

# Istituzioni di Matematica I

Laurea Triennale in Scienze Chimiche

Registro Didattico a.a. 2022/2023

11 gennaio 2023

**Lezione 1-2 (27 settembre 2022)** Elementi di insiemistica. Numeri naturali, interi relativi, razionali.

**Lezione 3-4 (28 settembre 2022)** Dimostrazione del fatto che  $\sqrt{2}$  non è un numero razionale. I numeri reali. Definizione di modulo di un numero reale e sue proprietà. Disuguaglianza triangolare.

**Lezione 5-6 (29 settembre 2022)** Richiami su equazioni e disequazioni di primo e secondo grado e con il modulo. Esercizi.

**Lezione 7-8 (30 settembre 2022)** Numeri complessi: somma, prodotto, inverso di numeri complessi. Parte reale e parte immaginaria di un numero complesso. Piano complesso. Modulo di un numero complesso e sue proprietà. Coniugato di un numero complesso e proprietà dell'operazione di coniugio. Rappresentazione trigonometrica di un numero complesso.

**Lezione 9-10 (3 ottobre 2022)** Il simbolo di sommatoria e sue proprietà. Binomio di Newton e richiami di calcolo combinatorio.

**Lezione 11-12 (4 ottobre 2022)** Binomio di Newton: giustificazione della formula. Principio di induzione. Esercizi ed esempi.

**Lezione 13-14 (5 ottobre 2022)** Intervalli della retta: notazione. Definizione di insieme limitato superiormente/inferiormente. Definizione di maggiorante e minorante. Definizione di massimo e minimo. Definizione di estremo superiore e inferiore. Esempi.

**Lezione 15-16 (6 ottobre 2022)** Esercizi su numeri complessi. Disuguaglianza triangolare per il modulo complesso. Numeri complessi e radici di polinomi a coefficienti complessi: Teorema fondamentale dell'algebra (solo enunciato). Ricerca di radici complesse di polinomi: radici dell'unità.

**Lezione 17-18 (7 ottobre 2022)** Ricerca di radici complesse di polinomi a coefficienti complessi: esercizi.

**Lezione 19-20 (10 ottobre 2022)** Generalità sulle funzioni: dominio, codominio, immagine di una funzione. Definizione di funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva. Funzioni reali di variabile reale: grafico. Definizione di esponenziale  $a^r$  con  $a > 0$  ed  $r \in \mathbb{R}$  e sue proprietà. Il logaritmo e sue proprietà. Esercizi su disequazioni con modulo.

**Lezione 21-22 (11 ottobre 2022)** Esercizi sul calcolo di domini di funzioni reali di variabile reale. Definizione di funzione monotona (crescente/decrescente) e strettamente monotona.

**Lezione 23-24 (12 ottobre 2022)** Le funzioni strettamente monotone sono iniettive. Proprietà di monotonia della funzione potenza  $f(x) = x^n$  per  $n \in \mathbb{N}$  (dimostrazione fatta per il caso  $n = 2$  e  $n = 3$ ). Definizione di funzione pari e di funzione dispari. Esempi. Proprietà di simmetria dei grafici di funzioni pari e dispari. Definizione di funzione periodica e di periodo. Esempio: mantissa (o parte frazionaria) di un numero.

**Lezione 25-26 (13 ottobre 2022)** Funzione seno, coseno, tangente e cotangente: interpretazione geometrica e proprietà. Composizione di due funzioni. L'operazione di composizione di funzioni non è commutativo. Esempi ed esercizi.

**Lezione 27-28 (14 ottobre 2022)** Esercizi su principio di induzione. Esercizi su domini di funzioni. Definizione di inversa di una funzione. Esempi di funzioni inverse: radice quadrata; arcocoseno.

**Lezione 29-30 (17 ottobre 2022)** Definizione di inversa di una funzione. Esempi di funzioni inverse: radice quadrata; logaritmo e esponenziale; arcotangente; arcocoseno; arcoseno. Esercizi sui numeri complessi.

**Lezione 31-32 (18 ottobre 2022)** Successioni numeriche. Definizione di successione inferiormente limitata, superiormente limitata, limitata. Cosa vuol dire che una successione verifica una proprietà *definitivamente*. Esempi ed esercizi.

