Equazioni Differenziali Nonlineari

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Programma a.a. 2012/2013

1. **Equazione di Laplace e di Poisson** (12 ore)
    - Funzioni armoniche: formule del valor medio; principi di massimo e di massimo forte; regolarità C^∞; stabilità; stime locali e analiticità (senza dimostrazione); Teorema di Liouville; disuguaglianze di Harnack. Unicità di soluzioni all'equazione di Poisson.
    - Esistenza di soluzioni all'equazione di Poisson: soluzioni fondamentali; formula esplicita per soluzioni in $\mathbb{R}^N$; formula risolutiva per soluzioni in aperti con condizioni di Dirichlet al bordo e funzioni di Green. Calcolo esplicito della funzione di Green in alcuni casi particolari (palla; semi–spazio).
    - Esistenza di soluzioni all'equazione di Laplace: metodo di Perron delle funzioni subarmoniche. Continuità al bordo della soluzione: nozione di barriera (debole) e di barriera locale; condizione necessaria e sufficiente per la regolarità dei punti del bordo; condizioni geometriche sul bordo: condizione della sfera esterna; condizione del cono esterno.
2. **Calcolo delle Variazioni** (16 ore)
    - Variazione prima ed equazione di Eulero–Lagrange; variazione seconda.
    - Esistenza di minimizzanti: il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni, coercività, semicontinuità inferiore. Condizioni sufficienti per la semicontinuità inferiore. Minimi del funzionale di energia e soluzioni deboli dell'equazione di Eulero–Lagrange.
    - Regolarità delle soluzioni deboli dell'equazione di Eulero–Lagrange.
    - Cenni di analisi convessa: principali proprietà delle funzioni convesse; sottogradiente di funzioni convesse. Applicazione al caso di funzionali convessi: minimi vs. soluzioni dell'equazione di Eulero–Lagrange.
    - Minimi vincolati e moltiplicatori di Lagrange; problemi con ostacolo.
3. **Teoria delle soluzioni di viscosità** (20 ore)
    - Definizione di soluzione di viscosità. Motivazione del nome: cenni al metodo della viscosità evanescente. Proprietà delle sotto e sopratangenti. Stabilità della nozione di soluzione di viscosità per convergenza uniforme.
    - Equazioni di Hamilton–Jacobi del primo ordine. Coercività nella variabile gradiente e Lipschitzianità delle sottosoluzioni. Principi di confronto per sotto e soprasoluzioni in domini illimitati e limitati sotto varie ipotesi sull'Hamiltoniana: inf e sup convoluzione; metodo del raddoppiamento di variabili. Stabilità della nozione di sottosoluzione rispetto al sup. Esistenza di soluzioni tramite metodo di Perron.
    - Hamiltoniane convesse: equivalenza tra varie nozioni di sottosoluzione per funzioni Lipschitziane; cenni all'analisi non smooth; esistenza di sottosoluzioni regolari strette e principio di confronto. Equazione eiconale e funzione distanza da un chiuso.

- Equazioni evolutive di Hamilton–Jacobi: caso di Hamiltoniana autonoma, convessa e coerciva. Principio di confronto tra sotto e sopra soluzioni uniformemente continue. Esistenza e unicità di soluzioni uniformemente continue dell'equazione evolutiva con dato iniziale.
- Formula di Lax–Oleinik e funzione valore: principio della programmazione dinamica; locale Lipschitzianità della funzione valore; funzione valore come soluzione dell'equazione evolutiva.
- Formula di Lax–Oleinik e Calcolo delle Variazioni: esistenza e regolarità di curve minimizzanti; equazioni di Eulero–Lagrange e di DuBois–Raymond. Flussi Lagrangiano e Hamiltoniano nel caso di Hamiltoniane regolari.

Modalità di svolgimento dell'esame: consisterà di una prova orale. Possibili contenuti della prova sono i seguenti: presentazione di uno o più argomenti del programma; enunciati e dimostrazioni di teoremi; risoluzione di esercizi o dimostrazioni di risultati simili a quelli visti durante il corso.

Esame per eventuali studenti di dottorato: consisterà di una prova orale secondo le modalità sopra indicate su una parte del programma, più l'approfondimento di un argomento collegato, preliminarmente concordati.