ANALISI

Soluzione esercizi

14 ottobre 2011

2.1. Esercizio. *Disegnare il grafico delle funzioni*

$$f(x) = -x^4, \quad g(x) = x^3, \quad r(x) = \min(0, x^3), \quad s(x) = 3^{|x|}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Esistono software che disegnano i grafici di moltissime funzioni in modo estremamente accurato:

- il piú semplice (quindi pratico) é GeoGebra,
- uno strumento molto raffinato (quindi di uso impegnativo) é GnuPlot,
- risposte gratuite (non rapidissime) si ottengono anche dal sito `http://www.wolframalpha.com`

Il grafico di

- $-x^4$ somiglia a quello di $-x^2$, parabola rovesciata verso il basso,
- x^3 é presente sulle dispense,
- $\min(0, x^3)$ coincide con quello di x^3 sulle x negative, é zero su quelle positive,
- $3^{|x|}$ é simmetrico rispetto all'asse y: $3^{|-x|} = 3^{|x|}$, la curva grafico sulle x negative é l'immagine rispecchiata del grafico relativo alle x positive.

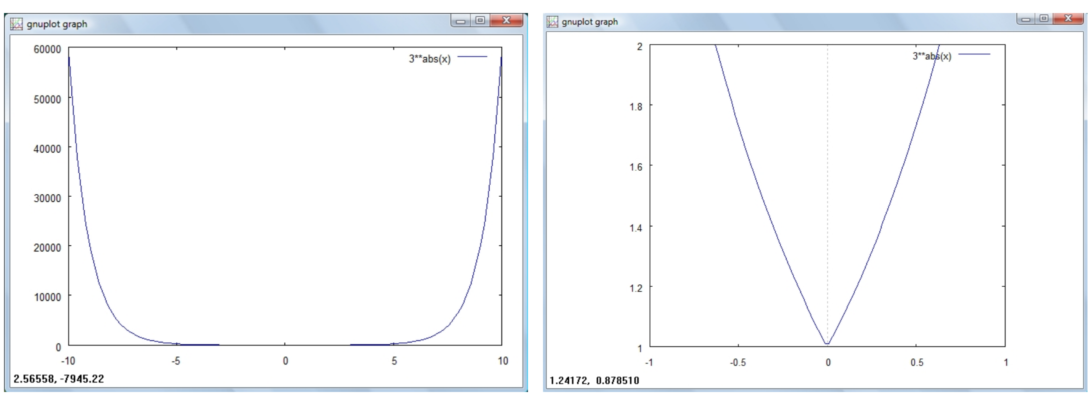

Figura 1. Il grafico di $3^{|x|}$ su due finestre cartesiane diverse.

La scelta di diverse finestre cartesiane, vedi Figura 1, evidenzia, o meno, alcuni aspetti del grafico:

- una finestra grande, prima figura, non permette di apprezzare l'angolo nell'origine,
- la seconda finestra, relativa ad una piccolissima regione intorno all'origine permette di apprezzare minime variazioni intorno a tale punto.

2.2. Esercizio. *Detta $m(x)$ una qualsiasi delle funzioni dell'esercizio precedente disegnare il grafico delle funzioni seguenti:*

$$-m(x), \quad |m(x)|, \quad \min(0, m(x)), \quad \max(0, m(x))$$

SOLUZIONE:

- il cambio di segno, da $m(x)$ a $-m(x)$ ribalta il grafico, ovvero lo rispecchia rispetto all'asse x,
- $\min(0, m(x))$ coincide con $m(x)$ nei tratti in cui essa é negativa, vale zero nei tratti in cui $m(x) \geq 0$,
- $\max(0, m(x))$, é l'opposto del caso precedente, coincide con $m(x)$ nei tratti in cui $m(x) \geq 0$, vale zero negli altri tratti.