**Lezione 33-34 (19 ottobre 2022)** Definizione di limite finito di una successione. Definizione di successione divergente positivamente o negativamente. Esempi. Definizione di successione irregolare. Teorema di unicità del limite (con idea della dimostrazione). Teorema: ogni successione convergente è limitata (con idea della dimostrazione).

**Lezione 35-36 (20 ottobre 2022)** Definizione di successione monotona. Teorema di regolarità delle successioni monotone (con dimostrazione). Applicazione: il limite della successione  $(1 + 1/n)^n$  e il numero di Nepero  $e$  (solo enunciato). Algebra dei limiti e forme indeterminate. Esercizi.

**Lezione 37-38 (21 ottobre 2022)** Esercizi su limiti di successioni. Teorema di permanenza del segno (con idea della dimostrazione). Corollario: monotonia del limite. Teorema dei due carabinieri: enunciato e applicazioni.

**Lezione 39-40 (24 ottobre 2022)** Esercizi sui limiti. Infiniti di ordine superiore, inferiore, dello stesso ordine. Criterio del rapporto: enunciato e osservazione sul caso  $\ell = 1$ .

**Lezione 41-42 (25 ottobre 2022)** Esercizi sui limiti. Infiniti di ordine superiore, inferiore, dello stesso ordine. Criterio del rapporto: idea della dimostrazione. Applicazioni: gerarchia degli infiniti e alcuni limiti notevoli. Infinitesimi. Esercizi su limiti di successioni.

**Lezione 43-44 (26 ottobre 2022)** Serie numeriche: generalità. Esempi di serie: serie armonica, serie di Mengoli, serie telescopiche. Esempio della scacchiera. Achille e la tartaruga. Serie geometrica: calcolo del carattere e della somma della serie geometrica.

**Lezione 45-46 (27 ottobre 2022)** Proposizione: se una serie  $\Sigma a_n$  converge, allora  $a_n \rightarrow 0$ . Non vale il viceversa. Serie a termini non negativi: regolarità

delle serie a termini non negativi; criterio del confronto e del confronto asintotico. Applicazione: la serie armonica generalizzata  $\sum 1/n^\alpha$ . Esempi ed esercizi.

**Lezione 47-48 (28 ottobre 2022)** Serie a termini non negativi: criterio del rapporto e della radice. Esempi ed esercizi.

**Lezione 49-50 (31 ottobre 2022)** Esercizi su successioni e serie.

**Lezione 51-52 (2 novembre 2022)** Serie a termini di segno generico: una serie assolutamente convergente è convergente. Serie a segno alterno: criterio di Leibniz. Esercizi.

**Lezione 53-54 (3 novembre 2022)** Nozione di limite di una funzione  $f(x)$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Gerarchia degli infiniti. Esempi ed esercizi. Definizione di limite di una funzione  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Lezione 54-55 (4 novembre 2022)** Definizione di limite di una funzione  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Teorema ponte: caratterizzazione del limite di una funzione attraverso successioni. Applicazione: il limite di  $\sin(1/x)$  per  $x$  che tende a 0 non esiste. Teorema di unicità del limite. Algebra dei limiti.

**Lezione 55-56 (7 novembre 2022)** Teorema dei due carabinieri. Teorema di permanenza del segno. Corollario: monotonia del limite. Teorema di confronto. Limite notevole  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .

**Lezione 57-58 (8 novembre 2022)** Limite destro e sinistro di una funzione in un punto. Teorema: una funzione  $f$  ammette limite in un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  se e solo se esistono i limiti destro e sinistro di  $f$  in  $x_0$  e tali limiti coincidono. Primo limite notevole  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$  e sue conseguenze. Secondo limite notevole  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^\beta} = 0$  per  $\beta > 0$ . Terzo limite notevole  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$  e sue conseguenze.

**Lezione 57-58 (9 novembre 2022)** Esistenza del limite destro e sinistro in un punto per una funzione monotona. Applicazione:  $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$  per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Definizione di funzione continua.

