ANALISI

Soluzioni secondo appello

28 febbraio 2012

2.1. Esercizio. *Assegnata*

$$f(x) = \sqrt{x(x^2 + 2x - 3)}$$

a) Determinare il dominio di definizione di f.
b) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza.
c) Determinare gli estremi inferiore e superiore di f.
d) Tracciare il grafico della funzione.

SOLUZIONE:

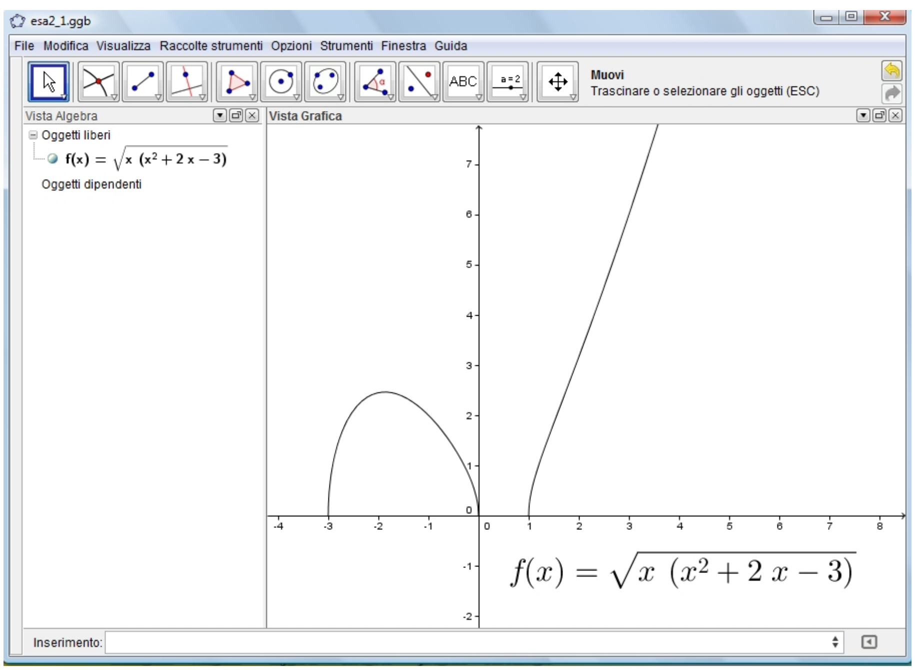

FIGURA 1. $f(x) = \sqrt{x(x^2 + 2x - 3)}$

Il dominio di $f(x)$ é l'insieme D in cui riesce $x(x^2 + 2x - 3) \geq 0$: basta osservare i grafici dei due fattori x e $x^2 + 2x - 3$ per riconoscere gli intervalli in cui il loro prodotto é ≥ 0:

$$D: \quad [-3,\, 0] \cup [1,\, +\infty)$$

Tenuto conto che

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 4x - 3}{2\sqrt{x(x^2 + 2x - 3)}}$$

é facile riconoscere che

$$3x^2 + 4x - 3 = 0 \quad \to \quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{2 + \sqrt{13}}{3} \approx & -1,8 \\ \\ x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{13}}{3} \approx & 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-3,\, x_1] & f'(x) \geq 0 & f(x) \nearrow \\ \\ x \in [x_1,\, 0] & f'(x) \leq 0 & f(x) \searrow \\ \\ x \in [1,\, +\infty) & f'(x) \geq 0 & f(x) \nearrow \end{cases}$$

L'estremo inferiore di $f(x)$, funzione a valori non negativi, é 0, ed é anche minimo in quanto, ad esempio $f(0) = 0$.
L'estremo superiore non esiste, ovvero sup $f(x) = +\infty$, tenuto conto

$$\lim_{x \to +\infty} x(x^2 + 2x - 3) = +\infty \quad \to \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2.2. Esercizio. *Sia*

$$f(x) = \log(x + 3) - \arctan(x), \qquad x \in [-1, 2].$$

a) Determinare minimo e massimo di f in $[-1, 2]$ e l'insieme immagine $f([-1, 2])$.
b) Verificare che f è invertibile in $[-1, 2]$.
c) Verificare che la funzione inversa $f^{-1}(y)$ è derivabile nel punto $y_0 = \log(3)$ e calcolare quanto vale la derivata di $f^{-1}(y)$ nel punto $y_0 = \log(3)$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Tenuto conto che

$$x \in [-1, 2] \quad \to \quad x + 3 \geq 2 > 0$$

la funzione $f(x)$ é continua e derivabile nell'intervallo $[-1, 2]$.

