ESERCIZI DI ANALISI REALE

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

A.A. 2017-18

ANDREA DAVINI

SOMMARIO. Eventuali commenti, suggerimenti e segnalazioni di errori sono graditi. Gli esercizi contrassegnati con un asterisco sono più difficili

1. Misura di Peano–Jordan e integrale di Riemann

Chiameremo *plurirettangolo* (limitato) un insieme che si può scrivere come unione di un numero finito di rettangoli limitati. Si osservi che ogni plurirettangolo si può sempre scrivere come unione *disgiunta* di un numero finito di rettangoli.

Esercizio 1. Siano $R_1, \dots, R_k$ rettangoli limitati e disgiunti in $\mathbb{R}^d$ e sia $P := R_1 \cup \dots \cup R_k$. Verificare che

$$|R_1| + \dots + |R_k| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^d} \# \left(P \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d \right),$$

dove abbiamo indicato con $|R_i|$ il volume di R_i e con $\#A$ la cardinalità dell'insieme A. Dedurre che la misura elementare di P data da

$$m(P) := |R_1| + \dots + |R_k|$$

è ben definita.

Nel seguito, indicheremo con $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ la collezione dei plurirettangoli di $\mathbb{R}^d$.

Esercizio 2. Siano $P, Q \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$. Verificare che $P \cup Q$, $P \cap Q$, $P \setminus Q$ e $P \Delta Q := (P \setminus Q) \cup (Q \setminus P)$ appartengono ad $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$.

Esercizio 3. Verificare che $m : \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty)$ verifica le seguenti proprietà:

(1) *(additività finita)*
$m(E_1 \cup \dots \cup E_n) = m(E_1) + \dots + m(E_n)$ per ogni $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ a due a due disgiunti;

(2) $m(\emptyset) = 0$;

(3) $m(R) = |R|$ se R è un rettangolo;

(4) *(monotonia)*
$m(E) \leqslant m(F)$ se $E \subseteq F$;

(5) *(subadditività finita)*
$m(E_1 \cup \dots \cup E_n) \leqslant m(E_1) + \dots + m(E_n)$ per ogni $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$;

(6) *(invarianza per traslazioni)*
$m(E + x) = m(E)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$.

Date: 26 gennaio 2018.

Esercizio 4. Sia $\mu : \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$ finitamente additiva, invariante per traslazioni e tale che $\mu([0,1)^d) = 1$. Dimostrare che $\mu = m$.

Esercizio 5 (Caratterizzazione della misurabilità secondo Peano–Jordan)**.** Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme limitato. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono tra loro equivalenti:

(i) E è misurabile secondo Peano–Jordan;
(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $A, B \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ tali che $\quad A \subseteq E \subseteq B \;$ e $\; m(B \setminus A) < \varepsilon$.
(iii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $A \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ tale che $\quad m^*(A \Delta E) < \varepsilon$.

Esercizio 6. Siano E, F insiemi limitati in $\mathbb{R}^d$ e misurabili secondo Peano–Jordan (*PJ–misurabili* per brevità).

- Verificare che $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$ e $E \Delta F := (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ sono ancora PJ–misurabili;
- verificare quindi che le proprietà (1)–(6) dell'esercizio precedente si estendono dai plurirettangoli agli insiemi limitati PJ–misurabili.

Esercizio 7. Sia E un insieme limitato in $\mathbb{R}^d$.

(i) Dimostrare che
$$m_*(E) = \sup \{ m(P) \, : \, P \text{ plurirettangolo aperto} \subseteq E \} .$$
Dedurre che E e la sua parte interna $\mathrm{int}(E)$ hanno stessa misura interna di Peano–Jordan;

(ii) dimostrare che
$$m^*(E) = \inf \{ m(P) \, : \, P \text{ plurirettangolo chiuso} \supseteq E \} .$$
Dedurre che E e la sua chiusura $\overline{E}$ hanno stessa misura esterna di Peano–Jordan;

(iii) dimostrare che E è PJ–misurabile se e solo se $\mathrm{int}(E)$ ed $\overline{E}$ sono PJ–misurabili e $m(\mathrm{int}(E)) = m(\overline{E})$.

(v) siano $E := [0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ e $F := [0,1]^2 \cap Q^2$. Verificare che $m_*(E) = m_*(F) = 0$ e $m^*(E) = m^*(F) = 1$. In particolare, E ed F non sono PJ–misurabili.

Esercizio* 8. Dimostrare che E è PJ–misurabile se e solo se il bordo topologico ∂E di E ha misura esterna di PJ nulla, i.e. $m^*(\partial E) = 0$;

Esercizio 9. Mostrare con degli esempi che l'unione numerabile e l'intersezione numerabile di insiemi PJ–misurabili in $\mathbb{R}^d$ non è in generale PJ–misurabile, anche quando tutti questi insiemi sono limitati.

Esercizio 10 (Proprietà alla Caratheodory)**.** Sia P un plurirettangolo limitato in $\mathbb{R}^d$. Mostrare che, per ogni insieme limitato E di $\mathbb{R}^d$, vale la seguente proprietà:
$$m^*(E) = m^*(E \cap P) + m^*(E \setminus P).$$

Esercizio 11. Sia E un insieme contenuto nell'intervallo $[a, b]$ e denotiamo con χ_E la sua funzione caratteristica. Verificare che
$$m_*(E) = \underline{\int_a^b} \chi_E(x) \, \mathrm{d}x, \qquad m^*(E) = \overline{\int_a^b} \chi_E(x) \, \mathrm{d}x.$$
Dedurre che la funzione χ_E è integrabile secondo Riemann se e solo se E è misurabile secondo Peano–Jordan.

Esercizio 12. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Dimostrare che f è integrabile secondo Riemann se e solo se ìntegrabile secondo Darboux, e che, in tal caso, i due integrali coincidono.

Esercizio 13. Sia $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ una funzione limitata. Dimostrare che f è Riemann integrabile se e solo se l'insieme

$$E := \{(x, t) \,:\, x \in [a, b],\, 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$$

è PJ–misurabile in $\mathbb{R}^2$, e che in tal caso

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = m(E),$$

dove con m abbiamo indicato la misura di Peano–Jordan in $\mathbb{R}^2$.

2. Teoria della misura astratta

Esercizio 14. Sia $\mathcal{A}$ un'algebra. Dimostrare che $\mathcal{A}$ è una σ–algebra se e solo se è chiusa per unione numerabile crescente (i.e. se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ e $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, allora $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$).

Esercizio 15. Sia $\mathcal{E}$ una famiglia di sottoinsiemi di X e indichiamo con $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ la σ–algebra generata da $\mathcal{E}$ (cioè, la minima σ–algebra che contiene $\mathcal{E}$). Dimostrare che

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcup_{\mathcal{F}} \{\mathcal{M}(\mathcal{F}) \,:\, \mathcal{F} \subset \mathcal{E},\ \mathcal{F} \text{ numerabile}\}.$$

[Suggerimento: verificare che il termine di destra è una σ–algebra.]

Esercizio 16. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. Dimostrare che

- $\mu(\liminf_n E_n) \leqslant \liminf_n \mu(E_n)$;
- $\mu(\limsup_n E_n) \geqslant \limsup_n \mu(E_n)$ purché $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) < +\infty$.

Si ricorda che $\limsup_n E_n := \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\bigcup\limits_{n=k}^{+\infty} E_n\right)$ e $\liminf_n E_n := \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\bigcap\limits_{n=k}^{+\infty} E_n\right)$.

Esercizio 17. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e siano $E, F \in \mathcal{M}$. Verificare che $\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$.

Esercizio 18. Dato uno spazio di misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ed $E \in \mathcal{M}$, definiamo $\mu \llcorner E(A) := \mu(A \cap E)$ per ogni $A \in \mathcal{M}$. Verificare che $\mu \llcorner E$ è una misura.

Esercizio 19. Siano μ^* una misura esterna su uno spazio X e $\mathcal{M}$ una σ–algebra di insiemi di X, e supponiamo che la restrizione $\mu := \mu^*_{|\mathcal{M}}$ di μ^* a $\mathcal{M}$ sia una misura. Verificare che se $\{N \subseteq X \,:\, \mu^*(N) = 0\} \subset \mathcal{M}$, allora μ è completa.

Esercizio* 20. Si dia un esempio di funzione $\tau : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, dove $\mathcal{A}$ è una opportuna famiglia di sottoinsiemi di uno spazio X, tale che la misura esterna da essa generata sia strettamente più piccola di τ su $\mathcal{A}$.

Esercizio 21. Sia μ^* una misura esterna su uno spazio X e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi disgiunti e μ^*–misurabili. Dimostrare che

$$\mu^*\big(E\cap(\cup_{n=1}^\infty A_n)\big)=\sum_{n=1}^\infty \mu^*(E\cap A_n)\qquad \text{per ogni } E\subset X.$$

Esercizio* 22. Sia $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio di misura σ–finito. Indichiamo con μ^* la misura esterna indotta da μ, con $\mathcal{M}^*$ la σ–algebra degli insiemi μ^*–misurabili, e con $\nu:=\mu^*_{|\mathcal{M}^*}$. Poniamo

$$\mathcal{N}:=\{Z\subset X\ \mid\ \text{esiste } N\in\mathcal{M} \text{ tale che } Z\subseteq N \text{ e } \mu(N)=0\,\}.$$

Lo scopo di questo esercizio è quello di mostrare che $(\mathcal{M}^*,\nu)$ è il completamento di $(\mathcal{M},\mu)$, cioè che ν è una misura completa su $\mathcal{M}^*$ e che

$$\mathcal{M}^*=\{E\cup Z\ :\ E\in\mathcal{M}, Z\in\mathcal{N}\ \}.$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{N}=\{Z\subset X\ \mid\ \mu^*(Z)=0\,\}$.

