ESERCIZI DI ANALISI REALE - FOGLIO 6

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

A.A. 2017-18

ANDREA DAVINI

SOMMARIO. Eventuali commenti, suggerimenti e segnalazioni di errori sono graditi. Gli esercizi contrassegnati con un asterisco sono più difficili

In quanto segue, se non diversamente specificato, indicheremo con $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un generico spazio di misura. Indicheremo con $L^p(X;\mathbb{C})$ e $L^p(X)$ lo spazio delle funzioni misurabili f da X a $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$, rispettivamente, e tali che $\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu < +\infty$. Scriveremo $\|\cdot\|_p$ al posto di $\|\cdot\|_{L^p(X)}$.

Esercizio 1. Verificare che la seguente formula

$$< f, g >:= \int_X f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \qquad \text{per ogni } f, g \in L^2(X)$$

definisce un prodotto scalare complesso su $L^2(X)$.

Esercizio 2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ munito della misura di Lebesgue e $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

- Mostrare che l'identità del parallelogramma
  $$\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2\left(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2\right) \qquad \text{per ogni } f, g \in L^p(\Omega)$$
  vale se e solo $p = 2$.
- Dedurre che $L^p(\Omega)$ è di Hilbert se e solo se $p = 2$.

Esercizio 3 (Disuguaglianza di Chebyshev)**.** Sia f una funzione misurabile su X. Dimostrare che per ogni $p > 0$ e per ogni $a > 0$ si ha

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > a\}\right) \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{a}\right)^p.$$

Esercizio 4. Siano f ed $(f_n)_n$ funzioni in $L^p(X)$ con $1 \leqslant p < +\infty$ tali che

(a) $f_n(x) \to f(x)$ per μ–q.o. $x \in X$;

(b) esiste una funzione $g \in L^p(X)$ tale che $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ per μ–q.o. $x \in X$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrare che $f_n \to f$ in $L^p(X)$.

Si ricorda il seguente risultato dimostrato a lezione:

Date: 14 dicembre 2017.

Teorema 5. Sia $f_n \to f$ in $L^1(X)$. Allora esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ ed una funzione $g \in L^1(X)$ tali che

(i) $\lim_k f_{n_k}(x) = f(x)$ per μ–q.o. $x \in X$;

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leqslant g(x)$ per μ–q.o. $x \in X$, per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Il seguente esercizio può essere letto come una generalizzazione del Teorema 5 agli spazi L^p.

Esercizio 6. Sia $f_n \to f$ in $L^p(X)$ per $1 \leqslant p < +\infty$. Dimostrare che esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ ed una funzione $g \in L^p(X)$ tali che

(i) $\lim_k f_{n_k}(x) = f(x)$ per μ–q.o. $x \in X$;

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leqslant g(x)$ per μ–q.o. $x \in X$, per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Esercizio 7. Si consideri la successioni di funzioni $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definite come

$$f_n := \chi_{\left[\frac{n-2^j}{2^j}, \frac{n-2^j+1}{2^j}\right]} \qquad \text{per } 2^j \leqslant n < 2^{j+1}, \text{ per ogni } j = 0, 1, 2, \dots,$$

esplicitamente $f_1 = \chi_{[0,1]}$, $f_2 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$, $f_3 = \chi_{[\frac{1}{2},1]}$, $f_4 = \chi_{[0,\frac{1}{4}]}$, $f_5 = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}$, etc. Verificare che $f_n \to 0$ in $L^p([0,1])$ per ogni $1 \leqslant p < +\infty$, ma che $f_n(x)$ non ha limite, quale che sia $x \in [0,1]$.

Esercizio 8. Sia $(f_n)_n$ una successione limitata in $L^2(X)$. Dimostrare che

$$\frac{f_n(x)}{n} \to 0 \quad \text{per } \mu\text{–q.o. } x \in X.$$

Esercizio 9.