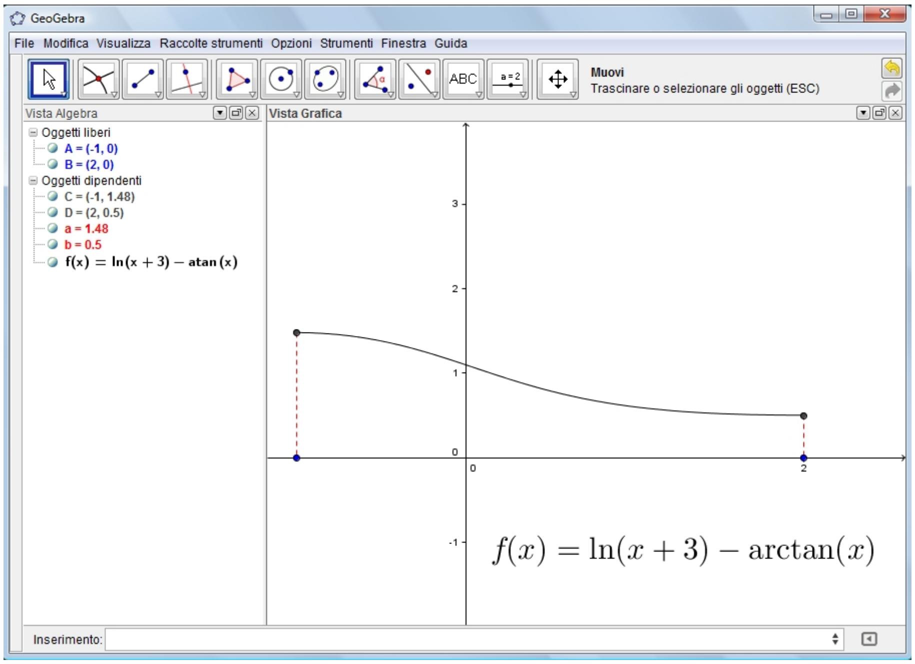

FIGURA 2. $f(x) = \log(x+3) - \arctan(x), \qquad x \in [-1, 2].$

Pertanto esistono minimo e massimo e sono assunti

- o nei punti in cui la derivata prima si annulla,
- o agli estremi dell'intervallo.

$$f'(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2 - x - 2}{(x+3)(1+x^2)}$$

$$f'(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x = & -1 \\ x = & 2 \end{cases}$$

mentre riesce

$$\forall x \in (-1, 2): \quad f'(x) < 0$$

Il minimo e il massimo sono pertanto i valori assunti agli estremi

$$\begin{array}{llll} \textit{minimo} & = f(2) & = \log(5) - \arctan(2) & \approx 0.5, \\ \textit{massimo} & = f(-1) & = \log(2) + \arctan(1) & \approx 1.5 \end{array}$$

La proprietá osservata $\forall x \in (-1, 2): \quad f'(x) < 0$ permette di riconoscere che $f(x)$ é monotona strettamente decrescente in $[-1, 2]$ e pertanto é invertibile in tale intervallo.
La regola di derivazione delle funzioni inverse

$$y_0 = f(x_0) \quad \rightarrow \quad \left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

applicata al caso $y_0 = \log(3)$ conduce a

$$\log(x_0+3) - \arctan(x_0) = \log(3) \quad \to \quad x_0 = 0$$

Si ha pertanto

$$\left(f^{-1}(\log(3))\right)' = \frac{1}{\frac{1}{3}-1} = -\frac{3}{2}$$

2.3. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$F(x) = x + \int_0^x |t| e^{-t^2} dt$$

a) calcolare i valori $F(0)$, $F(\sqrt{\log(2)})$ e $F(-\sqrt{\log(2)})$;
b) calcolare la derivata $F'(x)$;
c) verificare che $F(x)$ è una funzione dispari, cioè $F(-x) = -F(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
d) determinare i limiti di $F(x)$ per $x \to \pm\infty$.