(b) Sia $E\in\mathcal{M}^*$. Dimostrare che esiste $G\in\mathcal{M}$ tale che $E\subseteq G$ e $G\setminus E\in\mathcal{N}$.
[Suggerimento: sfruttare che $\mathcal{M}$ è σ–finita per ricondursi al caso $\mu^*(E)<+\infty$.]

(c) Sia $E\in\mathcal{M}^*$. Dimostrare che esiste $F\in\mathcal{M}$ tale che $F\subseteq E$ e $E\setminus F\in\mathcal{N}$.
[Suggerimento: passare al complementare per sfruttare il punto precedente.]

(d) Concludere.

Esercizio 23. Sia $\mathcal{A}$ la collezione di unioni finite di insiemi della forma $(a,b]\cap\mathbb{Q}$, con $-\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant+\infty$. Provare le seguenti affermazioni:

- $\mathcal{A}$ è un'algebra in $\mathbb{Q}$;
- la σ–algebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ generata da $\mathcal{A}$ è $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$;
- la funzione $\mu_0:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ definita come $\mu(\varnothing)=0$ e $\mu_0(A)=+\infty$ se $A\neq\varnothing$ è una premisura su $\mathcal{A}$;
- esiste più di una misura su $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$ la cui restrizione ad $\mathcal{A}$ è μ_0.

Esercizio* 24. Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di sottoinsiemi di uno spazio X e $\mu_0:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ una premisura. Si indichi con $\mu^*:\mathscr{P}(X)\to[0,+\infty]$ la misura esterna indotta da $(\mu_0,\mathcal{A})$ e con $\mathcal{M}$ la σ–algebra degli insiemi μ^*–misurabili alla Carathéodory. Sia ora $\mathcal{N}$ una σ–algebra contenente $\mathcal{A}$ tale che la restrizione di μ^* ad $\mathcal{N}$ è una misura. Dimostrare che $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}$.

3. La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^d$

In questa sezione, se non diversamente indicato, indicheremo con λ^* la misura esterna di Lebesgue su $\mathbb{R}^d$, con $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ la σ–algebra degli insiemi Lebesgue–misurabili e con $\mathcal{L}^d:=\lambda^*_{|\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}$ la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^d$. Indicheremo con $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ la σ–algebra dei Boreliani di $\mathbb{R}^d$.

Un insieme si dice G_δ se è una intersezione numerabile di aperti, F_σ se è una unione numerabile di chiusi.

Esercizio 25. Dimostrare che la σ–algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ dei Boreliani di $\mathbb{R}$ è generata dalla famiglia di intervalli $\mathcal{I}$ di $\mathbb{R}$ in ciascuno dei seguenti casi:

- $\mathcal{I} := \{[a,b] : -\infty < a < b < +\infty\}$;
- $\mathcal{I} := \{[a,b) : -\infty < a < b < +\infty\}$;
- $\mathcal{I} := \{(a,b] : -\infty < a < b < +\infty\}$;
- $\mathcal{I} := \{(a,b) : -\infty < a < b < +\infty\}$.

Esercizio 26. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Dimostrare che $\lambda^*(E+x) = \lambda^*(E)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda^*(\alpha E) = \alpha^d \lambda^*(E)$ per ogni $\alpha > 0$.

Esercizio 27. Sia $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty]$ una misura sui Boreliani di $\mathbb{R}^d$ che sia invariante per traslazioni e finita sui compatti (cioè $\mu(K) < +\infty$ per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^d$). Si dimostri che $\mu = \gamma\,\mathcal{L}^d$ per una opportuna costante $\gamma \geqslant 0$ (cioè μ è proporzionale alla misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^d$). Si trovi un'espressione per γ.

[Suggerimento: è sufficiente dimostrare l'uguaglianza sui cubi $[0,1/k)^d$ per $k \in \mathbb{N}^+$ (perchè?)]

Esercizio 28. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Dimostrare che esiste un insieme G di tipo G_δ con $E \subseteq G$ e $\lambda^*(E) = \mathcal{L}^d(G)$.

Esercizio 29 (Caratterizzazione della misurabilità secondo Lebesgue)**.** Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono tra loro equivalenti:

(i) E è misurabile secondo Lebesgue;
(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $\lambda^*(A \setminus E) < \varepsilon$;
(iii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C \subseteq E$ tale che $\lambda^*(E \setminus C) < \varepsilon$;
(iv) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso C e un aperto A in $\mathbb{R}^d$ tali che $C \subseteq E \subseteq A$ e $\mathcal{L}^d(A \setminus C) < \varepsilon$;
(v) esiste un insieme G di tipo G_δ ed un insieme N di misura nulla tale che $E = G \setminus N$;
(vi) esiste un insieme F di tipo F_σ ed un insieme Z di misura nulla tale che $E = F \cup Z$

Esercizio 30. Sia E un insieme limitato di $\mathbb{R}^d$ e misurabile secondo Peano–Jordan. Provare che E è misurabile rispetto a Lebesgue e che la sua misura di Peano–Jordan $m(E) = \mathcal{L}^d(E)$.

Esercizio 31. Sia E un insieme di $\mathbb{R}^d$ tale che $\lambda^*(\partial E) = 0$. Dimostrare che E è misurabile secondo Lebesgue.

Esercizio* 32. Sia K un insieme compatto di $\mathbb{R}^d$. Dimostrare che $\lambda^*(K) = m^*(K)$, dove abbiamo indicato con m^* la misura esterna di Peano–Jordan.

Esercizio* 33. Sia E un insieme limitato di $\mathbb{R}^d$. Dimostrare che E è misurabile secondo Peano–Jordan se e solo se $\lambda^*(\partial E) = 0$.

Esercizio* 34. Dato $\varepsilon > 0$, trovare un insieme aperto e denso in $\mathbb{R}$ di misura uguale a ε.

Esercizio 35. Sia E un insieme in $\mathbb{R}$ di misura di Lebesgue nulla. Provare che E é totalmente sconnesso (cioè non contiene intervalli aperti).

Esercizio 36. Si trovi un insieme Boreliano E contenuto nell'intervallo $[0,1]$ che sia totalmente sconnesso e tale che $\mathcal{L}^1(E) = 1$.

Esercizio* 37. Sia $0 < \delta < 1$. Si trovi un insieme Boreliano E contenuto nell'intervallo $[0,1]$ che sia totalmente sconnesso e tale che $\delta < \mathcal{L}^1(E) < 1$.

[Suggerimento: usare l'insieme ottenuto intersecando i razionali gonfiati con l'intervallo $(0,1)$.]

È utile conoscere il seguente risultato:

Teorema 38. Esiste un insieme misurabile $A \subset [0,1]$ tale che

$$0 < \mathcal{L}^1(A \cap V) < \mathcal{L}^1(V)$$

per ogni insieme aperto non vuoto $V \subset [0,1]$.

Notiamo che questo equivale a dire che sia $A \cap V$ che $V \setminus A$ hanno misura positiva. Per una dimostrazione, si veda qui.

Esercizio 39. Sia $(a_n)_n$ una successione in $(0,1)$.

- Provare che $\Pi_{n=1}^{\infty}(1 - a_n) > 0$ se e solo se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.
  [Suggerimento: confrontare la serie $\sum_n \log(1 - a_n)$ con $\sum_n a_n$.]
- Dato $\beta \in (0,1)$, esibire una successione $(a_n)_n$ tale che $\Pi_{n=1}^{\infty}(1 - a_n) = \beta$.

Esercizio 40 (Costruzione di un insieme di Cantor generalizzato)**.** Sia $\beta \in (0,1)$ e $(\alpha_n)_n$ una successione in $(0,1)$ tale che $\Pi_{n=1}^{\infty}(1 - \alpha_n) = \beta$. Indichiamo con C_1 l'insieme chiuso ottenuto rimovendo dall'intervallo $[0,1]$ un intervallo aperto centrale di misura α_1 (quindi C_1 è unione disgiunta di due intervalli chiusi J_1^1, J_2^1 di uguale lunghezza). Indichiamo con C_2 l'insieme chiuso ottenuto rimuovendo da ciascuno intervallo J_i^1 un intervallo aperto centrale di lunghezza $\alpha_2|J_i^1|$, con $i = 1,2$. Procedendo induttivamente, definiamo C_{n+1} rimuovendo da ciascuno dei 2^n intervalli chiusi J_i^n da cui è formato C_n un intervallo aperto centrale di lunghezza $\alpha_{n+1}|J_i^n|$. Definiamo $C := \cap_{n=1}^{\infty} C_n$. Provare che:

- C é un insieme compatto, totalmente sconnesso e senza punti isolati;
- $\mathcal{L}^1(C) = \beta$.

Esercizio 41. Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme Lebesgue misurabile di misura positiva. Dimostrare che, per ogni $\alpha < 1$, esiste un intervallo I tale che $\mathcal{L}^1(E \cap I) > \alpha \mathcal{L}^1(I)$.

[Suggerimento: ridursi al caso in cui E sia di misura finita e ragionare per assurdo.]

Esercizio 42. Sia V l'insieme di Vitali in $[0,1]$. Dimostrare che $\lambda^*(V) > 0$.

Esercizio* 43. Sia E un insieme in $\mathbb{R}$ Lebesgue misurabile e di misura positiva. Dimostrare che E contiene un insieme non misurabile.

Esercizio* 44. Sia E un insieme in $\mathbb{R}$ di misura esterna di Lebesgue positiva. Dimostrare che E contiene un insieme non misurabile.

