ANALISI

Soluzione esercizi

7 ottobre 2011

1.1. Esercizio. *Determinare esplicitamente gli insiemi A e B*

$$A := \left\{x \in \mathbb{R}| : 3 - x^2 \geq 0\right\}, \qquad B := \left\{x \in \mathbb{R}| : |x^2 - 3| > 0\right\}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$\boxed{3 - x^2 \geq 0}$

La disuguaglianza assegnata equivale a

$$3 \geq x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 \leq 3$$

e quindi a

$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad |x| \leq \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

ovvero $A = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.
É anche utile osservare come per risolvere la disuguaglianza $3 - x^2 \geq 0$ si possa

- risolvere l'equazione $3 - x^2 = 0, \quad x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$
- decidere cosa accada dell'espressione $x^2 - 3$ nei tre intervalli

$$(-\infty, -\sqrt{3}), \quad [-\sqrt{3}, \sqrt{3}], \quad (\sqrt{3}, +\infty)$$

- si riconosce facilmente che nel primo e nel terzo intervallo riesce $3 - x^2 < 0$ mentre nel secondo riesce $3 - x^2 \geq 0$.

Una risposta si ottiene analogamente disegnando il grafico della funzione $y = 3 - x^2$, vedi Figura **??**.

$\boxed{|x^2 - 3| > 0}$

Si ricordi che i valori espressi da moduli sono sempre, qualunque siano i parametri che vi figurano, numeri maggiori o uguali a zero.
Quindi per decidere le soluzioni della disuguaglianza $|x^2 - 3| > 0$ basta eliminare i valori di x per i quali riesce

$$|x^2 - 3| = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 3 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Riesce pertanto

$$B = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

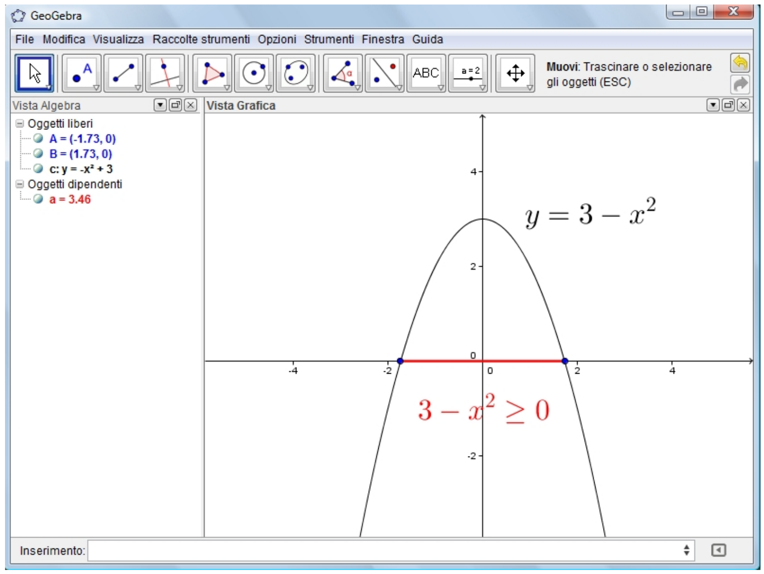

FIGURA 1. $A := \{x \in \mathbb{R}| : 3 - x^2 \geq 0\}$

1.2. Esercizio. *Determinare esplicitamente i seguenti insiemi:*

$$A := \{x \in \mathbb{R}| : |x+3| > 5\}, \quad B := \{x \in \mathbb{R}| : |x+2| \leq 3\}$$

- *riconoscere se sono insiemi limitati,*
- *determinare gli eventuali estremi inferiore e superiore,*
- *riconoscere se sono anche minimo e massimo.*

SOLUZIONE:

$\boxed{A := \{x \in \mathbb{R}| : |x+3| > 5\}}$

Il modulo $|x+3| = |x-(-3)|$ rappresenta la distanza del punto x dal punto -3: quindi

$$|x+3| > 5$$

vuol dire

$$x \text{ distante da } -3 \text{ per piú di } 5$$

I punti che distano 5 da -3 sono: -8 a sinistra e 2 a destra.
Quindi i punti che distano da -3 per piú di 5 sono quelli dell'intervallo $(-\infty, -8)$ e dell'intervallo $(2, +\infty)$.
Si ha quindi

$$A = (-\infty, -8) \bigcup (2, +\infty)$$

L'insieme A

- é non limitato,
- non é limitato inferiormente quindi non ha estremo inferiore,

- non é limitato superiormente quindi non ha estremo superiore,
- non ha né minimo né massimo.

