

Istituzioni di Matematica I

Laurea Triennale in Chimica

Registro Didattico a.a. 2021/2022

21 gennaio 2022

Lezione 1-2 (27 settembre 2021) Elementi di insiemistica. Numeri naturali, interi relativi, razionali.

Lezione 3-4 (28 settembre 2021) Dimostrazione del fatto che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale. I numeri reali. Definizione di modulo di un numero reale e sue proprietà. Disuguaglianza triangolare. Il simbolo di sommatoria e sue proprietà.

Lezione 5-6 (29 settembre 2021) Binomio di Newton e richiami di calcolo combinatorio. Principio di induzione. Esercizi ed esempi.

Lezione 7-8 (30 settembre 2021) Esercizio: dimostrazione della disuguaglianza di Bernoulli con il principio di induzione. Intervalli della retta: notazione. Definizione di insieme limitato superiormente/inferiormente. Definizione di maggiorante e minorante. Definizione di massimo e minimo. Definizione di estremo superiore e inferiore. Esempi.

Lezione 9-10 (1 ottobre 2021) Definizione di esponenziale a^r con $a > 0$ ed $r \in \mathbb{R}$ e sue proprietà. Il logaritmo e sue proprietà. Esercizi su disequazioni con modulo.

Lezione 11-12 (4 ottobre 2021) Generalità sulle funzioni: dominio, codominio, immagine di una funzione. Definizione di funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva. Funzioni reali di variabile reale: grafico. Definizione di funzione monotona (crescente/decrescente) e strettamente monotona. Esempio: proprietà di monotonia della funzione potenza $f(x) = x^n$ per $n \in \mathbb{N}$.

Lezione 13-14 (5 ottobre 2021) Definizione di funzione pari e di funzione dispari. Esempi. Proprietà di simmetria dei grafici di funzioni pari e dispari. Definizione di funzione periodica e di periodo. Esempi: mantissa (o parte frazionaria) di un numero; coseno; seno.

Lezione 15-16 (6 ottobre 2021) Funzione tangente e cotangente: interpretazione geometrica e proprietà. Definizione di inversa di una funzione. Esempi: radice quadrata.

Lezione 17-18 (7 ottobre 2021) Esempi di funzioni inverse: radice cubica; logaritmo e esponenziale; arcotangente; arcocoseno; arcoseno.

Lezione 19-20 (8 ottobre 2021) Composizione di due funzioni. L'operazione di composizione di funzioni non è commutativo. Esempi ed esercizi.

Lezione 21-22 (11 ottobre 2021) Numeri complessi: somma, prodotto, inverso di numeri complessi. Parte reale e parte immaginaria di un numero complesso. Piano complesso. Modulo di un numero complesso e sue proprietà. Coniugato di un numero complesso e proprietà dell'operazione di coniugio. Rappresentazione trigonometrica di un numero complesso.

Lezione 23-24 (12 ottobre 2021) Esercizi su numeri complessi. Disuguaglianza triangolare per il modulo complesso: dimostrazione. Numeri complessi e radici di polinomi a coefficienti complessi: Teorema fondamentale dell'algebra (solo enunciato). Ricerca di radici complesse di polinomi: radici dell'unità

Lezione 25-26 (13 ottobre 2021) Ricerca di radici complesse di polinomi: esercizi.

Lezione 27-28 (14 ottobre 2021) Successioni numeriche. Definizione di successione inferiormente limitata, superiormente limitata, limitata. Cosa vuol dire che una successione verifica una proprietà *definitivamente*. Esempi. Definizione di limite finito di una successione. Esercizi.

Lezione 29-30 (15 ottobre 2021) Definizione di successione divergente positivamente o negativamente. Esempi. Definizione di successione irregolare. Teorema di unicità del limite (con idea della dimostrazione). Teorema: ogni successione convergente è limitata (con idea della dimostrazione). Esercizi sui numeri complessi (foglio 3).

Lezione 31-32 (18 ottobre 2021) Definizione di successione monotona. Teorema di regolarità delle successioni monotone (solo enunciato). Applicazione: il limite della successione $(1 + 1/n)^n$ e il numero di Nepero e . Algebra dei limiti e forme indeterminate. Esercizi.

Lezione 33-34 (19 ottobre 2021) Esercizi su limiti di successione. Teorema di permanenza del segno (con idea della dimostrazione). Corollari: monotonia del limite. Teorema dei due carabinieri: enunciato e applicazioni. Criterio del rapporto: enunciato e osservazione sul caso $\ell = 1$.

Lezione 35-36 (20 ottobre 2021) Infiniti di ordine superiore, inferiore, dello stesso ordine. Criterio del rapporto. Applicazioni: gerarchia degli infiniti e alcuni limiti notevoli. Esercizi su limiti di successioni.

Lezione 37-38 (21 ottobre 2021) Criterio del rapporto per successioni: idea della dimostrazione. Infinitesimi. Esercizi.

Lezione 39-40 (22 ottobre 2021) Serie numeriche: generalità. Esempio della scacchiera. Achille e la tartaruga. Serie geometrica: calcolo del carattere e della somma della serie geometrica. Esercizi su successioni.

