Esonero di Istituzioni di Matematica - 26.01.2010
Corso di Laurea in Scienze Naturali - Canale AL

Si prega di consegnare questo foglio assieme al compito.
È ammesso l'utilizzo di formulari, appunti delle lezioni, libri di Analisi (solo teoria). Non è ammesso l'utilizzo di eserciziari di Analisi.

Esercizio per chi non ha superato il I esonero.

Determinare insieme di definizione, limiti agli estremi dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, derivata prima, eventuali punti di massimo e minimo, intervalli di crescenza e decrescenza, derivata seconda, intervalli di convessità (concavità verso l'alto) e concavità (concavità verso il basso), eventuali punti di flesso, e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\log(x)}}.$$

Esercizi per il II esonero.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale k

$$\begin{cases} 3k\,x + 3y = 3 \\ 2k\,x + (k-2)y + z = k \\ kx + y - 2z = 5 - 2k. \end{cases}$$

(a) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema ha soluzione unica (facoltativo: determinare le soluzioni in funzione di k).

(b) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema ha infinite soluzioni e, per tali valori, calcolare tutte le soluzioni.

(c) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema non ammette soluzione.

Esercizio 2. Determinare insieme di definizione, limiti agli estremi dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, derivata prima, eventuali punti di massimo e minimo, intervalli di crescenza e decrescenza, derivata seconda, intervalli di convessità (concavità verso l'alto) e concavità (concavità verso il basso), eventuali punti di flesso, e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = x\left(2\,\log\left(x^2+1\right)+1\right).$$

Esercizio 3.

(a) Risolvere (per sostituzione) il seguente integrale

$$\int \frac{\sin(x)\,\cos(x)}{(2-\cos(x))\,(1+\cos(x))}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{t}{1-t^2}\,y(t) = h(t) \qquad \text{per ogni } t \in (-1,1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

nei seguenti casi: (1) $h(t) = 0$; (2) $h(t) = \arcsin(t)$.

Esercizio in più per chi ha terminato il II esonero.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Dimostrare che la funzione f è limitata, cioè che esiste un numero positivo M tale che

$$-M \le f(x) \le M \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Esonero di Istituzioni di Matematica - 26.01.2010
Corso di Laurea in Scienze Naturali - Canale AL

Si prega di consegnare questo foglio assieme al compito. È ammesso l'utilizzo di formulari, appunti delle lezioni, libri di Analisi (solo teoria). Non è ammesso l'utilizzo di eserciziari di Analisi.

Esercizio per chi non ha superato il I esonero.

Determinare insieme di definizione, limiti agli estremi dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, derivata prima, eventuali punti di massimo e minimo, intervalli di crescenza e decrescenza, derivata seconda, intervalli di convessità (concavità verso l'alto) e concavità (concavità verso il basso), eventuali punti di flesso, e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\log(x)}}.$$

Esercizi per il II esonero.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale k

$$\begin{cases} (k+2)\,x + 3z = 1 \\ 2k\,x + (k-2)\,y - z = k \\ -2k\,x + 2y + z = 0. \end{cases}$$

(a) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema ha soluzione unica (facoltativo: determinare le soluzioni in funzione di k).

(b) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema ha infinite soluzioni e, per tali valori, calcolare tutte le soluzioni.

(c) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema non ammette soluzione.

Esercizio 2. Determinare insieme di definizione, limiti agli estremi dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, derivata prima, eventuali punti di massimo e minimo, intervalli di crescenza e decrescenza, derivata seconda, intervalli di convessità (concavità verso l'alto) e concavità (concavità verso il basso), eventuali punti di flesso, e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = x\left(3 + \log\left(x^2+2\right)\right).$$

Esercizio 3.

(a) Risolvere (per sostituzione) il seguente integrale

$$\int \frac{\sin(x)\,\cos(x)}{(3+\sin(x))\,(1-\sin(x))}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - \dfrac{2t}{t^2+1}\,y(t) = h(t) & \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

nei seguenti casi: (1) $h(t) = 0$; (2) $h(t) = \arctan(t)$.

Esercizio in più per chi ha terminato il II esonero.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Dimostrare che la funzione f è limitata dal basso, cioè che esiste un numero positivo M tale che

$$f(x) \geq -M \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$