Analisi Matematica 1

Laurea Triennale in Matematica

Registro Didattico a.a. 2019/2020

13 luglio 2020

Lezione 1-2 (25 febbraio 2020) Introduzione al corso. Distanze, spazi metrici, norme, spazi normati. Esempi di distanze: distanza discreta, distanza di Hamming, distanza Euclidea in $\mathbb{R}^N$. Disuguaglianza di Cauchy–Schwartz. Norma $\|\cdot\|_p$ con $p \geq 1$. Lo spazio $C([a,b])$ con la norma del sup. Gli spazi ℓ^1 e ℓ^∞.

Lezione 3-4 (26 febbraio 2020) Disuguaglianza di Young. Disuguaglianza di Hölder. Norma $\|\cdot\|_p$ su $\mathbb{R}^N$. Convergenza di successioni in spazi metrici. Proprietà delle palle aperte negli spazi metrici.

Lezione 5-7 (28 febbraio 2020) Topologia negli spazi metrici. Punto interno a un insieme, insieme aperto. Stabilità degli insiemi aperti rispetto all'unione qualsiasi e all'intersezione finita. Definizione di punto esterno e di insieme chiuso. Stabilità degli insiemi chiusi rispetto all'intersezione qualsiasi e all'unione finita. Chiusura $\overline{E}$ e parte interna $\mathrm{int}(E)$ di un insieme E. Caratterizzazione degli insiemi chiusi tramite successioni. Punto di accumulazione, punto di bordo di un insieme. Derivato $\mathcal{D}(E)$ di un insieme E. Caratterizzazioni equivalenti di punto di accumulazione. Proposizione: $\overline{E} = E \cup \mathcal{D}(E)$. Topologia di (X,d) con la distanza discreta.

Lezione 8-9 (3 marzo 2020) Funzioni continue $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ con (X,d) spazio metrico: alcune definizioni equivalenti. Esempio: delta di Dirac $\delta_0 : \mathrm{C}([-1,1]) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua rispetto alla distanza d_∞ su X indotta dalla norma del sup; non è continua rispetto alla distanza d_1 indotta dalla norma integrale L^1.

Lezione 10-11 (4 marzo 2020) Convergenza vs. convergenza puntuale. Esempi e controesempi in ℓ^∞ e $\mathrm{C}([0,1])$ rispetto alla norma del sup. Definizione di successione di Cauchy. Teorema: ogni successione convergente è di Cauchy. Non vale il viceversa: esempio in $\mathbb{Q}$. Proposizione: ogni successione di Cauchy è limitata. Definizione di spazio metrico completo.

Lezione* 12-13 (10 marzo 2020) Completezza di $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Completezza di $\mathbb{R}^n$ con la distanza Euclidea. Spazi metrici completi in dimensione infinita: completezza dello spazio delle funzioni limitate su un insieme X con la norma del sup; completezza degli spazi elle piccolo infinito ed elle piccolo uno.

Lezione* 14-15 (11 marzo 2020) Spazi metrici completi in dimensione infinita: completezza dello spazio delle funzioni continue e limitate su un insieme X con la norma del sup. Teorema: uno sottospazio Y di uno spazio metrico completo (X,d) è completo se e solo Y è chiuso in X. Esempi di spazi completi e no.

Lezione* 16-17 (17 marzo 2020) Esercizi: equivalenza di diverse definizioni di continuità per funzioni tra spazi metrici. Teorema delle contrazioni.

Lezione* 18-19 (18 marzo 2020) Definizione di insieme compatto in uno spazio metrico. Esempi di spazi metrici compatti e no. Teorema: uno spazio metrico compatto è completo. Definizione di insieme totalmente limitato.

Lezione* 20-21-22 (20 marzo 2020) Teorema: uno spazio metrico è compatto se e solo se è completo e totalmente limitato. Esercitazione in classe.

Lezione* 23-24 (24 marzo 2020) Caratterizzazione dei compatti in $\mathbb{R}^N$. Teorema: immagine di un compatto tramite una funzione continua è compatto. Corollario: una funzione reale e continua su uno spazio metrico compatto assume massimo e minimo. Tutte le norme in $\mathbb{R}^N$ sono equivalenti.

Lezione* 25-26 (25 marzo 2020) Compattezza in dimensione infinita: le palle chiuse di ℓ^∞ non sono compatte; un compatto di ℓ^∞ non ha punti interni; il cubo di dimensione finita in ℓ^∞ è compatto; il cubo di Hilbert è compatto in ℓ^∞ (fac.).

Lezione* 27-28-29 (27 marzo 2020) Risoluzione esercizi del Compito 1 e del Foglio 2.

Lezione* 30-31 (31 marzo 2020) Caratterizzazione di compattezza tramite ricoprimenti aperti. Teorema di Dini della convergenza monotona (fac.).

Lezione* 32-33 (1 aprile 2020) Funzioni continue e uniformemente continue. Teorema di Heine-Cantor-Borel. Funzioni Lipschitziane, funzioni Hölderiane. Modulo di continuità.

Lezione* 34-35-36 (3 aprile 2020) Risoluzione esercizi del Compito 2.

Lezione* 37-38 (7 aprile 2020) Definizione di ε–rete ed ε–rete finita. Definizione di insieme relativamente compatto (o pre-compatto). Teoremi di Ascoli e di Arzelà.

Lezione* 39-40 (8 aprile 2020) Dimostrazione del Teorema di Ascoli (facoltativa). Applicazioni dei Teoremi di Ascoli-Arzelà ed esempi.