Esercizio* 45. Dare un esempio di successione decrescente $(A_n)_n$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, i.e. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$, tali che

$$\lambda^*(A_1) < +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_n \lambda^*(A_n) > \lambda^*\left(\cap_1^{\infty} A_n\right).$$

4. Funzioni misurabili

Esercizio 46. Sia $f : X \to Y$ una funzione. Verificare le seguenti proprietà:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ per ogni $A, B \subset X$;

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ per ogni $A, B \subset X$. Mostrare con un esempio che l'inclusione può essere stretta. Individuare una condizione necessaria e sufficiente su f che garantisca l'uguaglianza;

(c) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ per ogni $A, B \subset X$. Mostrare con un esempio che l'inclusione può essere stretta. Individuare una condizione necessaria e sufficiente su f che garantisca l'uguaglianza;

(d) $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$ per ogni $E, F \subset Y$;

(e) $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$ per ogni $E, F \subset Y$;

(f) $f^{-1}(E \setminus F) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$ per ogni $E, F \subset Y$.

Provare che le proprietà (a) e (d) sono anche stabili per unioni non numerabili di insiemi, e che la proprietà (e) è stabile per intersezioni non numerabili.

Sia X uno spazio topologico e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Diremo che f è *semicontinua inferiormente* (s.c.i.) se $\{f \leqslant a\}$ è chiuso per ogni $a \in \mathbb{R}$. Diremo che f è *semicontinua superiormente* (s.c.s.) se $\{f \geqslant a\}$ è chiuso per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 47. Sia X uno spazio topologico. Mostrare che:

- se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è s.c.i. (rispettivamente, s.c.s), allora è Borel–misurabile;
- se $\{f_i \,:\, i \in I\}$ è una famiglia qualsiasi di funzioni continue da X in $\mathbb{R}$, allora le funzioni $\sup_{i\in\mathcal{I}} f_i(x)$ e $\inf_{i\in\mathcal{I}} f_i(x)$ da X in $\overline{\mathbb{R}}$ sono, rispettivamente, semicontinua inferiormente e semicontinua superiorermente.

Esercizio 48. Sia X uno spazio metrico ed $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Mostrare che:

- f è s.c.i. se e solo se, per ogni $x_0 \in X$ e per ogni successione $(x_n)_n$ che converge a x_0, si ha $\liminf_n f(x_n) \geqslant f(x_0)$;
- f è s.c.s. se e solo se, per ogni $x_0 \in X$ e per ogni successione $(x_n)_n$ che converge a x_0, si ha $\limsup_n f(x_n) \leqslant f(x_0)$.

Esercizio 49. Sia $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una funzione continua. Rispondere alle seguenti domande, dando una dimostrazione o esibendo un controesempio.

- Se E è Lebesgue misurabile, è vero che $f(E)$ è Lebesgue misurabile?
- Se E ha misura nulla, è vero che $f(E)$ ha misura nulla?

Ricordiamo che una funzione f tra due spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) si dice Lipschitziana se esiste una costante κ tale che $d_Y\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \kappa\, d_X(x, y)$.

Esercizio 50. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana.

- Mostrare che se E ha misura nulla, allora anche $f(E)$ ha misura nulla.
- Dedurre che $f(E)$ è Lebesgue misurabile se E è Lebesgue misurabile.
  [Suggerimento: usare la regolarità interna della misura di Lebesgue.]

Questi risultati si estendono al caso di $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ Lipschitziana per $d \geqslant 2$?

Esercizio 51. Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ due funzioni misurabili. Sia $h(x) := \Phi(f(x), g(x))$ per ogni $x \in X$, dove Φ è una funzione continua da $\mathbb{R}^2$ in uno spazio topologico Y. Dimostrare che $h : X \to Y$ è misurabile.

Esercizio 52. Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ due funzioni misurabili. Dimostrare che

- le funzioni $x \mapsto f(x) + g(x)$ e $x \mapsto f(x)g(x)$ da X in $\mathbb{R}$ sono misurabili;
- la funzione $x \mapsto 1/f(x)$ da X in $\overline{\mathbb{R}}$ è misurabile (dove conveniamo che $1/0$ sia $+\infty$).

Esercizio 53. Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e siano $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni misurabili.

- Dimostrare che la funzione $x \mapsto f(x)g(x)$ da X in $\overline{\mathbb{R}}$ è misurabile (dove conveniamo che $0 \cdot (\pm\infty) = 0$);
- Sia $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e definiamo $h(x) := a$ se $f(x) = -g(x) = \pm\infty$ e $h(x) := f(x)+g(x)$ altrimenti. Dimostrare che $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile.

Esercizio 54. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che la controimmagine di insiemi Boreliani sono Boreliani. È vero il viceversa?

Esercizio 55. Dimostrare che una funzione monotona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Boreliana.

Esercizio 56. Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Verificare che l'insieme $\{x \in X \, : \, f(x) = \alpha\}$ è un insieme misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Si provi con un esempio che il viceversa non è vero.

Esercizio* 57. Si mostri che se f è una funzione misurabile a valori reali, non è vero che le controimmagini di insiemi misurabili secondo Lebesgue sono misurabili. E se f è continua?

Esercizio 58. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura tale che $\mu(X) = +\infty$, e $f : X \to [-\infty, +\infty]$ una funzione misurabile e finita quasi ovunque. Dimostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un insieme $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) > k$ tale che f è limitata su E.

Esercizio 59. Sia $\{f_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ una famiglia più che numerabile di funzioni misurabili. Allora la funzione $f(x) := \sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x)$ non è in generale misurabile. Si esibisca un esempio di questo fatto.

Esercizio 60. Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni.

(a) Dimostrare che se f e g sono Boreliane, allora $g \circ f$ è Boreliana.

(b) Dimostrare che se g è Boreliana e f è Lebesgue misurabile, allora $g \circ f$ è Lebesgue misurabile.

(c)* Fornire un esempio di funzione g Lebesgue misurabile ed f continua tale che $g \circ f$ non sia Lebesgue misurabile.

[Suggerimento: nel corso, abbiamo dato un esempio di funzione continua f che manda un insieme non misurabile in un insieme misurabile.]

Esercizio 61. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e definiamo

$$F(x) := \limsup_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \qquad G(x) := \liminf_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

- Mostrare che le funzioni $F, G : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ sono Borel–misurabili;
  [Suggerimento: osservare che F e G possono essere scritte come limiti di funzioni semicontinue]
- Sia $g(x) = f'(x)$ se f è derivabile in x e $g(x) = 0$ altrimenti. Dimostrare che g è Boreliana.

L'esercizio precedente implica, in particolare, che se f è derivabile in $\mathbb{R}$, allora $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Boreliana.

Esercizio 62. Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ funzioni misurabili. Dimostrare che l'insieme dei punti di convergenza delle f_n, i.e. $E := \{x \in X \,:\, f_n(x) \text{ converge}\}$, è misurabile.

5. Teoria dell'integrazione

Diremo che una famiglia di insiemi $\{E_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ è una *partizione dello spazio* X se gli insiemi $\{E_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ sono a due a due disgiunti e $X = \bigcup_{i\in\ I} E_i$. Se $(X, \mathcal{M})$ è uno spazio misurabile, diremo che $\{E_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ è una *partizione misurabile di* X se si ha inoltre che $E_i \in \mathcal{M}$ per ogni $i \in \mathcal{I}$.

Esercizio 63. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $\{E_1, \dots, E_m\}$ e $\{F_1, \dots, F_n\}$ due differenti partizioni misurabili di X, e supponiamo che

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{F_j}(x) \qquad \text{per ogni } x \in X,$$

dove $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(E_i) = \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(F_j)$.

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una funzione $\varphi : X \to \mathbb{R}$ si dice *semplice* se è misurabile e se la sua immagine è un insieme finito, i.e. $\varphi(X) = \{a_1, \dots, a_n\}$. In tal caso, la famiglia di insiemi $\{E_i := \varphi^{-1}(\{a_i\}) \,:\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ è una partizione misurabile di X e si ha

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i}(x) \qquad \text{per ogni } x \in X. \tag{1}$$

Indicheremo con $\mathscr{S}$ la famiglia delle funzioni semplici su X, e con $\mathscr{S}^+$ quella delle funzioni semplici positive su X.

Sia $\varphi \in \mathscr{S}^+$ e la scriviamo nella forma canonica (1) con $\varphi(X) = \{a_1, \dots, a_n\}$ ed $E_i := \varphi^{-1}(\{a_i\})$ per ogni $1 \leqslant i \leqslant n$. Poniamo

$$\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i). \tag{2}$$

Esercizio 64. Siano $\varphi, \psi \in \mathscr{S}^+$ e $\alpha \geqslant 0$. Verificare che la definizione di integrale di una funzione elementare data in (2) verifica le seguenti proprietà:

- $\displaystyle\int_X \alpha\varphi \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu;$
- $\displaystyle\int_X (\varphi + \psi) \, \mathrm{d}\mu = \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu + \int_X \psi \, \mathrm{d}\mu;$

- se $\varphi \leqslant \psi$ su X, allora $\displaystyle\int_X \varphi \, d\mu \leqslant \int_X \psi \, d\mu$.

L'integrale di una funzione misurabile $f : X \to [0, +\infty]$ è definito come

(3) $$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu \ :, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant f, \, \varphi \in \mathscr{S}^+ \right\}.$$

L'integrale di una funzione misurabile $f : X \to [-\infty, +\infty]$ si definisce come

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$$

ogni volta che questa espressione ha senso (cioè quando almeno uno dei due integrali a secondo membro è finito). Ricordiamo che

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}.$$

Una funzione $f : X \to [-\infty, +\infty]$ si dice *integrabile* (o *sommabile*) se è misurabile e $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$.

Esercizio 65. Sia $f : X \to [-\infty, +\infty]$. Verificare che f è integrabile se e solo se f^+ e f^- sono integrabili.

Esercizio 66. Sia $f : X \to [-\infty, +\infty]$ una funzione integrabile. Verificare che $\mu(\{x : |f(x)| = +\infty\}) = 0$ e che l'insieme $\{x \in X : |f(x)| > 0\}$ è σ–finito.