Soluzione:

$$\begin{cases} F(0) & = 0 + \displaystyle\int_0^0 |t| e^{-t^2} dt & = 0 \\ F(\sqrt{\log(2)}) & = \sqrt{\log(2)} + \displaystyle\int_0^{\sqrt{\log(2)}} t e^{-t^2} dt & = \sqrt{\log(2)} + \dfrac{1}{4} \\ F(-\sqrt{\log(2)}) & = -\sqrt{\log(2)} + \displaystyle\int_{-\sqrt{\log(2)}}^0 t e^{-t^2} dt & = -\sqrt{\log(2)} - \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

La regola di derivazione discende dal teorema fondamentale del calcolo

$$F'(x) = 1 + |x| e^{-x^2}$$

Il carattere dispari di $F(x)$ corrisponde a riconoscere che

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}: \quad F(x) + F(-x) = 0}$$

Infatti

$$\left\{x+\int_0^x |t|e^{-t^2}dt\right\}+\left\{-x+\int_0^{-x} |t|e^{-t^2}dt\right\} = \int_0^x |t|e^{-t^2}dt+\int_0^{-x} |t|e^{-t^2}dt$$

La sostituzione $t=-\tau$ trasforma il secondo integrale in

$$-\int_0^x |\tau|e^{-\tau^2}d\tau$$

da cui l'asserto

$$\int_0^x |t|e^{-t^2}dt-\int_0^x |\tau|e^{-\tau^2}d\tau=0$$

Tenuto conto che

- per $x\geq 0$ riesce $\displaystyle\int_0^x |t|e^{-t^2}dt\geq 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

si riconosce che $F(x)\geq x$ e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$$

Il limite per $x\to-\infty$ vale necessariamente $-\infty$ in quanto $F(x)$ é dispari.

Osservazione 2.1. *L'espressione di $F(x)$, almeno per $x\geq 0$ puó essere calcolata esplicitamente*

$$F(x)=x+\int_0^x te^{-t^2}dt=x-\frac{1}{2}\,e^{-t^2}\Big|_0^x=\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

Per $x\leq 0$ puó essere dedotta, oltre che con analoga integrazione esplicita, ricordando il carattere dispari di $F(x)$.

2.4. Esercizio.

a) Determinare il polinomio di Taylor di grado due e punto iniziale $x_0=0$ della funzione $f(x)=\log(1+x)$,
b) utilizzare il polinomio per calcolare approssimativamente $\log(3/2)$,
c) mostrare che il valore del polinomio approssima il valore del logaritmo con un errore inferiore a 0.05.

