ANALISI

Soluzione esercizi

25 novembre 2011

7.1. Esercizio.

Dire quali delle seguenti funzioni verificano le ipotesi del teorema di Weiertrass e quali ammettono massimi e/o minimi negli intervalli indicati:

$$f(x) = [x^2],\ x \in [0,2]$$

$$g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right)$$

$$h(x) = \arcsin(x) \qquad x \in [-1,1]$$

$$k(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$v(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

SOLUZIONE:

- $f(x) = [x^2], \quad x \in [0,2]$: NO, funzione non continua in 1 e 2, minimo $= f(0) = 0$, massimo $= f(2) = 2$,
- $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad x \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right)$:NO, funzione continua in intervallo non chiuso,
  minimo $= g(\pi/2 + 2\pi) = 1$, minimo $= g(3\pi/2 + 2\pi) = -1$,
- $h(x) = \arcsin(x) \quad x \in [-1,1]$: SI, funzione continua in intervallo chiuso e limitato, minimo $= h(-1) = -\pi/2$, massimo $= h(1) = \pi/2$
- $k(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$:NO, funzione continua ma in intervallo non chiuso, minimo ≈ 0.22, massimo ≈ 0.66,

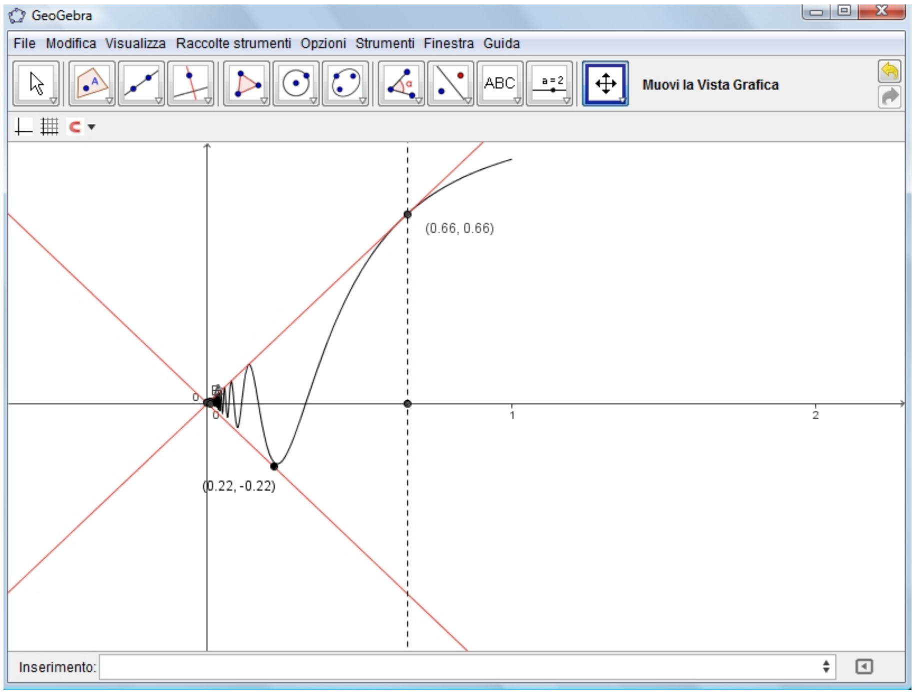

FIGURA 1. $k(x), \ x \in [0,1)$

- $v(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$:NO, funzione continua ma in intervallo non limitato, massimo $= v(0) = 1$, minimo non esiste, $\inf v = 0$.

