Esame di Istituzioni di Matematica - 02.02.2010
Corso di Laurea in Scienze Naturali - Canale AL
Prof. A. Davini

È ammesso l'utilizzo di formulari, appunti delle lezioni, libri di Analisi (solo teoria). Non è ammesso l'utilizzo di eserciziari di Analisi.

Esercizio 1. Considerare il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale k:

$$\begin{cases} -3k\,x - k\,y + 2z = -3\,k \\ \quad k\,z - 2y = 1 \\ -9x - 5y + 5z = 1 - 3\,k. \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori di k il sistema ammette una sola soluzione e calcolarla esplicitamente in funzione di k.

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette più di una soluzione; per ognuno di tali valori del parametro calcolare esplicitamente tutte le soluzioni del sistema.

Esercizio 2. Determinare insieme di definizione, limiti agli estremi dell'insieme di definizione, eventuali zeri, derivata prima, eventuali punti di massimo e minimo e intervalli di crescenza e decrescenza, derivata seconda, intervalli di convessità (concavità verso l'alto) e concavità (concavità verso il basso), eventuali punti di flesso per la funzione

$$f(x) = -x\,\mathrm{e}^{-1/x}.$$

Tracciare inoltre un grafico approssimativo di $f(x)$.

Esercizio 3. Risolvere il problema di Cauchy

$$y'(t) = -\frac{3}{t}\,y + h(t), \qquad y(2) = 2$$

nei seguenti casi: (1) $\quad h(t) = 0;$ $\qquad$ (2) $\quad h(t) = \mathrm{e}^{t^2}.$

Esercizio in più per chi ha già terminato i primi 3 esercizi.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty.$$

Dimostrare che

(a) esiste $r > 0$ tale che

$$f(x) \geq |x| \qquad \text{per ogni } x \in (-\infty, -r] \cup [r, +\infty);$$

(b) dedurre che esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) \geq |x| + M \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

(*Suggerimento:* la funzione $f(x) - |x|$ è continua in ogni intervallo del tipo $[-a, a]$ con $a > 0$.)