Esercizio 67. Sia $f : X \to [-\infty, +\infty]$ una funzione misurabile. Mostrare con un esempio che $\mu(\{x : |f(x)| = +\infty\}) = 0$ non implica che f sia integrabile.

Sia $\mathcal{M}$ una σ–algebra sullo spazio X e siano μ e ν due misure su $\mathcal{M}$. Si dice che ν è assolutamente continua rispetto a μ (e si scrive $\nu \ll \mu$) se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che, se $E \in \mathcal{M}$ e $\mu(E) < \delta$, allora $\nu(E) < \varepsilon$.

Esercizio* 68. Sia $\mathcal{M}$ una σ–algebra sullo spazio X e siano μ e ν due misure su $\mathcal{M}$. Si assuma che $\nu(X) < +\infty$. Provare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) ν è assolutamente continua rispetto a μ;

(b) $\nu(E) = 0$ per ogni $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) = 0$.

[Suggerimento: per dimostrare (b)$\Rightarrow$(a), ragionare per assurdo: esiste dunque una successione $(E_n)_n \subset \mathcal{M}$ con $\mu(E_n) \to 0$ (abbastanza rapidamente...) e $\nu(E_n) \geqslant \varepsilon_0 > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. A partire da $(E_n)_n$, costruire una successione decrescente di insiemi in $\mathcal{M}$ di misura μ finita che tende ad un insieme di misura μ nulla e misura ν positiva.]

Esercizio 69. Sia X uno spazio non vuoto e y un suo punto. Definiamo $\delta_y : \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty]$ ponendo $\delta_y(E) = 1$ se $y \in E$ e $\delta_y(E) = 0$ altrimenti.

- Verificare che δ_y è una misura su $\mathscr{P}(X)$;
- Verificare che $\displaystyle\int_X f(x) \, d\delta_y(x) = f(y)$ per ogni $f : X \to [0, +\infty]$.

La misura δ_y prende il nome di *delta di Dirac in y*.

Esercizio 70. (Formula di cambio di variabili) Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura, $(Y, \mathcal{N})$ uno spazio misurabile e $\phi : X \to Y$ una funzione misurabile. Il *push–forward* della misura μ tramite ϕ, indicato con $\phi_*\mu$, è definito come

(4) $$\phi_*\mu(E) := \mu(\phi^{-1}(E)) \qquad \text{per ogni } E \in \mathcal{N}.$$

- Verificare che $(Y, \mathcal{N}, \phi_*\mu)$ è uno spazio di misura;
- Verificare che per ogni $f : Y \to [0, +\infty]$ misurabile si ha
$$\int_Y f \, \mathrm{d}\phi_*\mu = \int_X f \circ \phi \, \mathrm{d}\mu.$$

Nel caso in cui X ùn sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e μ è la misura di Lebesgue su X, scriveremo $\int_X f(x)\,\mathrm{d}x$ al posto di $\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.

Esercizio 71. Si consideri $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}^d)$ e sia $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ Borel–misurabile.

- Si verifichi che $x \mapsto f(x + y)$ è Borel–misurabile per ogni $y \in \mathbb{R}^d$ e
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x + y)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
- Si verifichi che $x \mapsto f(\alpha x)$ è Borel–misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e
$$|\alpha|^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Quale è la relazione tra questi risultati e quelli dell'Esercizio 70?

Esercizio 72. Sia $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una mappa lineare invertibile ed $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ una funzione Borel–misurabile. Dimostrare che $f \circ T$ è Borel–misurabile e che vale la formula di cambio di variabili
$$|\det(\mathrm{L})| \int_{\mathbb{R}^d} \big(f \circ L\big)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x$$
nei seguenti casi:

(a) $\quad L(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_d) = L(x_1, \ldots, \alpha x_j, \ldots, x_d) \quad$ con $\alpha \neq 0$;

(b) $\quad L(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_d) = L(x_1, \ldots, x_j + \alpha x_k, \ldots, x_d) \quad$ con $k \neq j$;

(c) $\quad L(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_d) = L(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots, x_d)$.

[Suggerimento: usare il Teorema di Fubini.]

Esercizio 73. Si svolga l'Esercizio 72 quando $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ è una mappa lineare invertibile generica. Si usi il fatto che L si può scrivere come composizione di un numero finito di trasformazioni del tipo (a), (b) e (c).

Esercizio 74. Mostrare che la conclusione dell'Esercizio 73 continua a valere se $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ è Lebesgue misurabile.

Più in generale, vale il seguente

Teorema 75. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un diffeomorofismo di classe C^1 e $f : \phi(\Omega) \to [0, +\infty]$ una funzione Lebesgue misurabile. Allora $f \circ \phi : \Omega \to [0, +\infty]$ è Lebesgue misurabile e si ha
$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\phi(\Omega)} \big|\det(D_x\phi)\big| \big(f \circ \phi\big)(x)\,\mathrm{d}x.$$
In particolare, $\phi(E)$ è Lebesgue misurabile se $E \subseteq \Omega$ è Lebesgue misurabile e
$$\mathcal{L}^d\big(\phi(E)\big) = \int_E \big|\det(D_x\phi)\big|\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 76. Siano $([0,1],\mathscr{B}([0,1]),\mathcal{L}^1)$ e $([0,1],\mathscr{B}([0,1]),\nu)$ due spazi di misura, dove ν è la *counting measure*, cioè $\nu(E) =$ numero di punti di E. Sia $D := \{(x,x) : x \in [0,1]\}$.

- Verificare che D appartiene alla σ–algebra prodotto $\mathscr{B}([0,1]) \otimes \mathscr{B}([0,1])$ in $[0,1]\times[0,1]$ e che
$$\int_{[0,1]\times[0,1]} \chi_D(x,y)\,\mathrm{d}(\mathcal{L}^1\times\nu)(x,y) = (\mathcal{L}^1\times\nu)(D) = +\infty.$$
- Verificare che
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_D(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}x = 1, \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_D(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\nu(y) = 0.$$

Perchè il Teorema di Fubini–Tonelli non vale in questo esempio?

Esercizio 77. Si consideri lo spazio di misura $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N})\otimes\mathscr{P}(N), \mu\times\mu)$, dove $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0,+\infty]$ è la counting measure. Sia $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita come $f(m,n) = 1$ se $m = n$, $f(m,n) = -1$ se $m = n+1$, ed $f(m,n) = 0$ altrimenti. Verificare che
$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\,\mathrm{d}\mu(m)\right)\mathrm{d}\mu(n) = 0, \qquad \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\,\mathrm{d}\mu(n)\right)\mathrm{d}\mu(m) = 1.$$

Perchè il Teorema di Fubini–Tonelli non si applica a questo caso?

Esercizio 78. Sia $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio di misura σ–finito e $f : X \to [0,+\infty)$ una funzione misurabile. Sia $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una funzione crescente, di classe C^1 e tale che $\varphi(0) = 0$. Dimostrare che
$$\int_X (\varphi\circ f)(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_0^{+\infty} \mu\left(\{x : f(x) > t\}\right)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

[Suggerimento: applicare il Teorema di Fubini alla funzione $\chi_E(t,x)\varphi'(t)$ con $E := \{(t,x) \in [0,+\infty)\times X : f(x) > t\}$.]

Vogliamo adesso confrontare l'integrale di Riemann con l'integrale di Lebesgue. Ricordiamo la definizione di funzione Riemann–integrabile e di integrale di Riemann. Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato. Una partizione $\mathcal{P}$ di $[a,b]$ è una collezione finita di punti $t_0,\dots,t_k$ tali che $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$. Data una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e una partizione $\mathcal{P}$ di $[a,b]$, definiamo
$$s_{\mathcal{P}} := \sum_{j=0}^{k-1} m_j\,|t_{j+1}-t_j|\,, \qquad S_{\mathcal{P}} := \sum_{j=0}^{k-1} M_j\,|t_{j+1}-t_j|\,,$$
dove $m_j := \inf_{x\in[t_j,t_{j+1}]} f(x)$ e $M_j := \sup_{x\in[t_j,t_{j+1}]} f(x)$. L'integrale inferiore e superiore di f sono definiti rispettivamente come
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \text{ partizione di } [a,b]\}$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \text{ partizione di } [a,b]\}.$$

Diciamo che f è *Riemann–integrabile* se il suo integrale inferiore e superiore coincidono. In tal caso, chiamiamo *integrale di Riemann di* f questo valore comune e lo indicheremo con la notazione provvisoria $\mathcal{R}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, per distinguerlo dall'integrale di Lebesgue di f in $[a,b]$, che continueremo a indicare con $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 79. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata. Data una partizione $\mathcal{P}=\{t_0,t_1,\dots,t_k\}$ di $[a,b]$, poniamo

$$\phi_{\mathcal{P}}(x) := \sum_{j=0}^{k-1} m_j\,\chi_{(t_j,t_{j+1}]}(x), \qquad \psi_{\mathcal{P}}(x) := \sum_{j=0}^{k-1} M_j\,\chi_{(t_j,t_{j+1}]}(x), \qquad x\in[a,b],$$

dove $\quad m_j := \inf_{x\in[t_j,t_{j+1}]} f(x) \quad$ e $\quad M_j := \sup_{x\in[t_j,t_{j+1}]} f(x)$.

