Soluzioni Foglio di esercizi 5

5.1 Esercizio

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ha lo stesso carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, che è convergente. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2(2-1/n)(2+1/n)} = \frac{1}{4},$$

da cui la tesi per il criterio del confronto asintotico.

Cerchiamo A, $B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Mettiamo a comune denominatore, semplifichiamo il denominatore e raccogliamo i termini a destra. Risulta

$$0 = n(2\,A + 2\,B) + (A - B - 1).$$

Affinchè questa uguaglianza sia soddisfatta per ogni $n \in \mathbb{N}$, dobbiamo scegliere A, $B \in \mathbb{R}$ soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2\,A + 2\,B = 0 \\ A - B - 1 = 0, \end{cases}$$

e quindi $A = -B = 1/2$. Quindi

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right). \tag{1}$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$, calcoliamo la somma parziale n-esima della serie, tenendo conto di (1):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right).$$

Osserviamo che
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k+1}$$
e
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k+1},$$
quindi
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$
La somma della serie risulta perciò
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Osservazione. Serie della forma $\sum_n (a_{n+1} - a_n)$ sono chiamate *serie telescopiche.*

5.2 Esercizio

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{k-1}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^{k-1}} = \lim_{n\to+\infty} 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{2}{1-1/3} = 3.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{2k+1}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{2k+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{9}\right)^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{27} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{1}{24}.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k} = \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{6}\right)^k + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{6}\right)^k\right] = \frac{1/3}{1-1/3} + \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

5.3 Esercizio

Tutte le serie proposte in questo esercizio sono a termini positivi, come è facile verificare, quindi possiamo applicare i vari criteri di confronto visti per le serie a termini non negativi.

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, in simboli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \quad \sim \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

quindi diverge. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/n}{1/\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+1/n}} = 1,$$

da cui l'affermazione per il criterio del confronto asintotico.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ converge in quanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \quad \sim \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/n^{3/2}}{1/\sqrt{n(n^2+1)}} = 1,$$

da cui l'affermazione per il criterio del confronto asintotico.

Per studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n},$$

verifichiamo dapprima se il termine n–esimo della serie va a 0. Razionalizzando si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = 0.$$

Una volta razionalizzato, è anche facile vedere che il termine n–esimo della serie va a 0 come $1/n^{3/2}$, cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/n^{3/2}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})/n} = 2.$$

Per il criterio del confronto asintotico segue che la serie proposta converge.

5.4 Esercizio

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}$$

è a termini positivi. Vogliamo applicare il criterio del rapporto. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n^3} = \frac{1}{3},$$

quindi la serie converge. Ora

$$\frac{n^3}{3^n} \geq \frac{1}{3^n} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}.$$

5.5 Esercizio

La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$$

è a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0,$$

quindi la serie converge.

Posto $a_n = 2^n/n!$, si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{3} \qquad \text{per ogni } n \geq 2,$$

quindi

$$a_{2+k} \leq \frac{2}{3} a_{2+(k-1)} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 a_{2+(k-2)} \leq \cdots \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k a_2.$$

Da questo si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2+k} \leq 1 + 2 + \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \left(\frac{2}{3}\right)^k,$$

cioè

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \leq 3 + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 9.$$

5.6 Esercizio

(a) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n^3}\right)$$

converge perché converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\sin\left(\frac{x}{n^3}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|}{n^3} < +\infty.$$

(b) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$$

converge per $x = 0$. Per $x \neq 0$ la serie non converge assolutamente. Infatti, per il criterio del confronto asintotico,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right| \quad \sim \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|}{\sqrt{n}}$$

e questa seconda serie diverge. Questo però non ci dà informazioni sul carattere della serie proposta. Osserviamo allora che, per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, possiamo trovare un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{\sqrt{n}} < \frac{\pi}{2} \qquad \text{per ogni } n \geq N,$$

in particolare $\sin(x/\sqrt{n})$ ha lo stesso segno di $x/\sqrt{n}$. Quindi

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \sin\left(x/\sqrt{n}\right) = \operatorname{sgn}(x) \sum_{n=N}^{+\infty} \left|\sin\left(x/\sqrt{n}\right)\right|,$$

da cui si conclude che la serie proposta diverge a $+\infty$ se $x > 0$ e a $-\infty$ se $x < 0$.