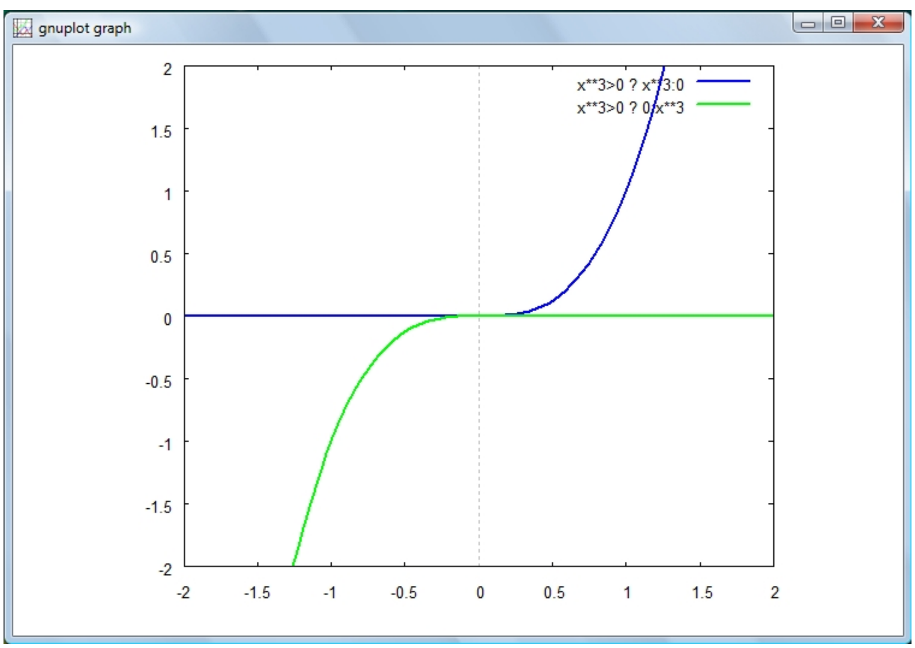

FIGURA 2. $\min(0, x^3)$ in verde, $\max(0, x^3)$ in blu.

NOTA: Il comando GnuPlot condizionale per definire $g(x) = \max(x^3, 0)$ é il seguente:

```
g(x) = (x**3 > 0) ? x**3 : 0
```

2.3. Esercizio. *Disegnare il grafico delle seguenti funzioni*

$$f(x) = \frac{|x| - x}{2}, \quad g(x) = \max(0, \cos(x)), \quad h(x) = \min(0, \sin(x))$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

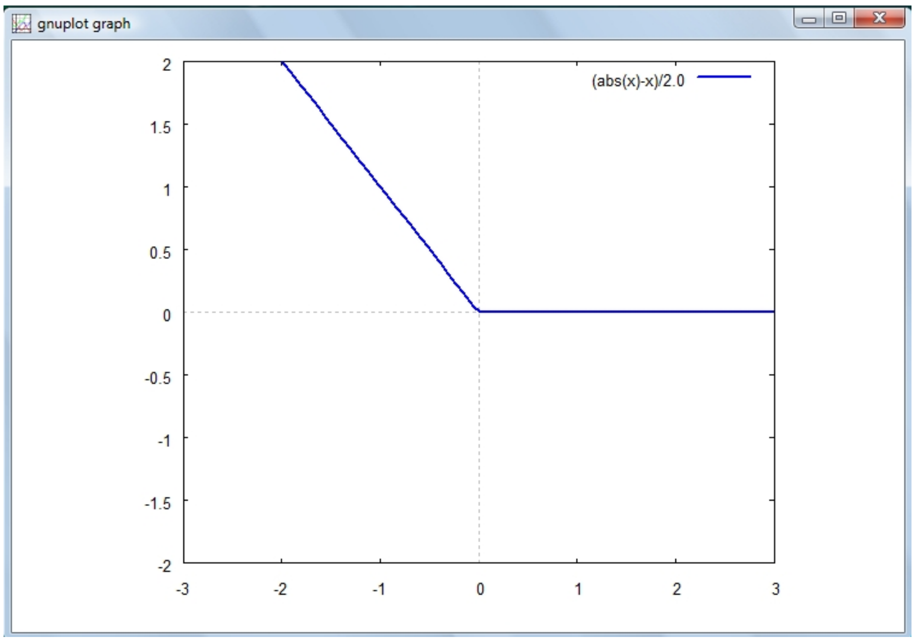

FIGURA 3. $f(x) = \dfrac{|x| - x}{2}$

2.4. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

- *determinare il dominio di* $f(x)$
- *determinare il dominio di* $g(x) = \log(x+1) - \log(x-1)$,
- *esaminare che relazione intercorra tra* $f(x)$ *e* $g(x)$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione logaritmo (in qualunque base) é definita sui numeri positivi: $f(x)$ quindi é definita sugli x tali che

$$\frac{x+1}{x-1} > 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x \notin [-1, 1]$$