- Verificare che se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due partizioni di $[a,b]$ tali che $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{Q}$, allora

  $$\phi_{\mathcal{P}}(x) \leqslant \phi_{\mathcal{Q}}(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_{\mathcal{Q}}(x) \leqslant \psi_{\mathcal{P}}(x) \qquad \text{per ogni } x\in(a,b)$$

  e $\qquad s_{\mathcal{P}} \leqslant s_{\mathcal{Q}} \leqslant S_{\mathcal{Q}} \leqslant S_{\mathcal{P}}$.
- Dedurre che esistono due funzioni Borel–misurabili $h,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ tali che $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ per ogni $x\in(a,b)$ e

  $$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Concludere dimostrando che se f è Riemann–integrabile, allora è integrabile secondo Lebesgue e $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{R}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 80. Dare un esempio di funzione limitata e definita su in intervallo chiuso e limitato che è integrabile secondo Lebesgue ma non secondo Riemann.

Esercizio* 81. Data una funzione limitata $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, definiamo

$$f_*(x) := \lim_{\delta\to 0}\inf_{|y-x|<\delta} f(y), \qquad f^*(x) := \lim_{\delta\to 0}\sup_{|y-x|<\delta} f(y), \qquad x\in[a,b].$$

- Verificare che f_* è semicontinua inferiormente, f^* è semicontinua superiormente e $f_*(x)\leqslant f(x)\leqslant f^*(x)$ in $[a,b]$.
- Verificare che $f_*(x)=f^*(x)$ se e solo se x è un punto di continuità per f.
- Dimostrare che

  $$\int_a^b f_*(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b f^*(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x).$$

[Suggerimento: verificare che $f_*(x)=g(x)$ e $f^*(x)=h(x)$ per quasi ogni $x\in[a,b]$, dove h e g sono due funzioni che verificano la seconda affermazione dell'Esercizio 79.]

Concludere che f è Riemann integrabile se e solo se f è Lebesgue integrabile e l'insieme dei punti di discontinuità di f ha misura di Lebesgue nulla.

Le funzioni f_* e f^* si chiamano, rispettivamente, inviluppo *semicontinuo inferiore* e *superiore* di f. La funzione f_* è la più grande funzione semicontinua inferiormente tra quelle che sono minori o uguali a f in $[a,b]$, mentre f^* è la più piccola funzione semicontinua superiormente tra quelle che sono maggiori o uguali a f in $[a,b]$. La verifica è lasciata per esercizio.

6. Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Esercizio 82. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f_n : X \to [0, +\infty]$ una famiglia di funzioni misurabili tali che $f_n \geqslant f_{n+1}$ su X per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_n f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in X$. Dimostrare che se $f_1 \in L^1(X, \mu)$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Mostrare che il risultato non è in generale vero se si rimuove la condizione che $f_1 \in L^1(X, \mu)$.

Esercizio 83. Sia E un sottinsieme Lebesgue misurabile di $\mathbb{R}$ di misura finita. Si definisca una successione di funzioni f_n ponendo $f_n = \chi_E$ se n è pari e $f_n = 1 - \chi_E$ se n dispari. Si verifichi che per questa successione la disuguaglianza nel Lemma di Fatou può essere effettivamente stretta.

Esercizio 84. Dimostrare che nel Teorema della Convergenza Monotona la condizione $f_n \geqslant 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ può essere sostituita da $f_n \geqslant g$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $g \in L^1(X, \mu)$.

Esercizio 85 (Fatou per limsup)**.** Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e siano $f_n, g : X \to [-\infty, +\infty]$ funzioni misurabili tali che $f_n(x) \leqslant g(x)$ per μ–q.o. $x \in X$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che se $g \in L^1(X, \mu)$, allora

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X \limsup_{n\to+\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Mostrare che il risultato non è in generale vero se si rimuove la condizione che $g \in L^1(X, \mu)$.

Esercizio 86. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $(f_n)_n$ una successione di funzioni in $L^1(X, \mu)$ tali che $f_n \to f$ uniformemente in X.

(a) Mostrare che $f \in L^1(X, \mu)$ e $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ se $\mu(X) < +\infty$.

(b) Mostrare che la conclusione di (a) non è più vera in generale se $\mu(X) = +\infty$.

Esercizio 87 (Teorema della Convergenza Dominata generalizzato)**.** Siano $f_n, g_n, f, g \in L^1(X, \mu)$ tali che

$$f_n(x) \to f(x), \qquad g_n(x) \to g(x) \qquad \text{e} \qquad |f_n(x)| \leqslant g_n(x) \qquad \text{per } \mu\text{–q.o. } x \in X.$$

Dimostrare che se $\lim_n \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu$, allora $\lim_n \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$.

[Suggerimento: rivisitare la dimostrazione del Teorema della Convergenza Dominata.]

Esercizio 88. Siano $f_n, f \in L^1(X, \mu)$ tali che $f_n(x) \to f(x)$ per μ–q.o. $x \in X$. Dimostrare che $\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$ se e solo se $\int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu \to \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$.

[Suggerimento: sfruttare il Teorema della Convergenza Dominata generalizzato.]

Esercizio 89. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e siano $(E_n)_n \subset \mathcal{M}$ tali che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) < +\infty.$$

Dimostrare che μ–q.o. $x \in X$ appartiene ad un numero finito di insiemi E_n.

Esercizio 90. Sia $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ e μ la counting measure su $\mathbb{N}$. Reinterpretare il Lemma di Fatou e i Teoremi della convergenzae monotona e dominata in termini di risultati sulle serie.

Esercizio 91. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f : X \to [0, +\infty]$ una funzione integrabile. Definiamo $\nu(E) := \int_E f(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$ per ogni $E \in \mathcal{M}$.

(a) Verificare che ν è una misura;

(b) Dimostrare che ν è assolutamente continua rispetto a μ.

(c) Verificare che per ogni $g : X \to [0, +\infty]$ misurabile si ha

$$\int_X g(x)\, \mathrm{d}\nu(x) = \int_X g(x) f(x)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

[Suggerimento: considerare prima il caso g funzione semplice.]

Esercizio 92. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\, \mathrm{d}x, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \frac{1}{1+nx}\, \mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right) \mathrm{e}^{x/2}\, \mathrm{d}x \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \mathrm{e}^{-2x}\, \mathrm{d}x$$

7. Spazi L^p

In questa sezione, se non diversamente indicato, consideriamo un generico spazio di misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Indicheremo con $L^p(X; \mathbb{C})$ e $L^p(X)$ lo spazio delle funzioni misurabili f da X a $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$, rispettivamente, e tali che $\displaystyle\int_X |f|^p\, \mathrm{d}\mu < +\infty$. Scriveremo $\|\cdot\|_p$ al posto di $\|\cdot\|_{L^p(X)}$.

Esercizio 93. Verificare che la seguente formula

$$< f, g > := \int_X f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}\mu(x) \qquad \text{per ogni } f, g \in L^2(X)$$

definisce un prodotto scalare complesso su $L^2(X)$.

Esercizio 94. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ munito della misura di Lebesgue e $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

- Mostrare che l'identità del parallelogramma

$$\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2\left(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2\right) \qquad \text{per ogni } f, g \in L^p(\Omega)$$

vale se e solo $p = 2$.

- Dedurre che $L^p(\Omega)$ è di Hilbert se e solo se $p = 2$.

Esercizio 95. Sia $(\alpha_n)_n$ una successione di numeri reali positivi e consideriamo lo spazio di misura $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$ dove $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ è la misura definita come

$$\mu(E) = \sum_{n \in E} \alpha_n \qquad \text{per ogni } E \in \mathscr{P}(\mathbb{N}).$$

Siano $1 \leqslant p < +\infty$ ed $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\int_{\mathbb{N}} |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \, |f(n)|^p \qquad \text{per ogni } 1 \leqslant p < +\infty.$$

Esercizio 96 (Disuguaglianza di Chebyshev)**.** Sia f una funzione misurabile su X. Dimostrare che per ogni $p > 0$ e per ogni $a > 0$ si ha

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > a\}\right) \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{a}\right)^p.$$

Esercizio 97. Siano f ed $(f_n)_n$ funzioni in $L^p(X)$ con $1 \leqslant p < +\infty$ tali che

(a) $f_n(x) \to f(x)$ per μ–q.o. $x \in X$;

(b) esiste una funzione $g \in L^p(X)$ tale che $\quad |f_n(x)| \leqslant g(x)$ per μ–q.o. $x \in X$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrare che $f_n \to f$ in $L^p(X)$.

Si ricorda il seguente risultato dimostrato a lezione:

Teorema 98. Sia $f_n \to f$ in $L^1(X)$. Allora esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ ed una funzione $g \in L^1(X)$ tali che

(i) $\lim_k f_{n_k}(x) = f(x) \quad$ per μ–q.o. $x \in X$;

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leqslant g(x) \quad$ per μ–q.o. $x \in X$, per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Il seguente esercizio può essere letto come una generalizzazione del Teorema 98 agli spazi L^p.

Esercizio 99. Sia $f_n \to f$ in $L^p(X)$ per $1 \leqslant p < +\infty$. Dimostrare che esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ ed una funzione $g \in L^p(X)$ tali che

(i) $\lim_k f_{n_k}(x) = f(x) \quad$ per μ–q.o. $x \in X$;

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leqslant g(x) \quad$ per μ–q.o. $x \in X$, per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Esercizio 100. Si consideri la successioni di funzioni $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definite come

$$f_n := \chi_{[\frac{n-2^j}{2^j}, \frac{n-2^j+1}{2^j}]} \qquad \text{per } 2^j \leqslant n < 2^{j+1}, \text{ per ogni } j = 0, 1, 2, \ldots,$$

esplicitamente $f_1 = \chi_{[0,1]}$, $f_2 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$, $f_3 = \chi_{[\frac{1}{2},1]}$, $f_4 = \chi_{[0,\frac{1}{4}]}$, $f_5 = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}$, etc. Verificare che $f_n \to 0$ in $L^p([0,1])$ per ogni $1 \leqslant p < +\infty$, ma che $f_n(x)$ non ha limite, quale che sia $x \in [0,1]$.

