ANALISI

Foglio di esercizi

18 novembre 2011

7.1 Esercizio

Dire quali delle seguenti funzioni verificano le ipotesi del teorema di Weierstrass e quali ammettono massimi e/o minimi negli intervalli indicati:

$$\begin{array}{rl}
\textbf{(i)} & f(x) = [x^2],\ x \in [0,2]; \\
\textbf{(ii)} & g(x) = \sin(\frac{1}{x}),\ x \in (0, \frac{1}{\pi}); \\
\textbf{(iii)} & h(x) = \arcsin(x),\ x \in [-1,1]; \\
\textbf{(iv)} & k(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}; \\
\textbf{(v)} & v(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}.
\end{array}$$

7.2 Esercizio

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni scrivendo il rapporto incrementale e calcolandone il limite

$$\frac{1}{\cos x} \quad \text{in} \quad x_0 = 0; \quad x\sin x \quad \text{in} \quad x_0 = \frac{\pi}{2}; \quad \exp(x^2) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

7.3 Esercizio

Sia $f(x) = x^2 + ax + b$. Determinare i valori a e b in modo che il grafico di $f(x)$ passi per il punto $(2,4)$ e che abbia in tale punto come tangente la retta $y = 2x$.

7.4 Esercizio

Dire se le funzioni

$$x|x|, \quad |x\sin x|, \quad e^{-|x|}, \quad x\ \sin(|x|), \quad \sqrt{x}\sin x$$

sono derivabili per $x = 0$.

7.5 Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

i) stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x = 0$;
ii) stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f è derivabile in $x = 0$;
iii) stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la derivata f' è continua in $x = 0$.

7.6 Esercizio

Utilizzando le regole di derivazione, calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$\exp(\sqrt{x}); \quad \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}; \quad \frac{x+1}{x^2+1}; \quad \sin\sqrt{1+x^2};$$

$$x \,\mathrm{arctg} x; \quad \sin(\cos(x)); \quad \log(1+\cos^2 x); \quad \frac{\arcsin x}{1-x^2}.$$

7.7 Esercizio

Determinare in ciascuno dei due casi seguenti

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax+b & x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & |x| > 1 \\ \\ ax^2+b & |x| \leq 1 \end{cases}$$

i coefficienti a e b in modo che le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano derivabili in $x = 1$.

7.8 Esercizio

Sia g derivabile in $\mathbb{R}$.

i) Dimostrare che $f(x) = |g(x)|$ è derivabile in tutti i punti x tali che $g(x) \neq 0$ e calcolare la derivata in tali punti.

ii) Dimostrare che f non è derivabile nei punti x tali che $g(x) = 0$ e $g'(x) \neq 0$.

iii) Dimostrare che la funzione è derivabile nei punti x tali che $g(x) = 0$ e $g'(x) = 0$.

7.9 Esercizio

Data la funzione $f(x) = x^3$, determinare un punto $\xi \in (0,2)$ in cui la retta tangente al grafico di f sia parallela alla corda passante per $(0,0)$ e $(2,8)$.

7.10 Esercizio

Posto $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x^2$

i) scrivere la relazione di Cauchy nell'intervallo $[0,x]$;

ii) dedurre, dalla relazione trovata in i), la disuguaglianza

$$|\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2}.$$