La frase *l'insieme A non é limitato inferiormente* viene tradizionalmente considerata equivalente alla seguente

l'insieme A ha estremo inferiore $-\infty$.

Analogamente la frase *l'insieme A non é limitato superiormente* viene tradizionalmente considerata equivalente alla seguente

l'insieme A ha estremo superiore $+\infty$.

La disuguaglianza $|x+3| > 5$ é del resto equivalente alle due seguenti

$$\{(x+3) < -5\} \bigcup \{(x+3) > 5\} \quad \rightarrow \quad \{x < -8\} \bigcup \{x > 2\}$$

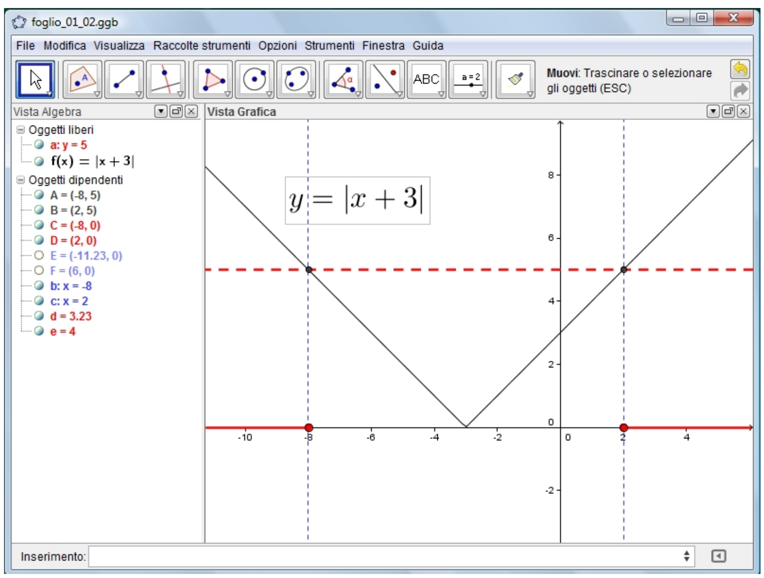

FIGURA 2. $A := \{x \in \mathbb{R}| : |x+3| > 5\}$

La determinazione dell'insieme A puó essere ricavata dal grafico di $y = |x+3|$ come da Figura **??**.

$\boxed{B := \{x \in \mathbb{R}| : |x+2| < 3\}}$

L'insieme B é costituito dai punti che

distano da -2 meno di 3.

Quindi

$$B := (-5, 1)$$

intervallo estremi esclusi.

L'insieme B é

- limitato,
- i suoi estremi inferiore e superiore sono rispettivamente -5 e 1,
- non ha né minimo né massimo.

1.3. Esercizio. *Disegnare l'insieme Ω definito dal seguente sistema di disuguaglianze*

$$\Omega = \begin{cases} |x+2| \leq 4 \\ x^2 - 5x > -4 \end{cases}$$

- *riconoscere se é limitato,*
- *determinare gli eventuali estremi inferiore e superiore,*
- *riconoscere se sono anche minimo e massimo.*

SOLUZIONE:

Indicati con

$$A = \{x \in \mathbb{R}| : |x+2| \leq 4\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R}| : x^2 - 5x > -4\right\}$$