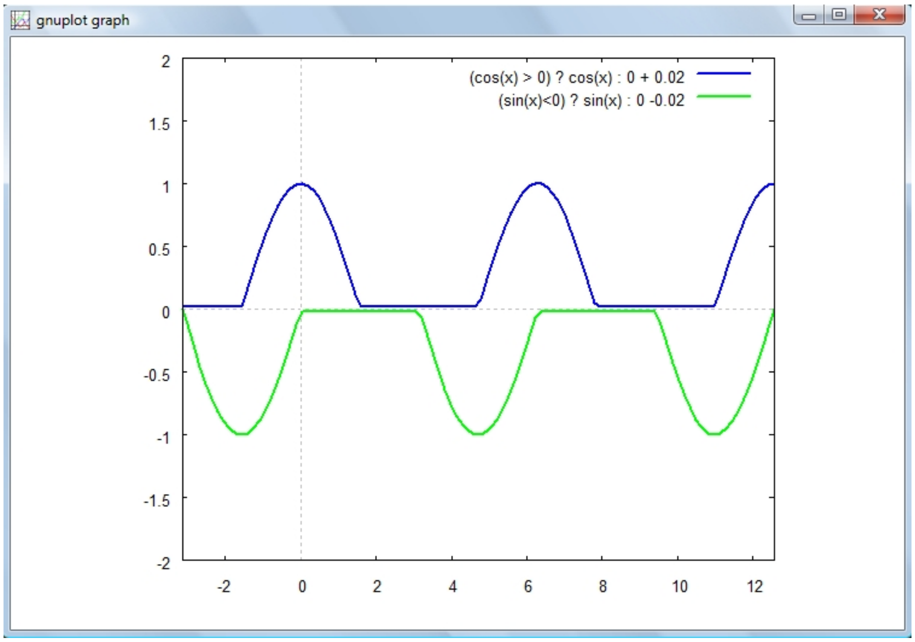

FIGURA 4. $\min(0, \sin(x))$ in verde, $\max(0, \cos(x))$ in blu.

La funzione $g(x)$ é definita dove sono definiti entrambi gli addendi

$$\log(x+1), \qquad \log(x-1)$$

quindi occorre che

$$(x+1>0)\, AND\, (x-1>0) \quad \to \quad x>1$$

Le due funzioni f e g coincidono sulla semiretta $x>1$: si puó dire che

- g é una restrizione di f,
- ovvero f é un prolungamento di g.

2.5. Esercizio. *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & se \quad x \geq 2 \\ x+2 & se \quad x < 2 \end{cases}$$

- *disegnare il grafico di $f(x)$,*
- *disegnare il grafico di $f(x-2)$ e di $f(x)+4$,*
- *dimostrare che f é invertibile,*
- *determinare la funzione inversa f^{-1}.*

SOLUZIONE:

La funzione $f(x)$ é crescente, quindi iniettiva, quindi invertibile.

