Algebra I - Esercitazione

17/05/2023

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{C}^4$ e sia T l'endomorfismo lineare di V dato dalla matrice diagonale con autovalori $(1, 1, 2, -3)$. V può essere dotato di una struttura di $\mathbb{C}[x]$-modulo dove il prodotto per x è l'applicazione di T. Usare il Teorema di Struttura per i moduli finitamente generati per determinare i fattori invarianti di V.

Esercizio 2. Siano V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione finita e T un suo endomorfismo lineare. Supponiamo che dotando V della struttura di $\mathbb{R}[x]$-modulo indotta da T, applicando il teorema di struttura dei moduli finitamente generati su un PID, si ottenga

$$\mathbb{R}[x]/(x-2) \oplus \mathbb{R}[x]/(x^2+x-6) \oplus \mathbb{R}[x]/(x^3-x^2-8x+12)$$

Determinare la dimensione di V e la forma di Jordan di T.

Esercizio 3. Trovare tutti i gruppi abeliani di ordine 16, 24 e 36.

Esercizio 4. Dimostrare che la somma diretta finita di R-moduli noetheriani è noetheriana.

Esercizio 5. Siano $I_1, I_2, \dots, I_n$ ideali di un anello R tali che $\bigcap I_i = 0$ e che R/I_i è noetheriano per ogni i. Dimostrare che R è noetheriano.
Hint: trovare e sfruttare un opportuno morfismo di R-moduli.

Esercizio 6. Esibire un morfismo naturale di gruppi da $\mathrm{Aut}(Q_8)$ a S_3 e trovare la classe di isomorfismo del nucleo. Inoltre, supponendo di sapere che $\mathrm{Aut}(Q_8) \cong S_4$, dimostrare che $\mathrm{Out}(Q_8) \cong S_3$. Infine dimostrare che $GL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$.
(Out *indica il gruppo degli automorfismi esterni.*)

Esercizio 7. Sia $\mathbb{K}$ un campo; denotiamo con G_a il gruppo additivo $(\mathbb{K}, +)$ e con G_m il gruppo moltiplicativo $(\mathbb{K}^*, \cdot)$. Dimostrare che nei seguenti casi G_a non è isomorfo a G_m:

- $\mathbb{K}$ è finito;
- $\mathbb{K}$ ha caratteristica 0;
- $\mathbb{K}$ ha caratteristica diversa da 2.