ANALISI

*Foglio di esercizi*

21 ottobre 2011

## 3.1 Esercizio

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia $(a_n)_n$ la successione

$$a_n = (1+\lambda)^n \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

*(i)* Determinare per quali $\lambda$ é limitata.

*(ii)* Determinare per quali $\lambda$ é convergente.

*(iii)* Determinare per quali $\lambda$ é monotona.

## 3.2 Esercizio

Sia $(a_n)_n$ la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{1+n^2} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

*(i)* Calcolare i primi cinque termini.

*(ii)* Determinare gli estremi inferiore e superiore.

*(iii)* Verificare che risulta

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

*(iv)* Determinare una sottosuccessione monotona.

## 3.3 Esercizio

Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+\sin(n)\log(n)}{n}; \qquad \lim_{n\to+\infty} \cos(n)\left(\log(\sqrt{n}+1)-\log(\sqrt{n+1})\right);$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^n - 2^n; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{2^n-5^n}; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n2^n}{3^n}; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!+2^n}{(n+1)!};$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan(n^2)}{n}.$$

## 3.4 Esercizio

Calcolare i limiti seguenti al variare di $a > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n - \frac{1}{n}; \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\sin(n^{-a}); \qquad \lim_{n\to+\infty} a^n - n^a.$$

## 3.5 Esercizio

Sia $(a_n)_n$ la successione definita come

$$a_n = n^2 + An + B \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

con $A$ e $B$ numeri reali. Per quali valori di $A$ e $B$ la successione é strettamente monotona? Per quali é definitivamente monotona?

## 3.6 Esercizio

*(i)* Facendo uso del Teorema dei due carabinieri, verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2^n}} = 1.$$

*(ii)* Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$.

*(iii)* Dimostrare che se $(a_n)_n$ é una qualsiasi successione limitata di numeri positivi, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + a_n} = 1.$$

## 3.7 Esercizio

Sia

$$S_n = 1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{100}\right)^n \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

*(i)* Calcolare i numeri $S_n$ esplicitamente.

*(ii)* Determinare il limite

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

*(iii)* Determinare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{1 + S_n^2}.$$

## 3.8 Esercizio

Assegnati $p,\ q\ \in \mathbb{N}$ sia $(a_n)_n$ la successione

$$a_n = \frac{1+n^p}{1+n^q} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

*(i)* Determinare per quali $p,\ q$ la successione é limitata,

*(ii)* Determinare per quali $p,\ q$ la successione é convergente,

*(iii)* Determinare per quali $p,\ q$ la successione ha come limite 1.

## 3.9 Esercizio

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano

$$a_n = \sqrt[n]{x}, \quad b_n = \sqrt[n^2]{x^2}, \quad c_n = \sqrt[n^3]{x},$$

con $x \geq 0$.

*(i)* Esaminare se le successioni $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$, sono limitate.

*(ii)* In caso positivo, determinare gli estremi inferiore e superiore.

*(iii)* Esaminare per quali $x \geq 0$ siano monotone crescenti, per quali decrescenti, per quali non monotone.

*(iv)* Esaminare se sono convergenti.

## 3.10 Esercizio

Il numero periodico

$$x = 0.3434343434....$$

puó essere letto come il limite della successione

$$S_n = \frac{34}{100} + \frac{34}{100^2} + \cdots + \frac{34}{100^n}$$

*(i)* Determinare esplicitamente i numeri razionali $S_n$.

*(ii)* Determinare il

$$\lim_{n\to\infty} S_n.$$

*(iii)* Detto $y = 0.3535353535...$, determinare l'espressione razionale del prodotto $x \cdot y$

## 3.11 Esercizio

Sia $h > 0$ e

$$a_n = (1+h)^n \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Posto

$$b_n = \frac{n^2}{a_n} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

provare che la successione $(b_n)_n$ é convergente.

## 3.12 Esercizio

Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni convergenti

*(i)* Esaminare in quali casi le successioni

$$m_n = \min\{a_n, b_n\}, \quad M_n = \max\{a_n, b_n\}$$

sono convergenti,

*(ii)* In quali casi almeno una di esse é convergente?

*(iii)* Posto

$$c_n = \frac{m_n + M_n}{2} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

cosa puó dirsi della successione $(c_n)_n$?