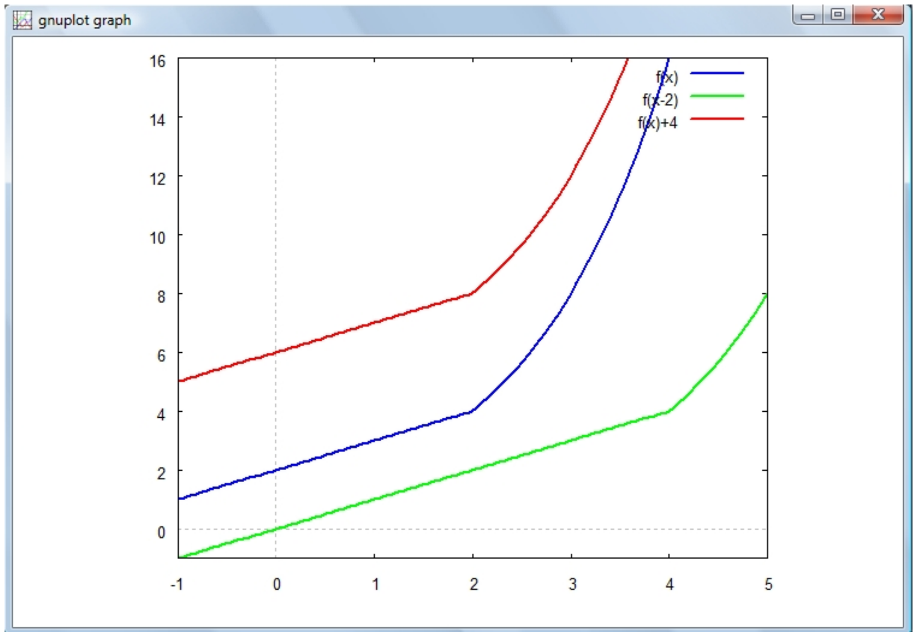

FIGURA 5. $f(x), f(x-2), f(x)+4$

La determinazione dell'inversa corrisponde alla determinazione della soluzione x per l'equazione

$$y = f(x)$$

Tenute presenti le due espressioni che determinano $f(x)$ l'equazione corrisponde a

$$\begin{array}{llll} y \geq 4: & y = 2^x & \to & x = \dfrac{\log(y)}{\log(2)} \\ y \leq 4: & y = x+2 & \to & x = y-2 \end{array}$$

Pertanto

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y \geq 4: & \dfrac{\log(y)}{\log(2)} \\ y \leq 4: & y-2 \end{cases}$$

2.6. Esercizio. *Sia*

$$f(x) = |3^x - 1|$$

definita su tutto $\mathbb{R}$*,*

- *disegnare il grafico di* $f(x)$*,*
- *indicare quante soluzioni possiedono le equazioni*

$$f(x) = -\frac{1}{2}, \quad f(x) = \frac{1}{2}$$

- *esaminare se la funzione f é invertibile,*
- *determinare*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f, \quad \inf_{x\in\mathbb{R}} f$$

SOLUZIONE:

Il grafico di $f(x) = |3^x - 1|$ puó essere dedotto disegnando prima il grafico della 3^x, poi quello della $3^x - 1$ e per ultimo quello del modulo $|3^x - 1|$, ottenuto ribaltando le parti di grafico negative.

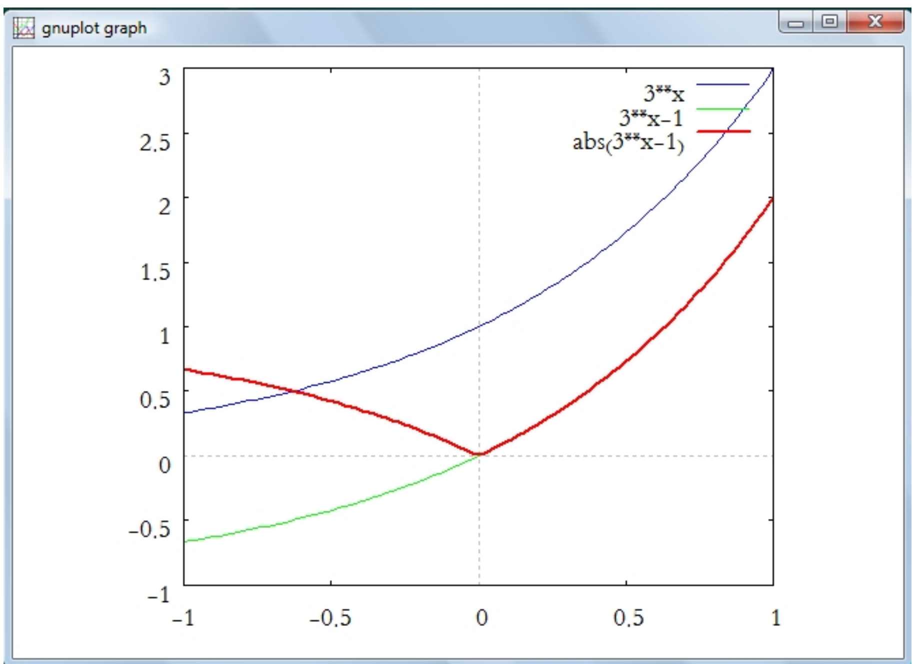

FIGURA 6. 3^x, $3^x - 1$, $|3^x - 1|$

L'equazione $f(x) = -\dfrac{1}{2}$ ovviamente non ha soluzioni in quanto il modulo non produce mai valori negativi.
L'equazione invece $f(x) = 1/2$ puó averne: esse sono le soluzioni di