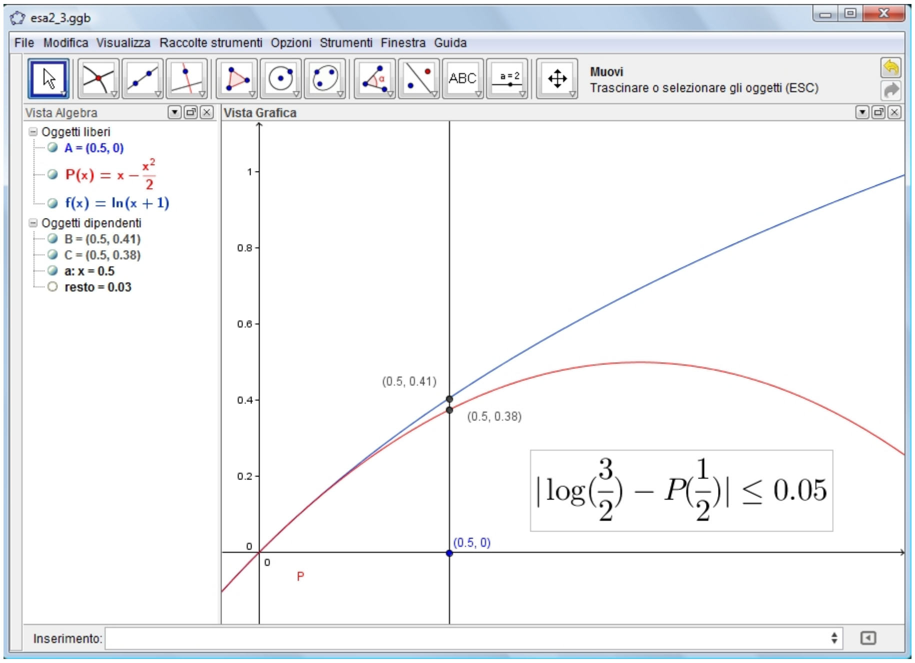

FIGURA 3. $f(x) = \log(1+x)$, $P(x) = x - \frac{x^2}{2}$

SOLUZIONE:

Il polinomio richiesto é, detta $f(x) = \log(1+x)$, il seguente

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

da cui tenuto conto che

$$f(0) = \log(1) = 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x+1},\ f'(0) = 1, \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2},\ f''(0) = -1$$

riesce

$$P(x) = x - \frac{1}{2}x^2$$

Il calcolo di $\log(3/2)$ corrisponde al calcolo di

$$\log(1 + 1/2)$$

e pertanto l'approssimazione richiesta corrisponde al valore

$$P(1/2) = \frac{3}{8} = 0.365$$

Tenuto conto dell'espressione di Lagrange per il resto tra $f(x)$ e il polinomio di ordine 2 si ha

$$|\log(1+x) - P(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3\right|$$

ovvero

$$|\log(3/2) - P(1/2)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\right|, \quad \xi \in [0, 1/2]$$

Tenuto conto che

$$f'''(\xi) = \frac{2}{(\xi+1)^3} \quad \to \quad |f'''(\xi)| \leq 2$$

riesce

$$|\log(3/2) - P(1/2)| \leq \frac{2}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{3\,.\,2^3} = \frac{1}{24} \approx 0,0417 < 0.05$$

2.5. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale*

$$y''(t) + 4\,y(t) = 3\cos(t) - 5\sin(3t)$$

a) determinarne la soluzione generale ,
b) determinare la soluzione $\bar{y}(t)$ che verifica le condizioni iniziali $\bar{y}(0) = 2,\ \bar{y}'(0) = 5$.

SOLUZIONE:

Le soluzioni dell'equazione omogenea $y''(t) + 4\,y(t) = 0$ sono

$$y_0(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t), \qquad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$$

Una soluzione particolare $y_1(t)$ dell'equazione $y''(t) + 4\,y(t) = 3\cos(t)$ puó essere cercata nella forma

$$y_1(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$$

Sostituendo si ottiene

$$3A\cos(t) + 3B\sin(t) = 3\cos(t) \quad \to \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

da cui

$$y_1(t) = \cos(t)$$

Una soluzione particolare $y_2(t)$ dell'equazione $y''(t)+4\,y(t) = -5\sin(3t)$ puó essere cercata nella forma

$$y_2(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$$

Sostituendo si ottiene

$$-5A\cos(3t) - 5B\sin(3t) = -5\sin(3t) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

da cui

$$y_2(t) = \sin(3t)$$

Tutte le soluzioni dell'equazione completa assegnata sono pertanto espresse da

$$y(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + \cos(t) + \sin(3t)$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato corrisponde alla scelta delle due costanti c_1, c_2 seguenti

$$\begin{cases} c_1 + 1 & = 2 \\ 2c_2 + 3 & = 5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad c_1 = 1,\ c_2 = 1$$

da cui

$$\overline{y}(t) = \cos(2t) + \sin(2t) + \cos(t) + \sin(3t)$$