Esercizio 101. Sia $(f_n)_n$ una successione limitata in $L^2(X)$. Dimostrare che

$$\frac{f_n(x)}{n} \to 0 \quad \text{per } \mu\text{–q.o. } x \in X.$$

Esercizio 102. Sia $1 \leqslant p < +\infty$. Dimostrare che per ogni $a, b \geqslant 0$ si ha

$$|a+b|^p \leqslant 2^{p-1}\left(|a|^p + |b|^p\right).$$

[Suggerimento: usare la convessità della funzione $\varphi(t) = t^p$ per $t \geqslant 0$.]

Esercizio 103.

- Siano $f, g \in L^p(X)$ con $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Provare che $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ appartiene a $L^p(X)$.
- Siano $(f_n)_n$ e $(g_n)_n$ due successioni in $L^p(X)$ con $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ tali che $f_n \to f$ e $g_n \to g$ in $L^p(X)$. Verificare che $\max\{f_n, g_n\} =: h_n \to h := \max\{f, g\}$ in $L^p(X)$.
- Sia $(f_n)_n$ una successione in $L^p(X)$ con $1 \leqslant p < +\infty$ e sia $(g_n)_n$ una successione limitata in $L^\infty(X)$. Supponiamo che $f_n \to f$ in $L^p(X)$ e che $g_n(x) \to g(x)$ per μ–q.o. $x \in X$. Dimostrare che $f_n g_n \to fg$ in $L^p(X)$.

[Suggerimento: osservare che $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\left(|f-g| + f + g\right)$.]

Sia E sia uno spazio metrico e indichiamo con d la distanza su E. Diremo che una successione $(x_n)_n$ in E converge ad un elemento $x \in E$ se $\lim_n d(x_n, x) = 0$. Diremo che una successione $(x_n)_n$ converge in E se converge ad un elemento $x \in E$. Il risultato contenuto nel prossimo esercizio è di estrema utilità per le applicazioni, ad esempio, agli spazi L^p.

Esercizio 104. Sia (E, d) uno spazio metrico. Dimostrare che una successione $(x_n)_n$ converge ad un elemento $x \in E$ se e solo se ogni sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ ammette un'estratta che converge a x.

Esercizio 105. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $|\varphi(t)| \leqslant |t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per ogni $f : X \to \mathbb{R}$ misurabile, indicheremo con $\varphi \circ f$ la funzione definita come $(\varphi \circ f)(x) := \varphi(f(x))$ per ogni $x \in X$. Sia $1 \leqslant p < +\infty$. Dimostrare che

- $\varphi \circ f \in L^p(X)$ per ogni $f \in L^p(X)$;
- se $f_n \to f$ in $L^p(X)$, allora $\varphi \circ f_n \to \varphi \circ f$ in $L^p(X)$.

[Suggerimento: usare gli esercizi 104 e 99.]

Esercizio 106. Siano f_1, f_2 funzioni tali che $f_i \in L^{p_i}(X)$ con $1 \leqslant p_i \leqslant +\infty$ e $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leqslant 1$. Provare che $f(x) := f_1(x) f_2(x)$ appartiene a $L^p(X)$ con $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ e che

$$\|f\|_p \leqslant \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}.$$

Esercizio 107. Siano $1 \leqslant p < +\infty$ e $1 \leqslant q \leqslant +\infty$.

- Dimostrare che $L^1(X) \cap L^\infty(X)$ è un sottoinsieme denso di $L^p(X)$.
- Provare che l'insieme $\{f \in L^p(X) \cap L^q(X) \,:\, \|f\|_q \leqslant 1\}$ è chiuso in $L^p(X)$.
- Sia $(f_n)_n$ una successione in $L^p(X) \cap L^q(X)$ e sia $f \in L^p(X)$. Supponiamo che $f_n \to f$ in $L^p(X)$ e che $\sup_n \|f_n\|_q < +\infty$. Dimostrare che $f \in L^r(X)$ e che $f_n \to f$ in $L^r(X)$ per ogni r tra p e q, $r \neq q$.

Esercizio 108. Sia $\mu(X) < +\infty$.

- Sia $f \in L^\infty(X)$. Dimostrare che $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
- Sia $f \in \bigcap\limits_{1\leqslant p<+\infty} L^p(X)$ e assumiamo che esista una costante C tale che
$$\|f\|_p \leqslant C \quad \text{per ogni } 1 \leqslant p < +\infty.$$
Provare che $f \in L^\infty(X)$ e $\|f\|_\infty \leqslant C$.
- Costruire un esempio di funzione $f \in \cap_{1\leqslant p<+\infty} L^p(X)$ e tale che $f \notin L^\infty(X)$ nel caso in cui $X = (0,1)$ munito della misura di Lebesgue.

Esercizio 109. Si consideri il seguente spazio di funzioni:

$$\mathcal{F} := \left\{ u \in L^\infty(\mathbb{R}) \,:\, u = 0 \text{ q.o. fuori da un compatto} \quad \text{e} \quad \textstyle\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

- Dimostrare che $\mathcal{F}$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $1 < p < +\infty$.

  [Suggerimento: mostrare che ogni $u \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R})$ con $\int_R u\,\mathrm{d}x > 0$ si può approssimare in norma L^p con funzioni del tipo $u_\varepsilon := u - \varepsilon\chi_{I_\varepsilon}$ con I_ε intervallo limitato scelto in modo tale che $u_\varepsilon \in \mathcal{F}$.]

- Dimostrare che $\mathcal{F}$ non è denso in $L^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 110. Si consideri la seguente famiglia di funzioni:

$$\mathcal{F} := \left\{ \sum_{k=1}^m a_k\, \chi_{J_k}(x) \,:\, a_k \in \mathbb{R},\ J_k \text{ intervallo chiuso in } \mathbb{R} \text{ per ogni } k,\, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Verificare che $\mathcal{F}$ è un sottospazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e che è denso in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $1 \leqslant p < +\infty$.

Esercizio 111. Sia $g : X \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e C una costante positiva tale che

$$\left| \int_X f g\,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant C\|f\|_\infty \qquad \text{per ogni } f \in L^\infty(X).$$

Dimostrare che $g \in L^1(X)$ con $\|g\|_1 \leqslant C$.

Esercizio* 112. Sia $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio di misura σ–finito. Sia $g : X \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e C una costante positiva tale che

$$\left|\int_X fg\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant C\|f\|_1 \qquad \text{per ogni } f \in L^1(X).$$

Dimostrare che $g \in L^\infty(X)$ con $\|g\|_\infty \leqslant C$.

Esercizio* 113. Sia $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio di misura σ–finito e $1 < p < +\infty$. Sia $g : X \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e C una costante positiva tale che

$$\left|\int_X fg\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant C\|f\|_q \qquad \text{per ogni } f \in L^q(X),$$

dove q è l'esponente coniugato a p. Dimostrare che $g \in L^p(X)$ con $\|g\|_p \leqslant C$.

Esercizio 114 (Lemma di Paley-Zigmund)**.** Sia $f \in L^2([0,1])$ tale che $\|f\|_2 = 1$ e $\int_0^1 f\,\mathrm{d}x \geqslant \alpha > 0$. Dimostrare che per ogni $0 < \beta < \alpha$ si ha

$$\mathcal{L}^1\big(\{x \in [0,1] \,:\, f(x) \geqslant \beta\}\big) \geqslant (\beta-\alpha)^2.$$

Esercizio 115. Dimostrare che ℓ^p è separabile per $1 \leqslant p < +\infty$. Dimostrare che ℓ^∞ non è separabile.

Esercizio 116. Sia g_n una successione di funzioni misurabili $g_n : X \to [0,+\infty]$ convergerti μ–q.o. ad una funzione $g \in L^1(X,\mu)$ e tali che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X g_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Dimostrare che $g_n \to g$ in $L^1(X,\mu)$.

[Suggerimento: si usi che $|g_n(x) - g(x)| = 2(g(x) - g_n(x))\chi_{\{0\leqslant g_n\leqslant g\}} + (g_n(x) - g(x))$.]

Esercizio 117. Sia $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio di misura finito e $f \in L^1(X,\mu)$. Dimostrare che

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists E_\varepsilon \in \mathcal{M} \quad \text{tale che} \quad \mu(E_\varepsilon) < +\infty \quad \text{e} \quad \int_{X\setminus E_\varepsilon} |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Esercizio* 118. Sia $(X,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio di misura finito e sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni misurabili. Dimostrare che

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists M_\varepsilon > 0 \quad \text{tale che} \quad \int_{\{x\,:\,|f_n(x)|>M_\varepsilon\}} |f_n|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

se e solo se $\sup_n \int_X |f_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$ e

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta_\varepsilon > 0 \quad \text{tale che} \quad \mu(E) < \delta_\varepsilon \implies \int_E |f_n|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

L'ultima condizione nell'esercizio precedente prende il nome di *equi–assoluta integrabilità* delle funzioni $|f_n|$. Si ricorda che una funzione integrabile è assolutamente integrabile.

Esercizio* 119 (Teorema di Vitali)**.** Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura finito e sia $1 \leqslant p < +\infty$. Sia $(f_n)_n$ una successione in $L^p(X,\mu)$ tale che f_n converge μ–quasi ovunque ad una funzione misurabile $f : X \to \mathbb{R}$. Dimostrare che $f_n \to f$ in $L^p(X,\mu)$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{tale che} \quad \mu(E) < \delta_\varepsilon \implies \int_E |f_n|^p \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

[Suggerimento: si usi il Teorema di Egoroff per una delle due implicazioni.]

Esercizio* 120. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura finito e sia $1 \leqslant p < +\infty$. Sia $(f_n)_n$ una successione in $L^p(X,\mu)$ tale che f_n converge μ–quasi ovunque ad una funzione $f \in L^p(X,\mu)$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu.$$

Dimostrare che $f_n \to f$ in $L^p(X,\mu)$.