$$3^x - 1 = \pm\frac{1}{2} \quad \to \quad 3^x = \begin{cases} \dfrac{3}{2} \\ \\ \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

ovvero, passando ai logaritmi,

$$x \log(3) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{3}{2}\right) \\ \\ \log\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

da cui

$$x_1 = 1 - \frac{\log(2)}{\log(3)}, \quad x_2 = -\frac{\log(2)}{\log(3)}$$

Il fatto di aver trovato due valori $x_1 \neq x_2$ nei quali riesce $f(x_1) = f(x_2)$ mostra che f non é iniettiva e quindi non é invertibile.
Per quanto concerne gli estremi inferiore e superiore si puó riconoscere che

- ogni modulo é inferiormente limitato da zero, e quindi l'estremo inferiore esiste, e in questo caso essendo $f(0) = 0$ é lo zero stesso,
- 3^x e quindi anche $3^x - 1$ sono illimitati superiormente, quindi non esiste il sup di f

Si ha:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f = +\infty, \quad \inf_{x\in\mathbb{R}} f = \min_{x\in\mathbb{R}} f = 0$$

2.7. Esercizio. *Assegnato il polinomio*

$$P(x) = x(x+1)(x-1)$$

- *esaminare se $P(x)$ rappresenta una funzioni iniettiva,*
- *disegnare il grafico di $P(x) + k$ in corrispondenza ai valori $k = -1, 0, 1$,*
- *disegnare il grafico di $P(x+1)$*

SOLUZIONE:

Il polinomio $P(x) = x(x+1)(x-1)$ produce lo stesso valore, lo zero, in tre differenti x:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1$$

quindi non rappresenta una funzione iniettiva.

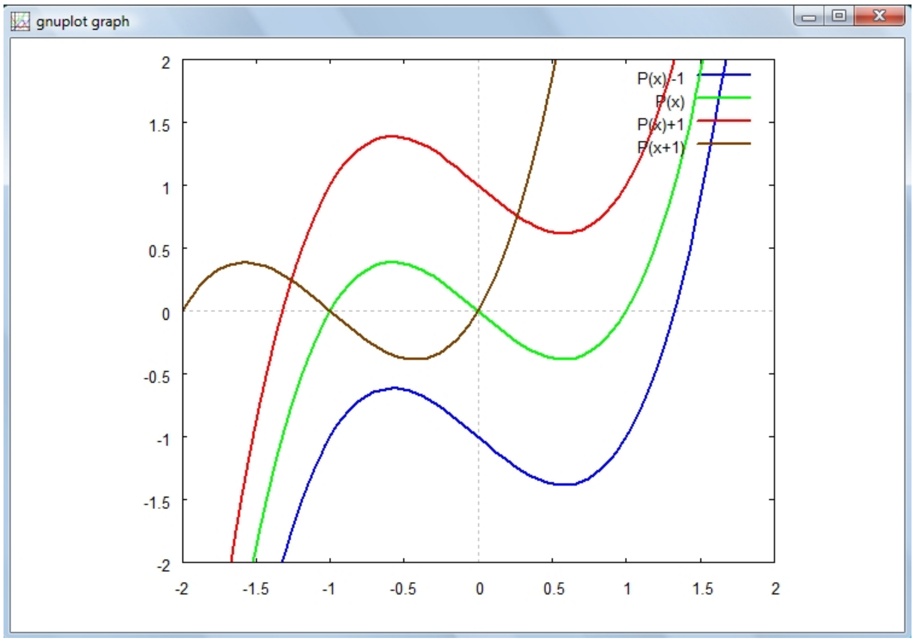

FIGURA 7. $P(x) = x(x+1)(x-1)$, $P(x)+k, P(x+1)$, $k = -1, 0, 1$

2.8. Esercizio. *Indicata con*

$$R(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

- *esaminare se* $R(x)$ *é limitata,*
- *determinare il grafico di* $R(x)$
- *determinare i grafici di* $kR(x-k)$, $\quad k = -2, -1, 2$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$R(x)$ é limitata per la nota disuguaglianza

$$2|a||b| \leq a^2 + b^2 \quad \to \quad 2|x| \leq 1 + x^2 \quad \to \quad \left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Il grafico di $R(x)$ é

