ANALISI

Foglio di esercizi

20 gennaio 2012

12.1 Esercizio

Dire se i seguenti insiemi, in $\mathbb{R}^2$, sono o non sono aperti, chiusi , limitati:

i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$

ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3\}$

iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$

iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2 + y^2) \leq 1/2\}$

v) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{Z}\}$

vi) $\{(n, m) : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\}$

12.2 Esercizio

Posto

$$P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{\sin(n)}{n}\right), \quad n \geq 1,$$

stabilire se la successione $\{P_n\}$ di $\mathbb{R}^3$ è convergente.

12.3 Esercizio

Posto $P_n = ((-1)^n, (-1)^{n^2}, (-1)^{n^3})$, $n \geq 1$,

i) provare che la successione $\{P_n\}$ è limitata;

ii) trovare almeno due sottosuccessioni convergenti.

12.4 Esercizio

Data la curva di equazioni parametriche (*asteroide*)

$$x = a\cos^3 t;\ y = a\sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (a > 0)$$

calcolarne la lunghezza.

12.5 Esercizio

Data la curva di equazioni parametriche (*elica cilindrica*)

$$x = \cos t;\ y = \sin t;\ z = t, \quad 0 \leq t \leq 6\pi$$

verificare che la curva è regolare e se ne calcoli la lunghezza.

12.6 Esercizio

Calcolare la lunghezza della curva in forma polare $\rho = e^{\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ (*spirale logaritmica*).

12.7 Esercizio

Calcolare la lunghezza della curva in forma polare $\rho = (1 + \cos\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$ (*cardioide*).

12.8 Esercizio

Determinare e disegnare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni

$f(x, y) = \sqrt{x\,y + y^2}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{y^2 - 4}$, $f(x, y) = \log(4 - x^2 - 9y^2)$.

12.9 Esercizio

Determinare l'insieme in cui

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2/y & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

è continua. Disegnare le linee di livello $f(x, y) = c$.

12.10 Esercizio

Data la funzione $f(x, y) = \dfrac{x^4}{x^4 + y^2}$

i) determinare l'insieme di definizione di f;

ii) calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$

iii) disegnare le linee di livello $f(x, y) = c$.

12.11 Esercizio

Sia

$$f(x, y) = x^2 y$$

i) Disegnare le linee di livello $\{f(x, y) = c\}$ per $c = 0\,,\, 1\,,\, 2$.

ii) Calcolare le derivate parziali di f nel punto $(2, 1)$ e disegnare il gradiente in tale punto.

iii) Disegnare la direzione del gradiente in almeno quattro punti presi sulla linea di livello $f(x, y) = 2$.

12.12 Esercizio

Siano

$$f(x,y) = 3xy + 4x - 4x^2 - 2y^2 - 4y, \quad g(x,y) = 4xy + 4x + 2y^2 - 4y$$

i) determinare i punti stazionari o critici delle due funzioni,

ii) decidere se le immagini $f(\mathbb{R}^2)$ e $g(\mathbb{R}^2)$ sono insiemi limitati .

12.13 Esercizio

Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$, sia f definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x+y) & x+y<0, \\ ax+by+c & x+y \geq 0 \end{cases}$$

Per quali a, b, c la funzione f è continua in $\mathbb{R}^2$?

12.14 Esercizio

Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) dire se è continua;

ii) calcolare le derivate parziali nei punti $(x,y) \neq (0,0)$;

iii) calcolare, servendosi dei giusti rapporti incrementali, le derivate parziali nel punto $(0,0)$.

12.15 Esercizio

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, sia f definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x^2+y^2) + b & \text{se} \quad x^2+y^2 < 1 \\ (\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2 & \text{se} \quad x^2+y^2 \geq 1 \end{cases} .$$

i) Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $\mathbb{R}^2$?

ii) Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ esistono $f_x(1,0)$ e $f_y(1,0)$?

12.16 Esercizio

Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\right)^2 & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

dimostrare che

i) f non è continua in $(0,0)$;

ii) f ammette le derivate parziali f_x e f_y in $(0,0)$.

12.17 Esercizio

Calcolare i seguenti integrali curvilinei lungo la curva γ:

$$\int_\gamma x^7 ds, \quad \gamma: \, y=x^5, \, 0\leq x\leq 2;$$

$$\int_\gamma (2+x^2y)\, ds, \quad \gamma: \, x^2+y^2=1, \, y\geq 0;$$

$$\int_\gamma y\, ds, \quad \gamma: \, x=t^2, \, y=t, \, 0\leq t\leq 2;$$

$$\int_\gamma \frac{y}{x}\, ds, \quad \gamma: \, x=t^4, \, y=t^3, \, \frac{1}{2}\leq t\leq 1;$$

$$\int_\gamma xy^4\, ds, \quad \gamma: \, x^2+y^2=16, \, x\geq 0.$$