[Suggerimento: si usi l'esercizio 116 con $g_n = |f_n|^p$ e l'esercizio 119.]

Esercizio 121 (Teorema di Vitali bis)**.** Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $1 \leqslant p < +\infty$. Sia $(f_n)_n$ una successione in $L^p(X,\mu)$ tale che f_n converge μ–quasi ovunque ad una funzione misurabile $f : X \to \mathbb{R}$. Dimostrare che $f_n \to f$ in $L^p(X,\mu)$ se e solo se le funzioni $|f_n|^p$ sono equi–assolutamente integrabili e

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists E_\varepsilon \in \mathcal{M} \quad \text{such that} \quad \mu(E_\varepsilon) < +\infty \quad \text{e} \quad \int_{X\setminus E_\varepsilon} |f_n|^p \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

8. Spazi vettoriali normati e loro duale

In questa sezione, se non diversamente specificato, E indicherà uno spazio vettoriale reale normato ed E' lo spazio vettoriale reale dei funzionali lineari e continui da E in $\mathbb{R}$. Per ogni $T \in E'$, definiamo

$$\|T\|_{E'} := \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} |T(x)|.$$

Esercizio 122. Sia $x_n \to x$ in E. Verificare che $\quad \|x_n\| \to \|x\|$.

Esercizio 123. Verificare i fatti seguenti:

- $\displaystyle \|T\|_{E'} = \sup_{\|x\|\leq 1} T(x) = \sup_{\|x\|=1} |T(x)| = \sup_{x\neq 0} \frac{|T(x)|}{\|x\|}$;
- $\|T\|_{E'}$ è la più piccola costante $C \geqslant 0$ tale che
$$|T(x)| \leqslant C\|x\| \quad \text{per ogni } x \in E.$$

Esercizio 124. Dimostrare che $\|\cdot\|_{E'}$ è una norma su E'.

Esercizio 125. Dimostrare che E' dotato della norma $\|\cdot\|_{E'}$ è uno spazio di Banach (anche se E non è completo).

Due norme $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ su uno spazio vettoriale reale E si dicono *equivalenti* se esistono costanti reali α, $\beta > 0$ tali che

$$\alpha\|x\|_a \leqslant \|x\|_b \leqslant \beta\|x\|_a \qquad \text{per ogni } x \in E.$$

Esercizio 126. Su $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, consideriamo la norma

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_d| \qquad \text{per } x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrare che la palla unitaria $\quad B := \{x \in \mathbb{R}^d \,:\, \|x\|_1 \leqslant 1\,\} \quad$ è compatta.

Esercizio 127. Su $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, consideriamo la norma

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_d| \qquad \text{per } x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Sia $\|\cdot\|$ un'altra norma su $\mathbb{R}^d$.

(a) Dimostrare che esiste una costante $\beta > 0$ tale che

$$\|x\| \leqslant \beta\|x\|_1 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^d.$$

In particolare, $x \mapsto \|x\|$ è continua in $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$.

(b) Dimostrare che esiste una costante $\alpha > 0$ tale che

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\| \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^d.$$

(c) Concludere che tutte le norme sono equivalenti in $\mathbb{R}^d$.

Esercizio 128. Sia E uno spazio vettoriale reale di dimensione d finita e sia $\|\cdot\|_E$ una norma su E.

(a) Dimostrare che esiste una norma $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^d$ ed una applicazione lineare bigettiva $T : \mathbb{R}^d \to E$ tale che $\|T(x)\|_E = \|x\|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$.([1])

(b) Dedurre che tutte le norme su E sono equivalenti.

Esercizio 129. Sia E uno spazio vettoriale reale normato ed F un sottospazio di E di dimensione finita. Dimostrare che F è chiuso in E.

[Suggerimento: sfruttare l'esercizio 128.]

Esercizio 130. Siano E, F due spazi di Banach e sia $T : E \to F$ una isometria, cioè una mappa lineare tale che $\|Tx\|_F = \|x\|_E$ per ogni $x \in E$. Dimostrare che $T(E)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di F.

Esercizio 131. Sia E uno spazio vettoriale reale normato e sia V un suo sottospazio vettoriale chiuso. Sia $z_0 \notin V$ e poniamo

$$F := V + \mathbb{R}z_0 = \{x + tz_0 \,:\, x \in V,\ t \in \mathbb{R}\,\}.$$

Vogliamo dimostrare che F è chiuso in E.

(a) Sia $(x_n)_n$ e $(t_n)_n$ successioni in V ed $\mathbb{R}$, rispettivamente, tali che $x_n + t_n z_0 \to y$ in E. Dimostrare che $(t_n)_n$ è limitata.

[1] Una tale mappa T si chiama *isomorfismo isometrico.*

(b) Dedurre che $y \in F$.

Esercizio 132. Sia E uno spazio vettoriale reale e normato di dimensione finita. Dimostrare che ogni funzionale lineare $L : E \to \mathbb{R}$ è continuo.

Esercizio 133. Sia E uno spazio vettoriale reale e normato di dimensione finita. Dimostrare che anche E' ha dimensione finita e $\dim(E') = \dim(E)$.

Esercizio 134. Sia E uno spazio vettoriale reale e normato tale che E' ha dimensione finita. Dimostrare che allora anche E ha dimensione finita e $\dim(E) = \dim(E')$.

Sia E uno spazio vettoriale reale. Sia $(e_i)_{i\in I}$ una collezione (finita o infinita) di elementi di E. Diremo che gli $(e_i)_{i\in I}$ sono *linearmente indipendenti* se l'unica combinazione lineare *finita* degli e_i che è zero è quella banale, i.e.

$$\sum_{i\in J} x_i\, e_i = 0 \quad \text{con } J \subset I,\ J \text{ finito} \qquad \text{se e solo se} \qquad x_i = 0 \quad \text{per ogni } i \in J.$$

Una *base algebrica* (o *di Hamel*) per E è una collezione $(e_i)_{i\in I}$ di elementi di E linearmente indipendenti tale che ogni $x \in E$ può essere scritto (in maniera necessariamente unica) come

$$x = \sum_{i\in J} x_i\, e_i, \qquad \text{con } J \subset I, \quad J \text{ finito}.$$

Esercizio 135. Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale reale normato.

- Usando il Lemma di Zorn, dimostrare che E possiede una base algebrica $(e_i)_{i\in I}$ con $\|e_i\| = 1$ per ogni $i \in I$.
- Supponiamo che E sia di Banach. Dimostrare che allora I è finito oppure è non numerabile.

  [Suggerimento: usare il Teorema di Baire.]

Esercizio 136. Sia $E := \{x = (x_n)_n \in \ell^\infty : x_n \neq 0 \text{ solo per un numero finito di indici}\}$ dotato della norma $\|x\| := \sup_n |x_n|$. Sia $T : E \to \mathbb{R}$ il funzionale definito come

$$T(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x_n.$$

Verificare che T è lineare ma non è continuo.

Esercizio 137. Dare un esempio di uno spazio vettoriale normato E e di un funzionale $T \in E'$ tale che il sup nella definizione di $\|T\|_{E'}$ non è atteso, o, equivalentemente, che

$$|T(x)| < \|T\|_{E'} \qquad \text{per ogni } \|x\| = 1.$$

Esercizio 138. Sia $(T_n)_n$ una successione limitata in E', i.e. tale che $C := \sup_n \|T_n\|_{E'} < +\infty$. Supponiamo che esista $T \in E'$ ed un insieme D denso in E tale che la successione $T_n(x) \to T(x)$ per ogni $x \in D$.

- Dimostrare che $T_n(x) \to T(x)$ per ogni $x \in E$.
- Verificare che $\|T\|_{E'} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|_{E'}$.

Esercizio 139. Sia $(T_n)_n$ una successione limitata in E', i.e. tale che $C := \sup_n \|T_n\|_{E'}$ sia finito. Supponiamo che esista un insieme D denso in E tale che la successione $(T_n(x))_n$ converga in $\mathbb{R}$ per ogni $x \in D$. Dimostrare che esiste $T \in E'$ tale che $T_n(x) \to T(x)$ per ogni $x \in E$.

Esercizio 140. Sia $E := \{u \in C([0,1]) : u(0) = 0\}$ dotato della norma usuale $\|u\| := \max_{x\in[0,1]} |u(x)|$. Sia $T : E \to \mathbb{R}$ il funzionale definito come

$$T(u) := \int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Verificare che $T \in E'$ e calcolare $\|T\|_{E'}$.
- Dire se esiste un elemento $u \in E$ tale che $\|u\| = 1$ e $T(u) = \|T\|_{E'}$.
- Dire se E è uno spazio di Banach.

Esercizio 141. Sia $E := \{x = (x_n)_n \in \ell^\infty : \lim_n x_n = 0\}$ dotato della norma $\|x\| := \sup_n |x_n|$. Sia $T : E \to \mathbb{R}$ il funzionale definito come

$$T(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x_n.$$

- Verificare che $T \in E'$ e calcolare $\|T\|_{E'}$.
- Dire se esiste un elemento $x \in E$ tale che $\|x\|_\infty = 1$ e $T(x) = \|T\|_{E'}$.
- Dire se E è uno spazio di Banach.

9. Misure con segno

Esercizio 142. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile, i.e. $f \in L^1(X,\mu)$. Definiamo $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ come

$$\nu(E) := \int_E f\,\mathrm{d}\mu, \qquad E \in \mathcal{M}.$$

(i) Dimostrare che ν è una misura con segno.

(ii) Caratterizzare gli insiemi positivi, negativi e nulli in termini di f.