- disegnato su tutto l'asse reale e contenuto nella striscia $-1/2 \leq y \leq 1/2$,
- passa per l'origine,
- tende a zero per x divergente sia negativamente che positivamente,
- simmetrico rispetto all'origine degli assi: $R(-x) = -R(x)$.

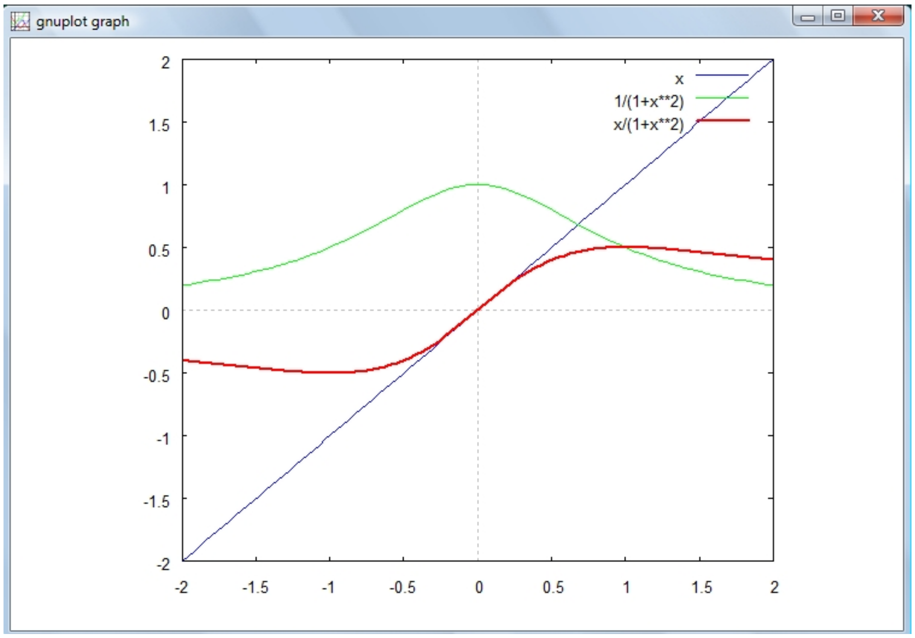

FIGURA 8. $x, \frac{1}{1+x^2}, R(x)$

2.9. Esercizio. *Verificare che*

$$R(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

si possa esprimere come

$$R(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

SOLUZIONE:

La possibilitá di decomporre l'espressione razionale assegnata in somma di addendi razionali piú semplici é spesso utile in molti calcoli:

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

da cui

$$1 = (A+B)x - 2A - 3B \quad \to \quad \begin{cases} A \quad +B \quad = 0 \\ -2A \quad -3B \quad = 1 \end{cases} \quad \to \quad A = 1,\ B = -1$$

2.10. Esercizio. *Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni. Dimostrare che*

- f *e* g *crescenti* $\Rightarrow$ $f \circ g$ *crescente;*
- f *e* g *decrescenti* $\Rightarrow$ $f \circ g$ *crescente;*