7.2. Esercizio. *Calcolare le derivate delle seguenti funzioni scrivendo il rapporto incrementale e calcolandone il limite*

$$\frac{1}{\cos x} \quad \text{in} \quad x_0 = 0; \qquad x \sin x \quad \text{in} \quad x_0 = \frac{\pi}{2}; \qquad \exp(x^2) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

SOLUZIONE:

- $$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos(0+h)} - \dfrac{1}{\cos(0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos(h)} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} \frac{1}{\cos(h)} = 0$$

- $$\lim_{h\to 0} \frac{(\pi/2+h)\sin(\pi/2+h) - \pi/2\sin(\pi/2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\pi/2+h)\cos(h) - \pi/2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\pi}{2}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(h)\right\} = 1$$

- $$\lim_{h\to 0}\frac{e^{(x_0+h)^2}-e^{x_0^2}}{h} = e^{x_0^2}\lim_{h\to 0}\frac{e^{2hx_0+h^2}-1}{h}$$
  $$= e^{x_0^2}\lim_{h\to 0}\frac{e^{2hx_0+h^2}-1}{2hx_0+h^2}\,\frac{2hx_0+h^2}{h} = 2x_0e^{x_0^2}$$
  avendo tenuto conto del noto
  $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

7.3. Esercizio. *Sia $f(x) = x^2+ax+b$. Determinare i valori a e b in modo che il grafico di $f(x)$ passi per il punto $(2,4)$ e che abbia in tale punto come tangente la retta $y = 2x$.*

SOLUZIONE:

La prima condizione richiede

$$f(2) = 4 \quad\to\quad 4+2a+b = 4$$

la seconda condizione richiede

$$f'(2)(x-2)+4 = 2x \quad\to\quad (4+a)(x-2)+4 = 2x$$

Le due condizioni conducono al sistema

$$\begin{array}{ll} 2a+b & = 0 \\ a & = -2 \end{array} \quad\to\quad a=-2,\ b=4$$

La funzione richiesta é pertanto

$$f(x) = x^2-2x+4$$

7.4. Esercizio. *Dire se le funzioni*

$$x|x|,\quad |x\sin(x)|,\quad e^{-|x|},\quad x\ \sin(|x|),\quad \sqrt{x}\sin x$$

sono derivabili per $x = 0$.

SOLUZIONE:

Le quattro funzioni

$$x|x|,\quad |x\sin(x)|,\quad x\ \sin(|x|),\quad \sqrt{x}\sin x$$

sono nulle in $x = 0$: pertanto per riconoscere se sono derivabili o meno in tale punto basta riconoscere se i quattro rapporti incrementali

$$\frac{x|x|}{x},\quad \frac{|x\sin(x)|}{x},\quad \frac{x\ \sin(|x|)}{x},\quad \frac{\sqrt{x}\sin x}{x}$$

ovvero semplificando

$$|x|, \quad \pm|\sin(x)|, \quad \sin(|x|), \quad \sqrt{x}\,\frac{\sin x}{x}$$

hanno limite per $x \to 0$....

...cosa che effettivamente accade per tutti e quattro !

Diverso é il caso della $f(x) = e^{-|x|}$: in questo caso

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x}-1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-x}-1)}{x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x}-1)}{x} = -1$$

La non uguaglianza del limite da sinistra e di quello da destra implica che $f(x) = e^{-|x|}$ non é derivabile in $x_0 = 0$.

7.5. Esercizio. *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

stabilire

- *per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x = 0$*
- *per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f è derivabile in $x = 0$*
- *per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la derivata f' è continua in $x = 0$*

SOLUZIONE:

- La funzione puó essere prolungata per continuitá su $x_0 = 0$ se e solo se esiste il limite $\lim_{x\to 0} f(x)$: tenuto conto che il fattore
$$\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
non ha limite per $x \to 0$ l'unica possibilitá che $f(x)$ abbia limite sta nel fatto che il fattore x^{α} sia infinitesimo per $x \to 0$, cosa che accade se e solo se $\alpha > 0$.

  In questo caso f puó essere prolungata nell'origine dandole il valore $f(0) = 0$
- $f(x)$ é derivabile in $x_0 = 0$ se e solo se esiste
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\alpha}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
Limite che per la stessa ragione precedente esiste se e solo se $\alpha - 1 > 0$.

