo φ è tale che

$$\varphi(i) \in \{i, -i, j, -j, k, -k\}$$

e lo stesso per j e k. Associamo all'automorfismo φ la permutazione $\sigma \in \mathfrak{S}_3$

$$\sigma = \begin{pmatrix} i & j & k \\ |\varphi(i)| & |\varphi(j)| & |\varphi(k)| \end{pmatrix}.$$

Ad esempio l'automorfismo ψ tale che

$$\psi(i) = i, \quad \psi(j) = k, \quad \psi(k) = -j$$

è associato alla permutazione

$$\sigma(\psi) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ i & k & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Per dimostrare l'isomorfismo tra $\mathrm{Out}(Q_8)$ e $\mathfrak{S}_3$ si può osservare che il nucleo dell'omomorfismo definito prima è proprio $\mathrm{Inn}(Q_8)$. Infatti a mano si può verificare che, per un elemento $u \in Q_8$, sia $\sigma(\varphi)$ la permutazione associata a φ,

$$\sigma(\cdot^u) = e.$$

Cioè la permutazione associata al coniugio per ogni elemento è la permutazione banale. Inoltre per questioni di cardinalità non ce ne possono essere altre. Dunque vale

$$\rho : \mathrm{Aut}(Q_8) \to \mathfrak{S}_3$$

con $\ker \rho = \mathrm{Inn}(Q_8)$. Allora

$$\mathrm{Out}(Q_8) \cong \mathrm{Aut}(Q_8)/\mathrm{Inn}(Q_8) \cong (S)_3.$$

Esercizio 7. Consideriamo nel campo K i due elementi 1 e -1. Sono le uniche due radici del polinomio $x^2 - 1$. Dunque nel gruppo molteplicativo G_m c'è solo un elemento di ordine 2 (perché 1 ha ordine 1). Ma se K non ha caratteristica 2, allora in G_a non ci sono elementi di ordine 2, cioè non ci sono elementi tali che

$$x + x = 0,$$

perché $2x = 0$, per la legge di annullamento del prodotto o 2 è 0, e quindi il campo ha caratteristica 2, o x è 0, che è già l'immagine di 1.