Lezione 41-42 (26 ottobre 2021) Altri esempi di serie: serie armonica, serie di Mengoli, serie telescopiche. Proposizione: se una serie $\sum a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$. Non vale il viceversa. Esempi ed esercizi.

Lezione 43-44 (27 ottobre 2021) Serie a termini non negativi: regolarità delle serie a termini non negativi; criterio del confronto e del confronto asintotico. Applicazione: la serie armonica generalizzata $\sum 1/n^\alpha$. Esercizi

Lezione 45-46 (28 ottobre 2021) Serie a termini non negativi: criterio del rapporto e della radice. Esempi ed esercizi.

Lezione 47-48 (29 ottobre 2021) Serie a termini di segno generico: una serie assolutamente convergente è convergente. Serie a segno alterno: criterio di Leibniz.

Esercizi.

Lezione 49-50 (2 novembre 2021) Nozione di limite di una funzione $f(x)$ per $x \rightarrow \pm\infty$. Gerarchia degli infiniti. Esempi ed esercizi. Definizione di limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a $x_0 \in \mathbb{R}$.

Lezione 51-52 (3 novembre 2021) Definizione di limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a $x_0 \in \mathbb{R}$. Teorema ponte: caratterizzazione del limite di una funzione attraverso successioni. Applicazione: il limite di $\sin(1/x)$ per x che tende a 0 non esiste. Teorema di unicità del limite. Algebra dei limiti.

Lezione 53-54 (4 novembre 2021) Teorema dei due carabinieri. Teorema di permanenza del segno. Corollario: monotonia del limite. Teorema di confronto. Primo limite notevole $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$ e sue conseguenze.

Lezione 55-56 (5 novembre 2021) Limite destro e sinistro di una funzione in un punto. Teorema: una funzione f ammette limite in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se esistono i limiti destro e sinistro di f in x_0 e tali limiti coincidono. Esempi ed esercizi. Secondo limite notevole $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^\beta} = 0$ per $\beta > 0$. Terzo limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ e sue conseguenze.

Lezione 57-58 (8 novembre 2021) Esistenza del limite destro e sinistro in un punto per una funzione monotona. Applicazione: $\lim_{x \rightarrow x_0} \log(x) = \log(x_0)$ per ogni $x_0 > 0$. Definizione di funzione continua.

Lezione 59-60 (9 novembre 2021) Teorema di permanenza del segno. Algebra delle funzioni continue: continuità della somma, differenza, prodotto, rapporto. La composizione di funzioni continue è continua.

Lezione 61-62 (10 novembre 2021) Teorema di esistenza degli zeri (con dimostrazione). Teorema di Weierstrass. Teorema dei valori intermedi (con dimostrazione). Osservazioni ed esempi.

Lezione 63-64 (11 novembre 2021) Applicazione al calcolo delle immagini di alcune funzioni. Teorema: la funzione $x \mapsto x^n$ da $[0, +\infty)$ a $[0, +\infty)$ è strettamente monotona e suriettiva, quindi invertibile (con dimostrazione). La funzione inversa è la funzione $f^{-1}(y) := \sqrt[n]{y}$. Teorema: una funzione strettamente crescente (rispettivamente, decrescente) è invertibile e la sua inversa è strettamente crescente (risp., decrescente). Teorema: una funzione continua definita su un intervallo è invertibile se e solo se è strettamente monotona. In tal caso, la sua inversa è continua (solo enunciato). Osservazioni ed esempi.

Lezione 65-66 (12 novembre 2021) Esercizi.

Lezione 67-68 (15 novembre 2021) Descrizione di vari tipi di punti di discontinuità di una funzione. Nozione di punto di discontinuità di salto. Calcolo differenziale di una funzione di una variabile: definizione di derivata di una funzione in un punto. Calcolo della derivata di funzioni elementari (usando la definizione). Esercizi.

Lezione 69-70 (16 novembre 2021) Definizione di retta tangente. Derivata destra, derivata sinistra in un punto. Calcolo della derivata di funzioni elementari (usando la definizione).

Lezione 71-72 (17 novembre 2021) Teorema: una funzione derivabile è continua (con dimostrazione). Non vale il viceversa: la funzione $|x|$ è continua ma non derivabile in $x = 0$. Algebra delle derivate: derivata della somma, differenza, prodotto, rapporto di due funzioni derivabili (con dimostrazione). Esercizi.

Lezione 73-74 (18 novembre 2021) Derivata di una funzione composta (con accenno alla dimostrazione). Applicazioni ed esempi.

Lezione 75-76 (19 novembre 2021) Derivata di una funzione inversa (con giustificazione euristica della formula e idea geometrica). Applicazioni ed esempi.

Lezione 77-78 (22 novembre 2021) Punti di massimo e minimi locali, punti stazionari. Teorema di Fermat (con dimostrazione). Teorema di Rolle (con dimostrazione). Teorema di Lagrange (con dimostrazione). Teorema di Cauchy (dimostrazione per esercizio).