(iii) Verificare che la decomposizione di Jordan della misura ν come differenza di due misure positive, i.e. $\nu = \nu^+ - \nu^-$, è data da

$$\nu^+(E) := \int_E f^+\,\mathrm{d}\mu, \qquad \nu^-(E) := \int_E f^-\,\mathrm{d}\mu, \qquad E \in \mathcal{M},$$

dove f^+ e f^- sono la rispettivamente la parte positiva e negativa della funzione f.

(iv) Verificare che la variazione totale ν della misura ν è data da

$$|\nu|(E) = \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu, \qquad E \in \mathcal{M}.$$

Esercizio 143. Verificare che l'enunciato dell'esercizio precedente continua a valere nel caso in cui $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sia misurabile e f^- sia integrabile.

Esercizio 144. Sia ν una misura con segno su uno spazio misurabile $(X, \mathcal{M})$. Verificare che $E \in \mathcal{M}$ è un insieme nullo per ν se e solo se $|\nu|(E) = 0$.

Esercizio 145. Siano μ una misura positiva e ν una misura con segno su uno spazio misurabile $(X, \mathcal{M})$. Verificare che i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) $\nu \ll \mu$;

(ii) $\nu^+ \ll \mu, \ \nu^- \ll \mu$;

(iii) $|\nu| \ll \mu$.

Esercizio 146. Sia ν una misura con segno su $(X, \mathcal{M})$. Sia $E \in \mathcal{M}$. Provare che

$$|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| \ : \ E_1, \dots, E_n \text{ insiemi disgiunti in } \mathcal{M}, \ E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k, \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Due misure positive μ e ν su $(X, \mathcal{M})$ si dicono *equivalenti* se $\mu \ll \nu$ e $\nu \ll \mu$.

Esercizio 147. Siano μ e ν due misure positive e finite su $(X, \mathcal{M})$. Dimostrare che μ e ν sono equivalenti se e solo se esiste una funzione misurabile $f : X \to \mathbb{R}$, integrabile rispetto a μ e con $f(x) > 0$ per μ–q.o. $x \in X$, tale che $\mathrm{d}\nu = f \mathrm{d}\mu$.

Esercizio 148. Sia ν una misura con segno σ–finita su $(X, \mathcal{M})$ e indichiamo con $|\nu|$ la sua variazione totale. Dimostrare che esiste una funzione misurabile $f : X \to \mathbb{R}$ con $|f(x)| = 1$ per ν–q.o. $x \in X$ tale che $\mathrm{d}\nu = f \mathrm{d}|\nu|$.

Sia ν una misura con segno su $(X, \mathcal{M})$ e sia $\nu = \nu^+ - \nu^-$ la decomposizione di Jordan di ν. Data una funzione misurabile $f : X \to [0, +\infty]$, l'integrale di f rispetto a ν è definito come

$$\int_X f \, \mathrm{d}\nu := \int_X f \, \mathrm{d}\nu^+ - \int_X f \, \mathrm{d}\nu^-.$$

Esercizio 149. Siano μ e ν misure σ–finite su $(X, \mathcal{M})$, con μ misura positiva e ν misura con segno, tali che $\nu \ll \mu$. Verificare che per ogni funzione misurabile $f : X \to [0, +\infty]$ si ha

$$\int_X f(x) \, \mathrm{d}\nu(x) = \int_X f(x) \ \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(x) \ \mathrm{d}\mu(x).$$

Esercizio 150. Siano ρ, ν, μ misure positive e σ–finite su $(X, \mathcal{M})$ tali che $\rho \ll \nu$ e $\nu \ll \mu$. Dimostrare che $\rho \ll \mu$ e

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\nu}\,\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \qquad \mu\text{–q.o. in } X.$$

Esercizio 151. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ–finito ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione in $L^1(X, \mu)$. Sia $\mathcal{N}$ una σ–algebra contenuta in $\mathcal{M}$. Indichiamo con $\tilde{\mu}$ la restrizione di μ a $\mathcal{N}$ e definiamo una misura con segno $\nu : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ come

$$\nu(E) := \int_E f \,\mathrm{d}\mu, \qquad E \in \mathcal{N}.$$

(i) Provare che $\nu \ll \tilde{\mu}$.

(ii) Detta $g := \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\tilde{\mu}$ la derivata di Radon–Nykodim di ν rispetto a $\tilde{\mu}$, verificare che $g : X \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{N}$–misurabile e

$$\int_E g \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{per ogni } E \in \mathcal{N}.$$

La funzione g prende il nome di *media condizionata* di f rispetto a $\mathcal{N}$ e si scrive $g = \mathbb{E}[f \mid \mathcal{N}]$.

Esercizio 152 (Jacobiano astratto)**.** Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ due spazi di misura, con $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ–finito, e $\phi : X \to Y$ una funzione misurabile, i.e. $\phi^{-1}(F) \in \mathcal{M}$ per ogni $F \in \mathcal{N}$. Indichiamo con $\phi_*\mu$ il push–forward della misura μ tramite ϕ. Supponiamo che valgano i seguenti fatti:

(h1) $\phi_*\mu \ll \nu$;

(h2) $(Y, \mathcal{N}, \phi_*\mu)$ è uno spazio di misura σ–finito.

Verificare le seguenti proprietà:

- esiste una funzione misurabile $J_\phi : (Y, \mathcal{N}) \to [0, +\infty]$ tale che

  $$\int_X g\circ\phi(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y g(y)\, J_\phi(y) \,\mathrm{d}\nu(y)$$

  per ogni funzione misurabile $f : (X, \mathcal{M}) \to [0, +\infty]$.

- $$J_\phi(y) = \frac{\mathrm{d}(\phi_*\mu)}{\mathrm{d}\nu}(y) \qquad \text{per } \nu\text{–q.o. } y \in Y.$$

La funzione J_ϕ è detta *Jacobiano astratto.*

Esercizio 153. Verificare che la condizione (h2) dell'Esercizio 152 è soddisfatta se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ è σ–finito e ϕ è iniettiva.

10. Spazi di Hilbert

In questa sezione, se non diversamente specificato, indicheremo con H uno spazio di Hilbert reale.

Esercizio 154. Sia L un funzionale lineare e continuo su uno spazio di Hilbert H e sia $M := \{x \in H \,:\, L(x) = 0\}$. Dimostrare che $M^\perp$ è uno spazio vettoriale di dimensione 1 (purché $M \neq H$).

Esercizio 155. Siano M, N sottospazi vettoriali di uno spazio di Hilbert H. Verificare le seguenti proprietà:

- $M^{\perp\perp} = \overline{M}$;
- $(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$;
- Se M ed N sono chiusi, allora $(M \cap N)^\perp = \overline{M^\perp + N^\perp}$.

Esercizio 156. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $h : X \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile. Sia

$$K := \left\{ u \in L^2(X) \,:\, |u(x)| \leqslant h(x) \quad \text{per } \mu\text{–q.o. } x \in X \right\}.$$

- Dimostrare che K è un sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto di $L^2(X)$.
- Scrivere esplicitamente l'operatore di proiezione $P_K : H \to K$.

Esercizio 157. Sia $\{e_\alpha \,:\, \alpha \in A\}$ una base ortonormale di uno spazio di Hilber H. Sia $x \in H$ di norma unitaria e sia $k \in \mathbb{N}$. Dimostrare che l'insieme $\{\alpha \in A \,:\, |\langle x, e_\alpha \rangle| \geqslant 1/k\}$ ha al massimo k^2 elementi.

Esercizio 158. Sia $L : H_1 \to H_2$ un operatore lineare tra spazi di Hilbert reali. Dimostrare che L è una isometria se e solo se $\quad \langle Lx, Ly \rangle_{H_2} = \langle x, y \rangle_{H_1} \quad$ per ogni $x, y \in H_1$.

Esercizio 159. Mostrare che la palla unitaria chiusa di ℓ^2 non è compatta in ℓ^2.

Esercizio 160. Mostrare che il *cubo di Hilbert*

$$Q := \left\{ (x_n)_n \in \ell^2 \,:\, |x_n| \leqslant 1/n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \right\}$$

è un insieme compatto in ℓ^2.

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale reale normato. Una funzione $F : E \to R$ si dice *Fréchet differenziabile* in un punto $x \in E$ se esiste $L \in E'$ tale che

$$\lim_{h \to 0} \frac{|F(x+h) - F(x) - Lh|}{\|h\|} = 0.$$

Si vede facilmente che un tale L, se esiste, è unico. Esso è detto *derivata secondo Fréchet* e lo si indica con il simbolo $DF(x)$ o $F'(x)$. Se U è un insieme aperto di E, diremo che F è di classe C^1 in U se è Fréchet differenziabile in ogni punto di U e se la mappa $U \ni x \mapsto DF(x) \in E'$ è continua.

Nel caso $E = H$ spazio di Hilbert reale, in base al teorema di rappresentazione di Riesz–Fréchet, sappiamo che ogni funzionale lineare e continuo su H si può rappresentare come prodotto scalare per un opportuno elemento di H. In particolare, se F è differenziabile secondo Fréchet in un punto $x \in H$, esiste un unico elemento $\nabla F(x) \in H$ tale che

$$DF(x)h = \langle \nabla F(x), h \rangle \qquad \text{per ogni } h \in H.$$

Il vettore $\nabla F(x)$ è detto *gradiente di* F nel punto $x \in H$.

Esercizio 161. Sia $F : H \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e di classe C^1. Sia K un convesso non vuoto di H e sia $u \in H$. Dimostrare l'equivalenza tra le seguenti due affermazioni:

(a) $\quad F(u) \leqslant F(v) \quad$ per ogni $v \in K$;

(b) $\quad \langle \nabla F(u), v - u \rangle \geqslant 0 \quad$ per ogni $v \in K$.

[Suggerimento: mimare quanto fatto a lezione per il caso $F(v) = \|v\|^2$.]