Lezione* 41-42 (15 aprile 2020) Esempi. Convergenza puntuale vs. convergenza integrale. Convergenza uniforme vs. convergenza integrale. Teorema: convergenza uniforme di funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato implica convergenza integrale. Teorema: $(f_n)_n$ funzioni limitate su $[a, b]$ e Riemann-integrabili, $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, allora $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è limitata e Riemann-integrabile e si ha convergenza degli integrali (fac.).

Lezione* 43-44-45 (17 aprile 2020) Correzione del Compito 3.

Lezione* 46-47 (21 aprile 2020) Serie di funzioni: generalità. Convergenza uniforme di una serie e passaggio al limite sotto il segno di integrale. Esempi. Convergenza uniforme di una serie e delle sue derivate: la derivata della somma di una serie è uguale alla somma delle derivate. Proposizione: esiste una funzione continua su $\mathbb{R}$ che non è derivabile in nessun punto (fac.).

Lezione* 47-48 (22 aprile 2020) Introduzione alle serie di potenze. Serie di potenze complesse. Teorema: se una serie ci potenze converge in $z_0 \neq 0$, allora converge totalmente in $B_r(0)$ per ogni $r < |z_0|$. Definizione di raggio di convergenza.

Lezione* 49-50-51 (24 aprile 2020) Correzione del Compito 4.

Lezione* 52-53 (28 aprile 2020) Definizione di raggio di convergenza. Teorema di Hadamard. Serie di potenze reali: scambio tra simbolo di sommatoria e integrale.

Lezione* 54-55 (29 aprile 2020) Derivazione di una serie di potenze. Sviluppo in serie di Taylor di una funzione. Definizione di funzione analitica. Non tutte le funzioni C^∞ sono analitiche: esempio del catino di Cauchy. Condizione sufficiente perché una funzione sia sviluppabile in serie di Taylor.

Lezione* 56-57-58 (1 maggio 2020) Correzione del Compito 5.

Lezione* 59-60 (5 maggio 2020) Sviluppi in serie di Taylor di alcune funzioni elementari. Esempio di funzione continua e non derivabile in alcun punto (fac.). Funzioni periodiche: generalità, polinomi trigonometrici.

Lezione* 61-62 (6 maggio 2020) Sviluppo in serie di Fourier di funzioni a valori complessi. Coefficienti di Fourier nel caso di una funzione a valori complessi. Teoremi di convergenza per la serie di Fourier (solo enunciati). Esempi ed applicazioni al calcolo esplicito della somma di alcune serie.

Lezione* 63-64-65 (8 maggio 2020) Correzione del Compito 5 e di parte del Compito 6.

Lezione* 66-67 (13 maggio 2020) Dimostrazione della convergenza puntuale della serie di Fourier (fac.).

Lezione* 68-69 (14 maggio 2020) Disuguaglianza di Bessel, dimostrazione della convergenza totale della serie di Fourier per funzioni di classe C^1 (fac.). Cenni sul completamento di uno spazio metrico (fac.).

Lezione* 70-71-72 (15 maggio 2020) Correzione del Compito 7 e fine correzione del Compito 6.

Lezione* 73-74 (19 maggio 2020) Introduzione alle equazioni differenziali: esempi e terminologia. Equazioni differenziali lineari del primo ordine: formula risolutiva con dimostrazione.

Lezione* 75-76 (20 maggio 2020) Problema di Cauchy per equazioni o sistemi di equazioni differenziali del primo ordine. Teorema di esistenza e unicità locale della soluzione del problema di Cauchy.

Lezione* 77-78-79 (22 maggio 2020) Correzione del Compito 8.

Lezione* 80-81 (26 maggio 2020) Condizione iniziale per equazioni differenziali di ordine n. Prolungamento di soluzioni, soluzione massimale. Teorema: esistenza del prolungamento massimale per una soluzione locale. Condizione per il prolungamento di una soluzione.

Lezione* 82-83 (27 maggio 2020) Prolungamento di soluzioni. Disuguaglianza di Gronwall (fac.). Conseguenze e Teorema sulla prolungabilità di soluzioni quando $A :=$ intervallo $\times \mathbb{R}$.

Lezione* 84-85-86 (29 maggio 2020) Equazioni differenziali a variabili separabili. Equazioni differenziali lineari: spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione m.

Lezione* 87-88 (3 giugno 2020) Equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti costanti: generalità. Caso $n = 2$: soluzioni dell'equazione omogenea e polinomio caratteristico. Ricerca di una soluzione particolare: annichilatori. Metodo di somiglianza: caso di non risonanza; caso di risonanza (cenni).

Lezione* 89-90-91 (5 giugno 2020) Correzione del Compito 9.

Le lezioni contrassegnate con un * sono state tenute in forma telematica.

La dicitura *fac.* (=facoltativo) sta a indicare che la dimostrazione relativa è facoltativa. Verrà eventualmente richiesta a studenti che aspirino a un voto maggiore o uguale a 27/30.

Referenze bibliografiche:

[1] E. GIUSTI, Analisi Matematica 2. Bollati Boringhieri (1989).

[2] M. GIAQUINTA, G. MODICA, Mathematical Analysis: Linear and Metric Structures and Continuity. Birkäuser Boston (2007).

[3] M. GIAQUINTA, G. MODICA, Mathematical Analysis: Approximation and Discrete Processes. Birkäuser Boston (1999).

[4] W. RUDIN, Principles of mathematical analysis, McGraw Hill (1976).