(c) La serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sin(x))^n$$
è una serie geometrica di ragione $\sin(x)$.

Quando $\sin(x) = 1$, cioè per $x \in \{\pi/2 + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$, la serie diverge a $+\infty$.

Quando $\sin(x) = -1$, cioè per $x \in \{-\pi/2 + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$, la serie è indeterminata.

Nei casi rimanenti $|\sin(x)| < 1$ e la serie converge.

5.7 Esercizio

La serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+(x^2)^n}, \qquad x \in \mathbb{R},$$
è una serie a termini positivi, quindi regolare.

Per $|x| \leq 1$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+(x^2)^n} \neq 0,$$
quindi la serie non converge. Essendo a termini positivi, questo vuol dire che diverge a $+\infty$.

Sia $|x| > 1$. Applicando il criterio della radice si ottiene
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+(x^2)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x^2} \frac{1}{\sqrt[n]{1+1/x^2}} = \frac{1}{x^2} < 1,$$
e quindi la serie converge.

5.8 Esercizio

(a) Vogliamo studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Per $|x| > 1$ la serie non converge in quanto $\lim_n x^n/n \neq 0$.

Per $x = 1$ la serie diverge (è la serie armonica).

Per $x = -1$ la serie converge (in base al criterio di Leibnitz per le serie a segno alterno).

Per $|x| < 1$ la serie converge perche' converge assolutamente, cioè

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{x^n}{n} \right| \qquad \text{converge.}$$

Per vederlo, basta applicare il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = |x|.$$

(b) Ragionando come al punto precedente, si ha che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

non converge per $|x| > 1$, mentre converge assolutamente per $|x| \leq 1$ in quanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(c) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^n$$

non converge per $|x| \geq 1$ dal momento che

$$\lim_{n\to+\infty} nx^n \neq 0.$$

La serie converge assolutamente, invece, quando $|x| \leq 1$. Infatti, dal criterio della radice, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n|x|^n} = \lim_{n\to+\infty} |x| \sqrt[n]{n} = |x| < 1.$$

5.9 Esercizio

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \qquad g(x) = \frac{x^2+x}{3-x^2}.$$

Calcoliamo i limiti di $f(x)$ e $g(x)$ per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1-1/x^2)}{x^2(1+1/x^2)} = 1;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{3-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1+1/x^2)}{x^2(-1+3/x^2)} = -1.$$

Abbiamo dunque $\ell_1 = 1$ e $\ell_2 = -1$. Vogliamo trovare un $\overline{x}$ tale che

$$|f(x)-1| + |g(x)+1| \leq 1 \qquad \text{per ogni } x \geq \overline{x}.$$

Osserviamo che è sufficiente trovare $\overline{x}$ tale che

$$\begin{cases} |f(x)-1| \leq \frac{1}{2} \\ |g(x)+1| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

per ogni $x \geq \overline{x}$.

Analizziamo la disuguaglianza $|f(x)-1| \leq 1/2$. Si ha

$$\left| \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{x^2+1}{x^2+1} \right| = \frac{2}{x^2+1} \leq \frac{1}{2},$$

cioè

$$x^2 \geq 3.$$

Basta che $x \geq \sqrt{3}$.

