Corsi di Laurea in Fisica, Fisica e Astrofisica

Analisi A.A. 2011-2012 - Foglio 1

Esercizio 1. Determinare esplicitamente gli insiemi seguenti:

$$A := \{x \in \mathbb{R} \,:\, 3 - x^2 \geq 0\}, \qquad B := \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x^2 - 3| > 0\}.$$

Esercizio 2. Determinare esplicitamente gli insiemi seguenti:

$$A := \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x + 3| > 5\}, \qquad B := \{x \in \mathbb{R} \,:\, \quad |x + 2| \leq 3\}.$$

Inoltre:

- riconoscere se sono insiemi limitati;
- determinare gli eventuali estremi inferiore e superiore;
- riconoscere se sono anche minimo e massimo.

Esercizio 3. Disegnare l'insieme Ω definito dal seguente sistema di disuguaglianze:

$$\begin{cases} |x + 2| \leq 4 \\ x^2 - 5x > -4. \end{cases}$$

Inoltre:

- riconoscere se è limitato;
- determinare gli eventuali estremi inferiore e superiore;
- riconoscere se sono anche minimo e massimo.

Esercizio 4. Determinare l'insieme E delle soluzioni della disuguaglianza

$$|x - a| < |x - b|$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$. Inoltre:

- riconoscere se è limitato;
- determinare gli eventuali estremi inferiore e superiore;
- riconoscere se sono anche minimo e massimo.

Esercizio 5. Sia $a \neq 0$ razionale e b irrazionale. Provare che

- $a + b$ è irrazionale,
- ab è irrazionale.

Esercizio 6. Provare che tra due numeri razionali cade necessariamente almeno un irrazionale.

Esercizio 7. Provare che

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$$

è irrazionale.

Esercizio 8. Provare che

$$\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$$

è irrazionale.

Esercizio 9. Indicati con

$$E_n = \bigcup_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^k}, \frac{3}{2^{k+1}} \right), \quad n = 1, 2, 3, 4$$

- esaminare se gli E_n sono intervalli,
- indicare loro minoranti e loro maggioranti,
- determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore per ciascuno degli E_n indicati.

Esercizio 10. Indicato con E l'insieme dei numeri reali

$$x = r + s\sqrt{2}$$

al variare di r ed s nei razionali,

- esaminare se E contiene numeri razionali,
- verificare che il prodotto di due elementi x_1 e x_2 di E appartiene ancora ad E,
- verificare che il quoziente di due elementi x_1 e x_2 di E appartiene ancora ad E.