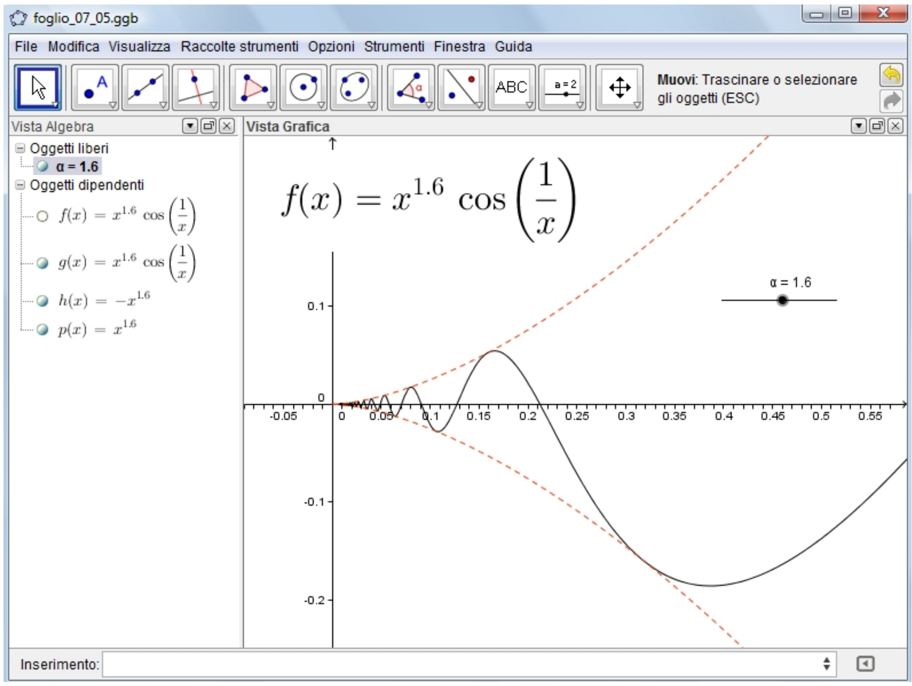

FIGURA 2. $x^\alpha \cos \dfrac{1}{x}$

In tale caso, $\alpha > 1$ si ha quindi $f'(0) = 0$.

- Tenuto conto che nei punti $x \neq 0$ si ha
$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^{\alpha-2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
tale funzione derivata, continua in ogni $x \neq 0$, é continua anche in $x_0 = 0$ se e solo se riesce
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$$
risultato che si ottiene se e solo se $\alpha - 2 > 0$.

7.6. Esercizio. *Utilizzando le regole di derivazione, calcolare le derivate delle seguenti funzioni:*
$$\exp(\sqrt{x}); \quad \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}; \quad \frac{x+1}{x^2+1}; \quad \sin\sqrt{1+x^2};$$
$$x \arctan x; \quad \sin(\cos(x)); \quad \log(1+\cos^2 x); \quad \frac{\arcsin x}{1-x^2}.$$

SOLUZIONE:

$$\exp(\sqrt{x}) \qquad \to \qquad \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad \to \qquad \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} + \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2} + 2$$

$$\frac{x+1}{x^2+1} \qquad \to \qquad \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x\,(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\sin\left(\sqrt{1+x^2}\right) \qquad \to \qquad \frac{x\cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$x\ \arctan(x) \qquad \to \qquad \arctan(x) + \frac{x}{x^2+1}$$

$$\sin(\cos(x)) \qquad \to \qquad -\sin(x)\,\cos(\cos(x))$$

$$\log(1+\cos^2(x)) \qquad \to \qquad -\frac{2\cos(x)\,\sin(x)}{\cos(x)^2+1}$$

$$\frac{\arcsin(x)}{1-x^2} \qquad \to \qquad \frac{2x\,\arcsin(x)}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Osservazione 7.1. *Le precedenti derivate sono state ottenute su computer servendosi di* wxMaxima*, software libero equivalente al blasonato* Mathematica*: il comando per ottenere la derivata della funzione $f(x)$ é*

diff(f(x),x); *MAIUSC - ENTER*

Le funzioni goniometriche inverse si chiamano su wxMaxima *(come su molti linguaggi)*

asin, acos, atan

7.7. Esercizio. *Determinare in ciascuno dei due casi seguenti*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 1 \\ ax+b & x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & |x| > 1 \\ ax^2+b & |x| \le 1 \end{cases}$$

i coefficienti a e b in modo che le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano derivabili in $x = 1$.