- Siano $f, g \in L^p(X)$ con $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Provare che $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ appartiene a $L^p(X)$.
- Siano $(f_n)_n$ e $(g_n)_n$ due successioni in $L^p(X)$ con $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ tali che $f_n \to f$ e $g_n \to g$ in $L^p(X)$. Verificare che $\max\{f_n, g_n\} =: h_n \to h := \max\{f, g\}$ in $L^p(X)$.
- Sia $(f_n)_n$ una successione in $L^p(X)$ con $1 \leqslant p < +\infty$ e sia $(g_n)_n$ una successione limitata in $L^\infty(X)$. Supponiamo che $f_n \to f$ in $L^p(X)$ e che $g_n(x) \to g(x)$ per μ–q.o. $x \in X$. Dimostrare che $f_n g_n \to fg$ in $L^p(X)$.

[Suggerimento: osservare che $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\left(|f - g| + f + g\right)$.]

Sia E sia uno spazio metrico e indichiamo con d la distanza su E. Diremo che una successione $(x_n)_n$ in E converge ad un elemento $x \in E$ se $\lim_n d(x_n, x) = 0$. Diremo che una successione $(x_n)_n$ converge in E se converge ad un elemento $x \in E$. Il risultato contenuto nel prossimo esercizio è di estrema utilità per le applicazioni, ad esempio, agli spazi L^p.

Esercizio 10. Sia (E, d) uno spazio metrico. Dimostrare che una successione $(x_n)_n$ converge ad un elemento $x \in E$ se e solo se ogni sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ ammette un'estratta che converge a x.

Esercizio 11. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $|\varphi(t)| \leqslant |t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per ogni $f : X \to \mathbb{R}$ misurabile, indicheremo con $\varphi \circ f$ la funzione definita come $(\varphi \circ f)(x) := \varphi(f(x))$ per ogni $x \in X$. Sia $1 \leqslant p < +\infty$. Dimostrare che

- $\varphi \circ f \in L^p(X)$ per ogni $f \in L^p(X)$;
- se $f_n \to f$ in $L^p(X)$, allora $\varphi \circ f_n \to \varphi \circ f$ in $L^p(X)$.

[Suggerimento: usare gli esercizi 10 e 6.]

Esercizio 12. Siano f_1, f_2 funzioni tali che $f_i \in L^{p_i}(X)$ con $1 \leqslant p_i \leqslant +\infty$ e $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leqslant 1$. Provare che $f(x) := f_1(x) f_2(x)$ appartiene a $L^p(X)$ con $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ e che

$$\|f\|_p \leqslant \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}.$$

Esercizio 13. Siano $1 \leqslant p < +\infty$ e $1 \leqslant q \leqslant +\infty$.

- Dimostrare che $L^1(X) \cap L^\infty(X)$ è un sottoinsieme denso di $L^p(X)$.
- Provare che l'insieme $\{f \in L^p(X) \cap L^q(X) \ : \ \|f\|_q \leqslant 1\}$ è chiuso in $L^p(X)$.
- Sia $(f_n)_n$ una successione in $L^p(X) \cap L^q(X)$ e sia $f \in L^p(X)$. Supponiamo che $f_n \to f$ in $L^p(X)$ e che $\sup_n \|f_n\|_q < +\infty$. Dimostrare che $f \in L^r(X)$ e che $f_n \to f$ in $L^r(X)$ per ogni r tra p e q, $r \neq q$.

Esercizio* 14. Sia $\mu(X) < +\infty$.

- Sia $f \in L^\infty(X)$. Dimostrare che $\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
- Sia $f \in \bigcap_{1 \leqslant p < +\infty} L^p(X)$ e assumiamo che esista una costante C tale che
$$\|f\|_p \leqslant C \quad \text{per ogni } 1 \leqslant p < +\infty.$$
Provare che $f \in L^\infty(X)$ e $\|f\|_\infty \leqslant C$.
- Costruire un esempio di funzione $f \in \cap_{1 \leqslant p < +\infty} L^p(X)$ e tale che $f \notin L^\infty(X)$ nel caso in cui $X = (0,1)$ munito della misura di Lebesgue.