Analizziamo la disuguaglianza $|g(x)+1| \leq 1/2$. Si ha

$$\left| \frac{x^2+x}{3-x^2} + \frac{3-x^2}{3-x^2} \right| = \frac{|x+3|}{|3-x^2|} \leq \frac{1}{2},$$

Prendo $x > \sqrt{3}$. Allora posso togliere i moduli e ottengo

$$\frac{x+3}{x^2-3} \leq \frac{1}{2},$$

da cui

$$x^2 - 2x - 9 \geq 0.$$

Le radici dell'equazione $x^2-2x-9=0$ sono $1 \pm \sqrt{10}$. Bisogna ora ricordarsi che questi calcoli sono stati sviluppati supponendo $x > \sqrt{3}$. Dal momento che $1+\sqrt{10} > \sqrt{3}$, basta prendere $x \geq 1+\sqrt{10}$.

Riassumendo:

$|f(x)-1| \leq 1/2$ è vera per $x \geq \sqrt{3}$;

$|g(x)+1| \leq 1/2$ è vera per $x \geq 1+\sqrt{10}$.

Dunque basta scegliere $\overline{x} = 1+\sqrt{10}$.

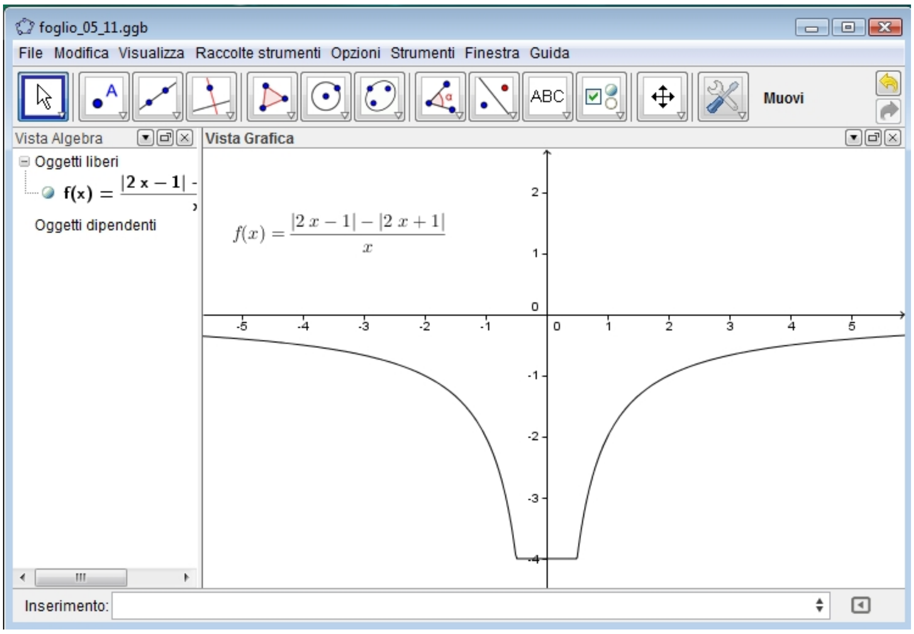

Figure 1: Esercizio 11: $f(x) = \frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$

5.10 Esercizio

La funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

non è definita per $x = 0$. Per $x \neq 0$, risulta

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

Dunque $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, dunque non esiste il limite di $f(x)$ per $x \to 0$ visto che limiti destro e sinistro (che esistono) non coincidono.

5.11 Esercizio

$$f(x) = \frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}.$$

Il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si osservi che la funzione è pari, cioè

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{per ogni } x \neq 0.$$

Sarà dunque sufficiente studiare la funzione per $x > 0$. Il grafico per gli x negativi si otterrà tramite una riflessione rispetto all'asse y.
Lo studio del segno degli argomenti dei moduli ci porta a considerare due casi:

se $0 < x \leq 1/2$, si ha

$$f(x) = \frac{1 - 2x - 2x - 1}{4} = -4$$

se $x > 1/2$, si ha

$$f(x) = \frac{2x - 1 - 2x - 1}{x} = -\frac{2}{x}.$$

Calcoliamo i limiti:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 4 = 4$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{z \to +\infty} f(-z) = \lim_{z \to +\infty} f(z) = 0$$