SOLUZIONE:

$f(x)$

L'unico punto in cui $f(x)$ potrebbe non essere derivabile é $x_0 = 1$:

- per essere continua occorre che $1 = a + b$
- per essere derivabile occorre che
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax+b-(a+b)}{x-1}$$
uguaglianza che implica $a = 2$.

Pertanto f é derivabili en tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $a = 1, b = 0$.

$g(x)$

La funzione g é simmetrica: $g(-x) = g(x)$, quindi se é continua in x_0 lo é anche in $-x_0$, se é derivabile in x_0 lo é anche in $-x_0$, ecc.

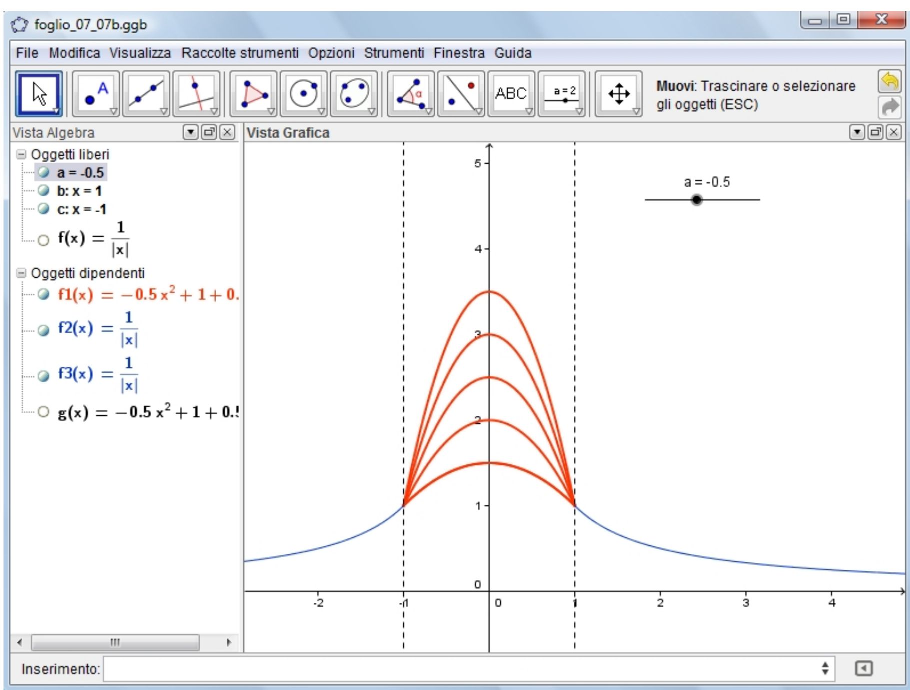

FIGURA 3. Le $g(x)$ dell'Esercizio 7.7

Gli unici punti in cui $g(x)$ potrebbe non essere derivabile, vedi figura 3, sono $x_1 = -1$, $x_3 = 1$:

- nel punto $x_3 = 1$ la funzione riesce continua se e solo se

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{|x|} = \lim_{x\to 1^-} (ax^2+b) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = a+b$$

- nel punto $x_3 = 1$ la g riesce derivabile se e solo se

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\dfrac{1}{|1+h|} - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a(1+h)^2 + b - (a+b)}{h} \quad \Leftrightarrow \quad -1 = 2a$$

Ne segue pertanto che:

- se $a+b=1$ la funzione g é continua in $\mathbb{R}$,
- se $a = -1/2$ la funzione g é anche derivabile in $\mathbb{R}$.

7.8. Esercizio. *Sia g derivabile in $\mathbb{R}$.*

- *Dimostrare che $f(x) = |g(x)|$ è derivabile in tutti i punti x tali che $g(x) \neq 0$ e calcolare la derivata in tali punti.*
- *Dimostrare che f non è derivabile nei punti x tali che $g(x) = 0$ e $g'(x) \neq 0$.*
- *Dimostrare che la funzione è derivabile nei punti x tali che $g(x) = 0$ e $g'(x) = 0$.*

SOLUZIONE:

- Sia x_0 un punto in cui riesca $g(x_0) \neq 0$, allora, essendo g una funzione continua esiste, per il teorema della permanenza del segno, tutto un intorno di x_0 in cui $g(x)$ ha lo stesso segno di $g(x_0)$: in tale intorno cioé

$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & se\ \ g(x_0) > 0 \\ -g(x) & se\ \ g(x_0) < 0 \end{cases}$$

Dal momento che sia $g(x)$ che $-g(x)$ sono derivabili tale riesce anche $f(x) = |g(x)|$.