**Lezione 59-60 (10 novembre 2022)** Significato "geometrico" della nozione di continuità in un punto. Esempi: continuità delle funzioni  $\log(x)$  e  $\sin(x)$  nei loro domini di definizione. Teorema di permanenza del segno. Teorema di esistenza degli zeri (con dimostrazione). Teorema di Weierstrass. Teorema dei valori intermedi (con dimostrazione).

**Lezione 61-62 (11 novembre 2022)** Algebra delle funzioni continue: continuità della somma, differenza, prodotto, rapporto. La composizione di funzioni continue è continua. Esercizi sui limiti di funzioni.

**Lezione 63-64 (14 novembre 2022)** Applicazioni: calcolo dell'immagine della funzione  $x \mapsto x^n$  definita in  $[0, +\infty)$  se  $n$  è pari, in  $\mathbb{R}$  se  $n$  è dispari; un polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale. Teorema: la funzione  $x \mapsto x^n$  definita in  $[0, +\infty)$  se  $n$  è pari, in  $\mathbb{R}$  se  $n$  è dispari, è strettamente monotona, quindi invertibile. La funzione inversa è la funzione  $f^{-1}(y) := \sqrt[n]{y}$ . Teorema: una funzione strettamente crescente (rispettivamente, decrescente) è invertibile e la sua inversa è strettamente crescente (risp., decrescente). Teorema: una funzione continua definita su un intervallo è invertibile se e solo se è strettamente monotona. In tal caso, la sua inversa è continua (solo enunciato). Osservazioni ed esempi. Esercizi.

**Lezione 65-66 (15 novembre 2022)** Esercizi.

**Lezione 67-68 (16 novembre 2022)** Descrizione di vari tipi di punti di discontinuità di una funzione. Nozione di punto di discontinuità di salto. Calcolo differenziale di una funzione di una variabile: definizione di derivata di una funzione in un punto. Calcolo della derivata di funzioni elementari (usando la definizione).

**Lezione 69-70 (17 novembre 2022)** Definizione di retta tangente. Derivata destra, derivata sinistra in un punto. Applicazione: derivabilità della funzione  $|x|$ .

**Lezione 71-72 (18 novembre 2022)** Esercizi.

**Lezione 73-74 (21 novembre 2022)** Teorema: una funzione derivabile è continua (con dimostrazione). Non vale il viceversa: la funzione  $|x|$  è continua ma non derivabile in  $x = 0$ . Algebra delle derivate: derivata della somma, differenza, prodotto, rapporto di due funzioni derivabili (con dimostrazione). Derivata di una funzione composta (con accenno alla dimostrazione). Applicazioni ed esempi.

**Lezione 75-76 (22 novembre 2022)** Esercizi su calcolo di derivate. Derivata di una funzione inversa (con giustificazione euristica della formula e idea geometrica).

**Lezione 77-78 (23 novembre 2022)** Applicazione: calcolo delle derivate dell'inversa di alcune funzioni. Esercizi. Punti di massimo e di minimi locali. Teorema di Fermat (con dimostrazione).

**Lezione 79-80 (24 novembre 2022)** Teorema di Rolle: alcune osservazioni. Teorema di Lagrange (con dimostrazione). Teorema di Cauchy (dimostrazione per esercizio). Conseguenze del Teorema di Lagrange: una funzione derivabile in un intervallo è costante se e solo se la sua derivata è identicamente nulla. Esercizi.

**Lezione 81-82 (25 novembre 2022)** Applicazioni del Teorema di Lagrange: una funzione derivabile su un intervallo è crescente (rispettivamente, decrescente) se e solo se la sua derivata è non negativa (risp., non positiva). Ricerca di massimi e minimi (locali e assoluti) tramite lo studio del segno della derivata prima. Esercizi.

**Lezione 83-84 (28 novembre 2022)** Limite della derivata della funzione  $f$  in un punto  $x_0$  vs. derivabilità di  $f$  in  $x_0$ . Esercizi.

**Lezione 85-86 (29 novembre 2022)** Limite della derivata della funzione  $f$  in un punto  $x_0$  vs. derivabilità di  $f$  in  $x_0$ . e Teorema relativo. Teoremi di de l'Hôpital. Esempi ed esercizi.

