**Compito d'esame di Calcolo Differenziale**
**per Informatica e Tecnologie Informatiche**
**23/01/2009**
**Proff. A. Davini, M. Badii, C.Nebbia.**

**Esercizio 1.** Studiamo il grafico di

$$f(x) = \frac{x\,|x|}{x^2+1}$$

**(a)** Il denominatore è sempre strettamente positivo (è maggiore od uguale ad 1), dunque

$$\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}.$$

Per questa funzione si vede anche facilmente che

$$f(x) > 0 \quad \text{per } x > 0, \qquad\qquad f(x) < 0 \quad \text{per } x < 0.$$

**(b) Simmetrie.** La funzione è dispari, cioè $f(-x) = -f(x)$, dunque possiamo studiare la funzione in $[0, +\infty)$ e poi dedurre il comportamento di $f$ in $(-\infty, 0]$ con una simmetria rispetto all'origine degli assi. Osserviamo che

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \qquad \text{per } x \geq 0.$$

**(c)** Studiamo il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1.$$

Dunque $f$ ha asintoto orizzontale $y = 1$ per $x \to +\infty$.

**(d) Derivata prima.** In $x = 0$ la funzione potrebbe non essere derivabile, per la presenza del valore assoluto nella espressione di $f$. Guardiamo cosa succede al rapporto incrementale di $f(x)$ in $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x|x|}{x^2+1}\,\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2+1} = 0.$$

Dunque $f$ è derivabile in $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

Per $x > 0$ non abbiamo invece problemi di derivabilità (in quanto $f$ è prodotto di funzioni derivabili) e possiamo calcolare la derivata facendo direttamente uso delle regole di derivazione. Per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)' = \frac{2x(x^2+1) - x^2\,(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Dunque $f'(x) > 0$ per $x > 0$, cioè $f$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

**(e) Derivata seconda.** Calcoliamo la $f''$ per $x > 0$. Si ha:

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{2(x^2+1)^2 - (2x)\,2(x^2+1)\,(2x)}{(x^2+1)^4}.$$

Raccogliamo $2(x^2 + 1)$ a numeratore e semplifichiamo con il denominatore per ottenere:

$$f''(x) = 2\,\frac{x^2+1-4x^2}{(x^2+1)^3} = 2\,\frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}$$

Il denominatore è sempre positivo, dunque **per $\mathbf{x > 0}$**

$$f''(x) \geq 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad 1 - 3x^2 \geq 0,$$

cioè per $0 < x \leq 1/\sqrt{3}$.

**Esercizio 2.** **(a)** Ricordando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

se ne deduce che la successione $\dfrac{1}{n}(e^{1/n} - 1)$ è asintotica a $1/n^2$, cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}(e^{1/n}-1)}{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(e^{1/n}-1)}{1/n} = 1.$$

Dal criterio del confronto asintotico si ottiene che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}} - 1)$$

ha lo stesso carattere di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, quindi converge.

**(b)** La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+2n+2}{2n^3+3n+1}$$

ha lo stesso carattere di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, come si vede applicando il criterio del confronto asintotico. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2+2n+2}{2n^3+3n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2n^2+2n}{2n^3+3n+1} = \frac{1}{2}.$$

**Esercizio 3.** Per calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$

facciamo una doppia razionalizzazione:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} \, \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \, \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} \, \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{1}.$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} 2\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 0.$$

**Esercizio 4.** Poniamo $f(t) := \sin\sqrt{t}$. Dal teorema di Lagrange sappiamo che per ogni $x, y \geq 1$ esiste un punto $\xi$ interno all'intervallo di estremi $x$ e $y$ tale che

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi),$$

da cui, prendendo il valore assoluto,

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = |f'(\xi)|,$$

cioè $|f(x) - f(y)| \leq |f'(\xi)|\,|x - y|$. Poichè $|f'(\xi)| \leq \sup_{t\geq 1} |f'(t)|$, per concludere è sufficiente dimostrare che

$$\sup_{t\geq 1} |f'(t)| \leq \frac{1}{2}.$$

Calcoliamo la derivata di $f(t) = \sin\sqrt{t}$: si ha

$$f'(t) = \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}.$$

Ora, visto che $|\cos\sqrt{t}| \leq 1$ e che $\sqrt{t} \geq 1$ per $t \geq 1$, si ha

$$|f'(t)| = \frac{|\cos\sqrt{t}|}{2\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{per ogni } t \geq 1.$$

**Esercizio 5.** Determiniamo il valore di $a$ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ a & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

è continua in $x = 0$. Dobbiamo verificare che

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x).$$

Ora sappiamo che $f(0) = a$ e che, quando facciamo il limite di $f(x)$ per $x \to 0$, stiamo prendendo punti $x$ vicini a 0 ma diversi da 0. Dobbiamo quindi porre

$$a = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}.$$

Il limite si può calcolare facilmente con de l'Hopital, oppure raccogliendo $e^{-x}$ e usando il limite notevole $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\ e^{-x}\,\frac{e^{2x} - 1}{2x}\,2 = e^0 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

Dunque $f$ è continua in $x = 0$ per $a = 2$. Per verificare che $f$ è anche derivabile in $x = 0$ per tale valore, basta applicare la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Dobbiamo cioè verificare che esiste finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Si ha:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{e^h - e^{-h}}{h} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - e^{-h} - 2h}{h^2}.$$

Applichiamo due volte de l'Hopital:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - e^{-h} - 2h}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h + e^{-h} - 2}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - e^{-h}}{2} = 0.$$

Dunque la funzione $f$ è derivabile in $x = 0$ e risulta $f'(0) = 0$.