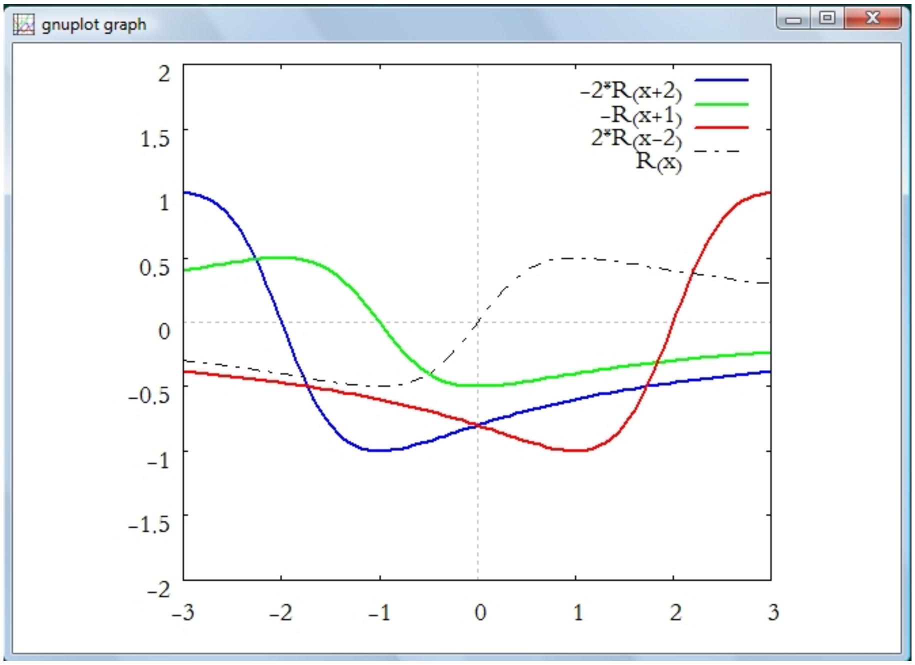

FIGURA 9. $-2R(x+2), -R(x+1), 2R(x-2), R(x)$

- *f crescente, g decrescente $\Rightarrow$ $f \circ g$ e $g \circ f$ decrescenti.*

Quali condizioni bisogna aggiungere su f e g perchè $f \circ g$ e $g \circ f$ risultino strettamente monotone[1]*?*

SOLUZIONE:

Una funzione crescente mantiene tra i risultati $f(a)$ ed $f(b)$ lo stesso ordine sotto cui si trovavano a e b,

$$a \leq b \quad \to \quad f(a) \leq f(b), \quad a \geq b \quad \to \quad f(a) \geq f(b)$$

una funzione decrescente invece inverte tale ordine

$$a \leq b \quad \to \quad f(a) \geq f(b), \quad a \geq b \quad \to \quad f(a) \leq f(b)$$

É evidente che:

- due mantenimenti dell'ordine producono un mantenimento dell'ordine,
- due inversioni dell'ordine producono un mantenimento dell'ordine,

[1] L'espressione $f \circ g$ rappresenta naturalmente la funzione composta

$$x \quad \to \quad g(x) \quad \to \quad f[g(x)]$$

- un mantenimento e un'inversione producono un'inversione dell'ordine.

Cioé, nei tre casi proposti si ha:

$$1^0: \ x_1 \leq x_2 \quad \rightarrow \quad g(x_1) \leq g(x_2) \quad \rightarrow \quad f[g(x_1)] \leq f[g(x_2)]$$
$$2^0: \ x_1 \leq x_2 \quad \rightarrow \quad g(x_1) \geq g(x_2) \quad \rightarrow \quad f[g(x_1)] \leq f[g(x_2)]$$
$$3^0: \ x_1 \leq x_2 \quad \rightarrow \quad g(x_1) \geq g(x_2) \quad \rightarrow \quad f[g(x_1)] \geq f[g(x_2)]$$

Il termine *strettamente monotona* corrisponde nel caso crescente alla condizione

$$x_1 < x_2 \quad \rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

e a quella analoga nel caso decrescente.
Per essere sicuri che componendo $f \circ g$ o $g \circ f$ si ottenga una funzione strettamente monotona é sufficiente che siano strettamente monotone dello stesso tipo (entrambe crescenti o entrambe decrescenti) tutte e due le funzioni f e g.

Osservazione 2.1. *Le condizioni considerate nell'esercizio sono solo sufficiente: la composizione $f \circ g$ puó produrre funzioni monotone anche componendo due f e g che non lo siano, si pensi ad esempio a*

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = e^x \quad \rightarrow \quad f[g(x)] = (e^x)^2 = e^{2x}$$

funzione, quest'ultima strettamente monotona crescente.