**Lezione 87-88 (30 novembre 2022)** Esonero.

**Lezione 89-90 (1 dicembre 2022)** Approssimazione di funzioni e polinomio di Taylor. Nozione di o piccolo. Teorema: data una funzione  $f$  derivabile  $n$  volte in un punto  $x_0$ , il polinomio di Taylor  $P_n$  è l'unico polinomio di grado  $n$  tale che il resto  $R_n(x) := f(x) - P_n(x)$  è un o piccolo di  $(x - x_0)^n$  per  $x \rightarrow x_0$  (con dimostrazione nel caso  $x_0 = 0$  e  $n = 2$ ).

**Lezione 91-92 (2 dicembre 2022)** Definizione di insieme convesso. Definizione di funzione convessa e concava. Teorema: una funzione convessa è continua. Teorema: caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili in un intervallo. Definizione di punto di flesso. Come fare uno studio qualitativo del grafico di una funzione.

**Lezione 93-94 (5 dicembre 2022)** Calcolo di alcuni limiti usando il polinomio di Taylor. Cenni all'algebra degli o piccoli. Introduzione al calcolo integrale per funzioni di una variabile: teoria dell'integrazione vs. teoria della misura. Definizione di funzione (limitata e definita su in intervallo chiuso e limitato) integrabile secondo Riemann e integrale di Riemann.

**Lezione 95-96 (6 dicembre 2022)** Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann. Classi di funzioni integrabili (su un intervallo chiuso e limitato): funzioni continue; funzioni monotone; funzioni ottenute incollando funzioni integrabili. Proprietà dell'integrale: linearità, additività rispetto all'insieme di integrazione, monotonia. Classi di funzioni integrabili secondo Riemann. Teorema della media integrale (con dimostrazione). Definizione di primitiva. Teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione).

**Lezione 97-98 (7 dicembre 2022)** Lista di alcune primitive elementari. Integrazione per sostituzione.

**Lezione 99-100 (12 dicembre 2022)** Integrazione di funzioni razionali.

**Lezione 101-102 (13 dicembre 2022)** Integrazione per parti.

**Lezione 103-104 (14 dicembre 2022)** Definizione di integrale generalizzato di una funzione non limitata su un intervallo limitato. Calcolo di  $\int_0^1 1/x^\alpha dx$  al variare di  $\alpha > 0$ . Definizione di integrale generalizzato su un intervallo non limitato. Calcolo di  $\int_1^{+\infty} 1/x^\alpha dx$  al variare di  $\alpha > 0$ . Applicazioni: la serie armonica  $\sum 1/n$  è divergente; la serie armonica generalizzata  $\sum 1/n^\alpha$  è convergente per ogni  $\alpha > 1$ .

**Lezione 105-106 (15 dicembre 2022)** Equazioni differenziali: generalità. Equazioni differenziali lineari del primo ordine: ogni soluzione è somma di una soluzione particolare e della soluzione generale dell'equazione omogenea associata (con dimostrazione). Ricerca di una soluzione particolare: primi esempi.

**Lezione 107-108 (16 dicembre 2022)** Esercizi.

**Lezione 109-110 (19 dicembre 2022)** Equazioni differenziali lineari del primo ordine: formula per la soluzione generale dell'equazione omogenea. Esempi. Problema di Cauchy. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine e problema di Cauchy: teoremi generali (senza dimostrazione).

**Lezione 111-112 (20 dicembre 2022)** Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: soluzioni dell'equazione omogenea associata e polinomio caratteristico. Ricerca di una soluzione particolare tramite il metodo di somiglianza. Termine noto della forma esponenziale per un polinomio: caso di non risonanza. Esempi.

**Lezione 113-114 (22 dicembre 2022)** Termine noto della forma esponenziale per un polinomio: caso di risonanza. Termine noto della forma  $f(t) = e^{at}(k_1 \cos(bt) + k_2 \sin(bt))$  con  $a, b, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ : caso di non risonanza, caso di risonanza. Esempi.

**Lezione 115-116 (11 gennaio 2023)** Esercizi.