riesce

$$\Omega = A \bigcap B$$

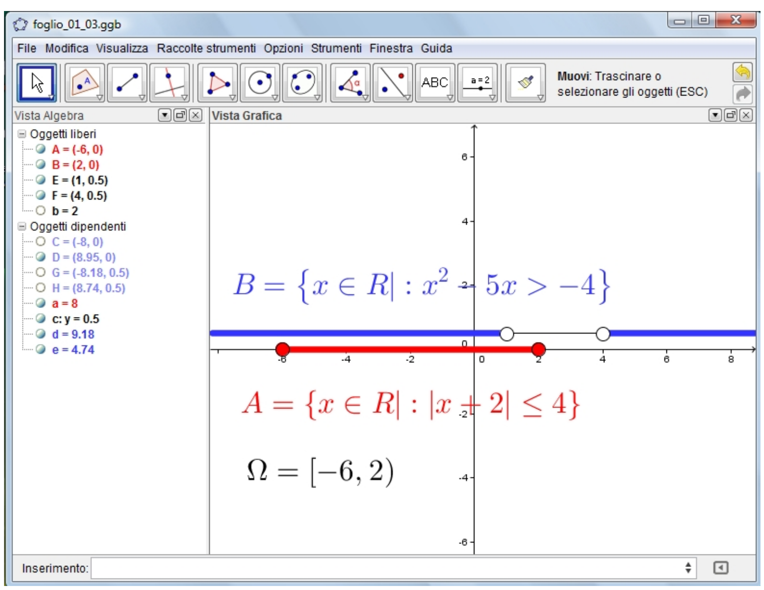

FIGURA 3. $\{|x+2| \leq 4\} \cap \{x^2 - 5x > -4\}$

tenuto conto che

$$\begin{cases} |x+2| \leq 4 & \rightarrow \quad -4 \leq x+2 \leq 4 & \rightarrow \quad x \in [-6, 2] \\ x^2 - 5x > -4 & \rightarrow \quad (x-1)(x-4) > 0 & \rightarrow \quad x \notin [1, 4] \end{cases}$$

$$A = [-6, 2], \quad B = (-\infty, 1) \bigcup (4, +\infty)$$

riesce

$$\Omega = [-6,\ 1)$$

estremo sinistro incluso, destro escluso.
L'insieme Ω é:

- limitato,
- -6 é il suo estremo inferiore, e 1 il suo estremo superiore,
- il minimo é -6, non esiste massimo.

1.4. Esercizio. *Assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ determinare l'insieme*

$$E := \{x \in \mathbb{R} | : \ |x - a| < |x - b|\}$$

- *riconoscere se é limitato,*
- *determinare gli eventuali estremi inferiore e superiore,*
- *riconoscere se sono anche minimo e massimo.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Considerato che $|x - a|$ rappresenta la distanza di x da a e $|x - b|$ rappresenta la distanza di x da b i punti che soddisfano la disuguaglianza

$$|x - a| < |x - b|$$

sono i punti

che distano da a meno di quanto distino da b

Indicato con

$$c = \frac{a + b}{2}$$

il punto medio tra a e b consideriamo le due semirette

$$(-\infty, c), \quad (c,\ +\infty)$$

L'insieme E é quella delle due semirette che contiene a:

- se $a < b$ l'insieme E é l'intervallo $(-\infty, c)$,
- se $b < a$ l'insieme E é l'intervallo $(c, +\infty)$.

L'insieme E é:

- non limitato,
- se $a < b$ non é limitato inferiormente ma é limitato superiormente,
- se $b < a$ é limitato inferiormente ma é limitato superiormente,
- non ha né minimo né massimo.

1.5. Esercizio. *Sia $a \neq 0$ razionale e b irrazionale: provare che*
- *$a + b$ é irrazionale,*
- *ab é irrazionale.*

Soluzione:

Se, per assurdo, fosse
$$a + b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$
riuscirebbe
$$b = \frac{p}{q} - a \in \mathbb{Q}$$
contrariamente all'ipotesi che b sia irrazionale.
Si é quindi riconosciuto che la somma $a + b$ di un razionale e di un irrazionale non puó venire razionale.
Si osservi che, invece, la somma di due numeri entrambi irrazionali puó risultare razionale: ad esempio
$$\left\{1 + \sqrt{2}\right\} + \left\{3 - \sqrt{2}\right\} = 4$$
Analogamente, se per assurdo, fosse
$$a\,b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$
riuscirebbe
$$b = \frac{1}{a}\,\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$
contrariamente all'ipotesi che b sia irrazionale.
Si é quindi riconosciuto che il prodotto $a\,b$ non puó venire razionale.
Si osservi che, invece, il prodotto o il quoziente di due numeri entrambi irrazionali puó risultare razionale: ad esempio
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

1.6. Esercizio. *Provare che tra due numeri razionali cade necessariamente almeno un irrazionale.*

Soluzione:

Indichiamo con $a < b$ i due razionali assegnati e indichiamo con
$$d = b - a > 0$$
la loro differenza. Certamente d é razionale ed é diverso da $\sqrt{2}$ che, invece é irrazionale.
Se riesce
$$0 < \sqrt{2} < d$$

allora il numero $c = a + \sqrt{2}$ é irrazionale e cade tra a e b.
Se invece riesce

$$0 < d < \sqrt{2}$$

allora, per la proprietá archimedea esiste un intero n_0 tale che

$$\sqrt{2} < n_0 d \quad \to \quad \frac{\sqrt{2}}{n_0} < d$$

allora il numero

$$c = a + \frac{\sqrt{2}}{n_0}$$

é irrazionale e cade tra a e b.

