

Calcolo Differenziale per Informatica

Registro Didattico a.a. 2008–09

Lezione 1-2 (23 settembre 2008) Elementi di teoria degli insiemi. Numeri naturali, interi, razionali.

Lezione 3-4 (26 settembre 2008) Numeri e retta reali: somma, prodotto, ordinamento e loro proprietà. Densità dei numeri razionali in \mathbb{R} . Esistenza dei numeri irrazionali: $\sqrt{2}$ è irrazionale (con dimostrazione). Proprietà di completezza (o continuità) dei reali (assioma di Dedekind). Definizione di modulo in \mathbb{R} e sue proprietà. Distanza in \mathbb{R} . Intervalli in \mathbb{R} . Esercizi proposti.

Lezione 5-6 (30 settembre 2008) Definizione di massimo e minimo, di maggiorante e minorante, di estremo superiore ed inferiore di un sottoinsieme A di \mathbb{R} . Definizione di insieme limitato superiormente, limitato inferiormente, limitato. Teorema di esistenza dell'estremo superiore (e inferiore) con dimostrazione. Esempi ed esercizi proposti.

Lezione 7-8 (3 ottobre 2008) Nozione di funzione, definizione di funzione iniettiva e surgettiva, grafico di una funzione. Esempi di funzioni reali di variabile reale e relativi grafici: retta $mx + q$, x^2 , $|x|$, $\text{sign}(x)$, parte intera di x , parte frazionaria di x . Operazioni elementari: somma, differenza, prodotto e rapporto di funzioni.

Lezione 9-10 (7 ottobre 2008) Funzioni pari e dispari, simmetrie dei relativi grafici. Composizione di funzioni ed esempi. Inverse di funzioni iniettive. Grafico di f^{-1} a partire dal grafico di f . Calcolo della funzione inversa in alcuni esempi specifici. Esempi ed esercizi proposti.

Lezione 11-12 (10 ottobre 2008) Definizione di funzione monotona e strettamente monotona (crescente, decrescente). Esempi di funzioni strettamente monotone: rette, $f(x) = x^3$ per $x \in \mathbb{R}$. Somma e composizione di funzioni strettamente crescenti e/o decrescenti. Relazione tra stretta monotonia e iniettività. Funzione esponenziale a^x e funzione logaritmo di base a (per a positivo e diverso da 1): proprietà e relativi grafici. Caso $a = e$. Esempi ed esercizi proposti.

Lezione 13-14 (14 ottobre 2008) Inverse di funzioni non iniettive: restrizione del dominio. Funzioni trigonometriche inverse: arcsin, arccos, arctan. Successioni: definizione ed esempi. Limite di una successione: definizione ed esempi. Successioni convergenti, divergenti, non regolari. Teorema di unicità del limite (con idea della dimostrazione). Esercizi proposti: verifica di alcuni limiti di successioni usando la definizione di limite.

Lezione 15-16 (21 ottobre 2008) Successioni limitate. Teorema sulla limitatezza delle successioni convergenti (solo enunciato). Esempi di successioni infinitesime. Operazioni con i limiti: limite della somma, della differenza, del prodotto, del rapporto di due successioni. Forme indeterminate. Esempi ed esercizi proposti.

Lezione 17-18 (4 novembre 2008) Teoremi sulle successioni: permanenza del segno, monotonia del limite (con dimostrazioni), teorema dei due carabinieri (enunciato). Alcuni limiti notevoli: a^n al variare di $a \in \mathbb{R}$ (con dimostrazione), $\sqrt[n]{a}$ per $a > 0$ (senza dimostrazione), $\sqrt[n]{n^b}$ per $b \in \mathbb{R}$ (senza dimostrazione). Successioni divergenti e ordini di infinito: $\log(n)$, n^b (con $b > 0$), a^n (con $a > 1$), $n!$. Svolgimento di alcuni esercizi.

Lezione 19-20 (7 novembre 2008) Funzioni trigonometriche e limiti notevoli: $\lim_n n \sin(1/n) = 1$, generalizzazione al caso $\lim_n \sin(a_n)/a_n = 1$ con $(a_n)_n$ successione infinitesima (con dimostrazioni). Applicazione al calcolo di altri limiti di funzioni trigonometriche. Limite $\lim_n (1 + \frac{1}{n})^n = e$, generalizzazioni. Esercizi proposti.

Lezione 21-22 (11 novembre 2008) Regolarità delle successioni monotone. Definizione di sottosuccessione, limite di sottosuccessioni di una successione convergente. Teorema di Bolzano-Weierstrass per successioni (solo enunciato).