- Se in x_0 riesce $g(x_0) = 0$ il precedente teorema della permanenza del segno non é piú applicabile: inoltre se $g'(x_0) \neq 0$ la funzione $g(x)$ cambia segno traversando x_0.

  Succede quindi che, supponendo ad esempio che sia $g(x) < 0$ a sinistra di x_0 e sia $g(x) > 0$ a destra,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \dfrac{-g(x)}{x} & se\ \ x < x_0 \\[2ex] \dfrac{g(x)}{x} & se\ \ x > x_0 \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-g'(x_0),\qquad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)$$

limite del rapporto incrementale sinistro diverso da quello destro, quindi non derivabilitá nel punto x_0.

É questo il caso che si incontra nel $|x|$ nell'origine: la funzione x nulla nell'origine, la sua derivata 1 non nulla.

- Se in un punto x_0 riesce $g(x_0)=0$ e $g'(x_0)=0$ allora

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{x}=0\quad\to\quad\lim_{x\to x_0}\frac{|g(x)|}{|x|}=0$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{|g(x)|}{x}=0,\ \lim_{x\to x_0^-}\frac{|g(x)|}{x}=-\lim_{x\to x_0}\frac{|g(x)|}{|x|}=0$$

ovvero sia il limite del rapporto incrementale sinistro che quello destro valgono zero: quindi la funzione $|g(x)|$ riesce derivabile in x_0 con derivata zero.

7.9. Esercizio. *Data la funzione $f(x)=x^3$, determinare un punto $\xi\in(0,2)$ in cui la retta tangente al grafico di f sia parallela alla corda passante per $(0,0)$ e $(2,8)$.*

SOLUZIONE:

L'equazione della retta, la corda, passante per $(0,0)$ e $(2,8)$, estremi del grafico, é la seguente

$$y=\frac{8}{2}x$$

Tenuto presente che le tangenti al grafico di $f(x)=x^3$ nel punto $(\xi,f(\xi))$ hanno equazione

$$y=f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)\quad\to\quad y=3\xi^2(x-\xi)+\xi^3$$

il parallelismo con la corda precedente si realizza se

$$3\xi^2=\frac{8}{2}\quad\to\quad\xi^2=\frac{4}{3}\quad\to\quad\xi=\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 1,154\in[0,2]$$

7.10. Esercizio. *Posto* $f(x) = \cos x$ *e* $g(x) = x^2$

- *scrivere la relazione di Cauchy nell'intervallo* $[0, x]$;
- *dedurre, dalla relazione trovata la disuguaglianza*

$$|\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Sia $x > 0$

$$\forall a, b \in (0, x)\ \exists \eta \in [a, b] : \ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} \quad \to$$
$$\to \quad \frac{\cos(b) - \cos(a)}{b^2 - a^2} = \frac{-\sin(\eta)}{2\eta}$$

Da cui passando al limite per $b \to x, \ \ a \to 0$ si ha

$$\frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \frac{-\sin(\eta)}{2\eta}$$

Tenuto presente del resto che

$$\forall t \neq 0 : \ \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \leq 1$$

segue

$$\left|\frac{\cos(x) - 1}{x^2}\right| = \left|\frac{-\sin(\eta)}{2\eta}\right| \leq \frac{1}{2}$$

relazione da cui discende

$$\forall x > 0 : \ |\cos(x) - 1| \leq \frac{1}{2}x^2$$

Tenuto presente la paritá sia di $\cos(x)$ che di x^2 si riconosce che la disuguaglianza ottenuta vale anche per $x < 0$ e, naturalmente anche per $x = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ |\cos(x) - 1| \leq \frac{1}{2}x^2$$