1.7. Esercizio. *Provare che*

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$$

é irrazionale.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Se per assurdo fosse

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

si avrebbe

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} - \sqrt{2}$$

elevando al cubo, membro a membro, si ha

$$2 = \left(\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right)^3 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\left(\frac{p}{q}\right)^2 \sqrt{2} + 3\left(\frac{p}{q}\right)\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^3$$

da cui

$$2 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\left(\frac{p}{q}\right)^2 \sqrt{2} + 6\left(\frac{p}{q}\right) - 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = -\frac{2 - \left(\frac{p}{q}\right)^3 - 6\left(\frac{p}{q}\right)}{3\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2} \in \mathbb{Q}$$

relazione assurda stante il fatto che $\sqrt{2}$ é noto essere irrazionale.

1.8. Esercizio. *Provare che*
$$\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$$
é irrazionale.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Se per assurdo riuscisse
$$\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$$
ne seguirebbe
$$\sqrt[3]{2}=\frac{p}{q}-\sqrt{3}$$
da cui, elevando al cubo membro a membro si avrebbe
$$2=\left(\frac{p}{q}-\sqrt{3}\right)^3=\left(\frac{p}{q}\right)^3-3\left(\frac{p}{q}\right)^2\sqrt{3}+3\left(\frac{p}{q}\right)\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^3$$
da cui
$$2=\left(\frac{p}{q}\right)^3-3\left(\frac{p}{q}\right)^2\sqrt{3}+9\left(\frac{p}{q}\right)-3\sqrt{3}$$
da cui ancora si avrebbe
$$\sqrt{3}=-\frac{2-\left(\frac{p}{q}\right)^3-9\left(\frac{p}{q}\right)}{3\left(\frac{p}{q}\right)^2+3}\in\mathbb{Q}$$
relazione impossibile stante che é noto che $\sqrt{3}$ é irrazionale.

1.9. Esercizio. *Indicati con*

$$E_n = \bigcup_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^k}, \frac{3}{2^{k+1}} \right), \quad n = 1, 2, 3, 4$$

- *esaminare se gli E_n sono intervalli,*
- *indicare loro minoranti e loro maggioranti,*
- *determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore per ciascuno degli E_n indicati.*

SOLUZIONE:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \left(1, \frac{3}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\
E_2 &= \left(1, \frac{3}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \bigcup \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right) \\
E_3 &= \left(1, \frac{3}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \bigcup \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right) \bigcup \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{16}\right) \\
E_4 = & \ \dots
\end{aligned}$$

- Gli $E_1, E_2, \dots$ non sono intervalli: sono unioni di intervalli aperti disgiunti.
- Lo zero é un minorante di tutti gli E_n, $\dfrac{3}{2}$ é un loro maggiorante comune.
- $\frac{3}{2}$ é l'estremo superiore di tutti gli E_n, gli estremi inferiori sono diversi, riesce

$$\inf E_n = \frac{1}{2^n}$$

1.10. Esercizio. *Indicato con E l'insieme dei numeri reali*

$$x = r + s\sqrt{2}$$

al variare di r ed s nei razionali,

- *esaminare se E contiene numeri razionali,*
- *verificare che il prodotto di due elementi x_1 e x_2 di E appartiene ancora ad E,*
- *verificare che il quoziente di due elementi x_1 e x_2 di E appartiene ancora ad E.*

SOLUZIONE:

- L'insieme E contiene tutto $\mathbb{Q}$: basta osservare gli elementi di E relativi alla scelta $s = 0$.
-

$$\left(r_1 + s_1\sqrt{2}\right)\left(r_2 + s_2\sqrt{2}\right) = (r_1 r_2 + 2 s_1 s_2) + (r_1 s_2 + s_1 r_2)\sqrt{2} \in E$$

-

$$\frac{r_1 + s_1\sqrt{2}}{r_2 + s_2\sqrt{2}} = \frac{\left(r_1 + s_1\sqrt{2}\right)\left(r_2 - s_2\sqrt{2}\right)}{\left(r_2 + s_2\sqrt{2}\right)\left(r_2 - s_2\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(r_1 + s_1\sqrt{2}\right)\left(r_2 - s_2\sqrt{2}\right)}{r_2^2 - 2s_2^2} \in E$$

Il denominatore $r_2^2 - 2s_2^2$ potrebbe essere zero

$$2 = \left(\frac{r_2}{s_2}\right)^2$$

e delegittimare l'operazione ?

... no !
Sappiamo benissimo infatti
che 2 non é il quadrato di alcun razionale !