Algebra I - Esercitazione

12/04/2023

Esercizio 1. Provare che l'anello $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ ha due soli ideali non banali e che tali ideali sono massimali.

Esercizio 2. Si provi che ciascuno dei seguenti polinomi è irriducibile in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$:

- $x^3 + x + 1$
- $x^2 + 3$
- $x^2 + 2$
- $x^3 + 3x + 2$

Esercizio 3. E vero che ogni gruppo di ordine 720 è semplice? Se ciò non è vero, esibire un controesempio.

Esercizio 4. Dimostrare che S_4 non contiene sottogruppi abeliani con 8 elementi.

Esercizio 5. Sia G un gruppo; poniamo

$$D = \{(g, g) \mid g \in G\}$$

Dimostrare che D è un sottogruppo di $G \times G$, e che è normale se e solo se G è abeliano. In tal caso, dimostrare che il quoziente è isomorfo a G.

Esercizio 6. Siano $p > q$ due numeri primi e G un gruppo non abeliano di ordine pq. Provare che q divide $p - 1$.

Esercizio 7. Sia I l'ideale di $\mathbb{Z}[i]$ generato da $20+35i$ e $10-45i$. Determinare gli ideali primi che lo contengono.

Esercizio 8. (☹) Siano $N \triangleleft G$ tali che il centralizzatore $C_G(N)$ è contenuto in N. Dimostrare che $|G| \leq |N|!$.
Suggerimento: dato un qualsiasi sottogruppo $H \leq G$, cercare un morfismo naturale

$$N_G(H) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)\,.$$

Si ricorda che il centralizzatore di H in G è il sottogruppo degli elementi di G che commutano con ogni elemento di H, mentre il normalizzatore di H in G è il sottogruppo degli elementi $g \in G$ tali che $gHg^{-1} = H$.

Esercizio 9. (☹☹) Dimostrare che un anello in cui $x^3 = x$ per ogni x è commutativo.