ESERCIZI DI ANALISI REALE - FOGLIO 2

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

A.A. 2017-18

ANDREA DAVINI

SOMMARIO. Eventuali commenti, suggerimenti e segnalazioni di errori sono graditi. Gli esercizi contrassegnati con un asterisco sono più difficili

Esercizio 1. Sia $\mathcal{A}$ un'algebra. Dimostrare che $\mathcal{A}$ è una σ–algebra se e solo se è chiusa per unione numerabile crescente (i.e. se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ e $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, allora $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$).

Esercizio 2. Sia $\mathcal{E}$ una famiglia di sottoinsiemi di X e indichiamo con $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ la σ–algebra generata da $\mathcal{E}$ (cioè, la minima σ–algebra che contiene $\mathcal{E}$). Dimostrare che

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcup_{\mathcal{F}} \{ \mathcal{M}(\mathcal{F}) \,:\, \mathcal{F} \subset \mathcal{E},\ \mathcal{F} \text{ numerabile } \}.$$

[Suggerimento: verificare che il termine di destra è una σ–algebra.]

Esercizio 3. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. Dimostrare che

- $\mu(\liminf_n E_n) \leqslant \liminf_n \mu(E_n)$;
- $\mu(\limsup_n E_n) \geqslant \limsup_n \mu(E_n)$ purché $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) < +\infty$.

Si ricorda che $\limsup_n E_n := \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcup\limits_{n=k}^{+\infty} E_n \right)$ e $\liminf_n E_n := \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcap\limits_{n=k}^{+\infty} E_n \right)$.

Esercizio 4. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e siano $E, F \in \mathcal{M}$. Verificare che $\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$.

Esercizio 5. Dato uno spazio di misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ed $E \in \mathcal{M}$, definiamo $\mu \llcorner E(A) := \mu(A \cap E)$ per ogni $A \in \mathcal{M}$. Verificare che $\mu \llcorner E$ è una misura.

Esercizio 6. Siano μ^* una misura esterna su uno spazio X e $\mathcal{M}$ una σ–algebra di insiemi di X, e supponiamo che la restrizione $\mu := \mu^*_{|\mathcal{M}}$ di μ^* a $\mathcal{M}$ sia una misura. Verificare che se $\{ N \subseteq X \,:\, \mu^*(N) = 0 \} \subset \mathcal{M}$, allora μ è completa.

Esercizio* 7. Si dia un esempio di funzione $\tau : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, dove $\mathcal{A}$ è una opportuna famiglia di sottoinsiemi di uno spazio X, tale che la misura esterna da essa generata sia strettamente più piccola di τ su $\mathcal{A}$.

Date: 12 ottobre 2017.

Esercizio* 8. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ–finito. Indichiamo con μ^* la misura esterna indotta da μ, con $\mathcal{M}^*$ la σ–algebra degli insiemi μ^*–misurabili, e con $\nu := \mu^*_{|\mathcal{M}^*}$. Poniamo

$$\mathcal{N} := \{ Z \subset X \mid \text{esiste } N \in \mathcal{M} \text{ tale che } Z \subseteq N \text{ e } \mu(N) = 0 \}.$$

Lo scopo di questo esercizio è quello di mostrare che $(\mathcal{M}^*, \nu)$ è il completamento di $(\mathcal{M}, \mu)$, cioè che ν è una misura completa su $\mathcal{M}^*$ e che

$$\mathcal{M}^* = \{ E \cup Z \,:\, E \in \mathcal{M}, Z \in \mathcal{N} \}.$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{N} = \{ Z \subset X \mid \mu^*(Z) = 0 \}$.

(b) Sia $E \in \mathcal{M}^*$. Dimostrare che esiste $G \in \mathcal{M}$ tale che $E \subseteq G$ e $G \setminus E \in \mathcal{N}$.
[Suggerimento: sfruttare che $\mathcal{M}$ è σ–finita per ricondursi al caso $\mu^*(E) < +\infty$.]

(c) Sia $E \in \mathcal{M}^*$. Dimostrare che esiste $F \in \mathcal{M}$ tale che $F \subseteq E$ e $E \setminus F \in \mathcal{N}$.
[Suggerimento: passare al complementare per sfruttare il punto precedente.]

(d) Concludere.

Esercizio 9. Sia $\mathcal{A}$ la collezione di unioni finite di insiemi della forma $(a, b] \cap \mathbb{Q}$, con $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$. Provare le seguenti affermazioni:

- $\mathcal{A}$ è un'algebra in $\mathbb{Q}$;
- la σ–algebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ generata da $\mathcal{A}$ è $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$;
- la funzione $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ definita come $\mu(\varnothing) = 0$ e $\mu_0(A) = +\infty$ se $A \neq \varnothing$ è una premisura su $\mathcal{A}$;
- esiste più di una misura su $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$ la cui restrizione ad $\mathcal{A}$ è μ_0.

Esercizio* 10. Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di sottoinsiemi di uno spazio X e $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una premisura. Si indichi con $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty]$ la misura esterna indotta da $(\mu_0, \mathcal{A})$ e con $\mathcal{M}$ la σ–algebra degli insiemi μ^*–misurabili alla Carathéodory. Sia ora $\mathcal{N}$ una σ–algebra contenente $\mathcal{A}$ tale che la restrizione di μ^* ad $\mathcal{N}$ è una misura. Dimostrare che $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$.