Lezione 79-80 (23 novembre 2021) Teorema di Rolle: alcune osservazioni. Teorema di Lagrange (con dimostrazione). Teorema di Cauchy (dimostrazione per esercizio). Conseguenze del Teorema di Lagrange: una funzione derivabile in un intervallo è costante se e solo se la sua derivata è identicamente nulla; una funzione derivabile su un intervallo è crescente (rispettivamente, decrescente) se e solo se la sua derivata è non negativa (risp., non positiva). Esercizi.

Lezione 81-82 (24 novembre 2021) Ricerca di massimi e minimi (locali e assoluti) tramite lo studio del segno della derivata prima.

Lezione 83-84 (25 novembre 2021) Esonero.

Lezione 85-86 (26 novembre 2021) Esercizi. Risoluzione degli esercizi dell'esonero.

Lezione 87-88 (29 novembre 2021) Limite della derivata della funzione f in un punto x_0 vs. derivabilità di f in x_0 . Teoremi di de l'Hôpital. Esempi ed esercizi.

Lezione 89-90 (30 novembre 2021) Definizione di insieme convesso. Definizione di funzione convessa e concava. Teorema: una funzione convessa è continua. Teorema: caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili in un intervallo. Definizione di punto di flesso. Come fare uno studio qualitativo del grafico di una funzione.

Lezione 91-92 (1 dicembre 2021) Approssimazione di funzioni e polinomio di Taylor. Nozione di o piccolo. Teorema: data una funzione f derivabile n volte in un punto x_0 , il polinomio di Taylor P_n è l'unico polinomio di grado n tale che il resto $R_n(x) := f(x) - P_n(x)$ è un o piccolo di $(x - x_0)^n$ per $x \rightarrow x_0$ (con dimostrazione nel caso $x_0 = 0$ e $n = 2$). Calcolo dei polinomi di Taylor di alcune funzioni elementari.

Lezione 93-94 (2 dicembre 2021) Introduzione al calcolo integrale per funzioni di una variabile: teoria dell'integrazione vs. teoria della misura. Definizione di funzione (limitata e definita su in intervallo chiuso e limitato) integrabile secondo Riemann e integrale di Riemann. Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann. Classi di funzioni integrabili (su un intervallo chiuso e limitato): funzioni continue; funzioni monotone; funzioni ottenute incollando funzioni integrabili.

Lezione 95-96 (3 dicembre 2021) Proprietà dell'integrale: linearità, additività rispetto all'insieme di integrazione, monotonia. Classi di funzioni integrabili secondo Riemann. Teorema della media integrale (con dimostrazione). Definizione di primitiva. Teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione).

Lezione 97-98 (6 dicembre 2021) Lista di alcune primitive elementari. Integrazione per sostituzione.

Lezione 99-100 (7 dicembre 2021) Integrazione di funzioni razionali.

Lezione 101-102 (9 dicembre 2021) Integrazione per parti.

Lezione 103-104 (10 dicembre 2021) Definizione di integrale generalizzato di una funzione non limitata su un intervallo limitato. Calcolo di $\int_0^1 1/x^\alpha dx$ al variare di $\alpha > 0$. Definizione di integrale generalizzato su un intervallo non limitato. Calcolo di $\int_1^{+\infty} 1/x^\alpha dx$ al variare di $\alpha > 0$. Applicazioni: la serie armonica $\sum 1/n$ è divergente; la serie armonica generalizzata $\sum 1/n^\alpha$ è convergente per ogni $\alpha > 1$.

Lezione 105-106 (13 dicembre 2021) Principi di confronto per integrali (generalizzati). Esercizi.

Lezione 107-108 (14 dicembre 2021) Equazioni differenziali: generalità. Equazioni differenziali lineari del primo ordine: ogni soluzione è somma di una soluzione particolare e della soluzione generale dell'equazione omogenea associata (con dimostrazione).

Lezione 109-110 (15 dicembre 2021) Equazioni differenziali lineari del primo ordine: Formula per la soluzione generale dell'equazione omogenea. Esempi. Ricerca di una soluzione particolare e formula relativa. Esempi. Problema di Cauchy.

Lezione 111-112 (16 dicembre 2021) Equazioni differenziali lineari del secondo ordine e problema di Cauchy: teoremi generali (senza dimostrazione). Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: soluzioni dell'equazione omogenea associata e polinomio caratteristico. Esempi.

Lezione 113-114 (17 dicembre 2021) Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: ricerca di una soluzione particolare tramite il metodo di somiglianza. Termine noto della forma esponenziale per un polinomio: caso di non risonanza, caso di risonanza. Esempi.

Lezione 115-116 (20 dicembre 2021) Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: ricerca di una soluzione particolare tramite il metodo di somiglianza. Termine noto della forma $f(t) = e^{at} (k_1 \cos(bt) + k_2 \sin(bt))$ con $a, b, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$: caso di non risonanza, caso di risonanza. Esempi.

Lezione 117-118 (21 dicembre 2021) Cenni ad equazioni a variabili separabili e al Teorema di Cauchy-Lipschitz per ODE (esistenza e unicità locale per equazioni differenziali del primo ordine). Esercizi.

Lezione 119-120 (22 dicembre 2021) Esercizi.