Lezione 23-24 (13 novembre 2008) Principio di induzione ed applicazioni (somma dei primi n interi, sviluppo di $a^n - b^n$). Esercizi su limiti di successioni.

Lezione 25-26 (18 novembre 2008) Limiti di funzioni: limiti all'infinito, definizione ed esempi. Limiti in un punto: definizione ed esempi. Teorema ponte tra i limiti di funzioni e di successioni (solo enunciato). Applicazioni: non esistenza di $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$; limiti notevoli; operazioni con i limiti: limite della somma, della differenza, del prodotto, del rapporto di due funzioni. Esercizi sul calcolo dei limiti di funzioni.

Lezione 27-28 (20 novembre 2008) Alcuni teoremi sui limiti di funzioni (solo enunciato): teorema dei due carabinieri, teorema di permanenza del segno. Limiti destro e sinistro. Applicazioni. Esercizi proposti.

Lezione 29-30 (21 novembre 2008) Infiniti e gerarchia degli infiniti. Infinitesimi (di ordine superiore, inferiore, dello stesso ordine, equivalenti).

Svolgimento di alcuni esercizi. Funzioni continue: definizione di continuità in un punto e in un intervallo. Esempi di funzioni continue. Continuità della somma, differenza, prodotto e rapporto di due funzioni (solo enunciati). Continuità della composizione di due funzioni (enunciato). Punti di discontinuità: di prima specie, di seconda specie, eliminabili. Estensione per continuità di una funzione.

Lezione 31-32 (2 dicembre 2008) Teoremi sulle funzioni continue: di permanenza del segno, di esistenza degli zeri (senza dimostrazione). Applicazioni: esistenza di una radice reale di un polinomio di grado dispari. Nozione di estremo superiore, inferiore, massimo e minimo di una funzione in un intervallo. Conseguenze del teorema di esistenza degli zeri: Teorema di esistenza dei valori intermedi (I e II forma, con dimostrazione), Teorema di Weierstrass (senza dimostrazione).

Lezione 33-34 (5 dicembre 2008) Esistenza dei limiti destro e sinistro di una funzione monotona, tipi di discontinuità per una funzione monotona. Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Derivate delle funzioni elementari. Relazione tra derivabilità e continuità. Regole di derivazione: somma, differenza, prodotto e rapporto di due funzioni. Regola di derivazione per la composizione di due funzioni.

Lezione 35-36 (9 dicembre 2008) Definizione di massimo e minimo relativo. Teoremi di Fermat, Rolle, Lagrange (con dimostrazioni) e loro conseguenze: criterio di monotonia per funzioni derivabili, caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo. Derivata seconda e concavità verso l'alto, verso il basso. Applicazione allo studio di funzioni e dei loro grafici.

Lezione 37-38 (9 dicembre 2008) Regole di derivazione: derivata di una funzione inversa. Applicazioni: calcolo della derivata di \sqrt{x} come inversa di x^2 ; calcolo della derivata delle funzioni trigonometriche inverse. Svolgimento di alcuni esercizi.

Lezione 39-40 (16 dicembre 2008) Teoremi di Cauchy e di de l'Hospital (con dimostrazioni). Applicazione al calcolo dei limiti. Svolgimento di alcuni esercizi.

Lezione 41-42 (18 dicembre 2008) Serie numeriche: definizioni e notazioni. Esempi di serie: serie telescopiche, geometrica, armonica e armonica generalizzata. Dimostrazione della non convergenza della serie armonica. Risultati di convergenza e non convergenza per la serie armonica generalizzata (senza dimostrazione).

Lezione 43-44 (19 dicembre 2008) Condizione necessaria per la convergenza di una serie. Serie a termini non negativi: teorema di regolarità, criterio del confronto e del confronto asintotico (con dimostrazioni). Svolgimento di alcuni esercizi.

Lezione 45-46 (9 gennaio 2009) Serie a termini non negativi: criterio del rapporto e della radice (solo enunciato). Esempio sul caso critico $\ell = 1$. Svolgimento di alcuni esercizi. Serie di segno variabile: definizione di serie assolutamente convergente e teorema relativo (senza dimostrazione). Serie a termini di segno alterno e Criterio di Leibniz (solo enunciato).

Lezione 47-48 (13 gennaio 2009) Esercitazioni per preparazione agli esami.

Lezione 49-50 (16 gennaio 2009) Esercitazioni per preparazione agli esami.

Lezione 51-52 (20 gennaio 2008) Esercitazioni per preparazione agli esami.