Foglio n. 3 di esercizi: curve, integrali curvilinei, forme differenziali

1 Curve e integrali curvilinei di prima specie

1.1 Verificare che la cardioide di equazione (in coordinate polari)

$$\rho = 1 + \cos\theta\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,,$$

ha una "cuspide" per $\theta = \pi$, cioè un punto in cui il versore tangente "salta" da un valore al valore opposto.

1.2 Verificare che la curva

$$\gamma \begin{cases} x = \operatorname{sen}^3 t \\ y = 2t \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

è una curva regolare. Calcolare il versore tangente e la retta tangente a γ per $t = \pi/3$.

1.3 Calcolare il baricentro del quarto di asteroide, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi/2]\,.$$

1.4 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_C \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2}\, ds\,,$$

dove C è l'ellisse di equazione cartesiana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1.5 Data $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 + 1}$, calcolare

$$\int_{+\gamma} f(x, y)\, ds\,,$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche $x = e^t$, $y = \operatorname{sen}(t)$, t in $[0, \pi]$.

1.6 Detto γ l'arco di parabola di equazione $y = x^2$, con $x \in [0, 1]$, calcolare

$$\int_\gamma x\, ds\,.$$

1.7 Disegnare la strofoide di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t^3 - t\,, \\ y = t^2 - 1\,. \end{cases}$$

E' regolare? E' semplice?

1.8 Disegnare la curva γ del piano xy che si scrive, in coordinate polari, $\rho = |\operatorname{sen} 3\theta|$, $\theta \in [0, \pi]$. E' una curva regolare?

1.9 Disegnare la curva γ di equazione polare

$$\rho = 2\cos^2\theta\,, \qquad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\,,$$

e dire se è regolare.

1.10 Sia $E = C_1 \cup C_2$, dove C_1 è il cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{3}$, e C_2 è il cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1. Calcolare il baricentro della frontiera di E. **N.B.:** Una soluzione di questo esercizio (e anche del successivo esercizio 2.5) si trova qui: `http://www.dmmm.uniroma1.it/~aglio/cd3/CD3-2002_07_26_soluz.pdf`
Ma prima è meglio provarci da soli!

2 Forme differenziali

2.1 Trovare una primitiva, se possibile, della forma differenziale

$$\omega = \frac{y^2 e^x x}{(x+1)^2}\, dx + \frac{2ye^x}{x+1}\, dy\,.$$

2.2 Determinare se la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{y^2\cos(xy^2)}{z} - 2z\right) dx + \frac{2xy\cos(xy^2)}{z}\, dy - \left(\frac{\operatorname{sen}(xy^2)}{z^2} + 2x\right) dz$$

è esatta nel suo dominio, e calcolare l'integrale di ω su **tutte** le curve regolari (con sostegno contenuto nel dominio di ω) aventi per estremi, nell'ordine, i punti $(0, 2, 1)$ e $(\pi, 1, 3)$.

2.3 Sia $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$, con A aperto di $\mathbb{R}^2$. Consideriamo inoltre la forma differenziale $\omega = F_1(x, y)\, dx + F_2(x, y)\, dy$.

Motivando le risposte, dire quali tra le seguenti frasi sono vere, quali sono false.

a) Se ω è chiusa in A, allora $\mathbf{F}$ è il gradiente di una funzione definita in A;

b) Se $\mathbf{F}$ è il gradiente di una funzione definita in A, allora ω è chiusa in A;

c) $\mathbf{F}$ è un gradiente in A se e solo se ω è esatta in A;

d) Il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo una curva regolare γ dipende solo dagli estremi di γ;

e) Se A è semplicemente connesso, allora il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo una curva regolare γ dipende solo dagli estremi di γ.

2.4 Data la forma differenziale

$$\omega = \ln(3xy)\,\mathrm{sen}\,y\,dx + \left[\frac{x\,\mathrm{sen}\,y}{y} + \Big(x\ln(3xy) - x\Big)\cos y\right]dy\,,$$

i) trovarne il dominio;

ii) dire a priori se ω è esatta nel suo dominio e, in tal caso, calcolarne una primitiva.

2.5 Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma (z-2y)\,dx + (z-2x)\,dy + (x+3y+y^2)\,dz,$$

dove γ è la curva intersezione della sfera $x^2+y^2+z^2=1$ e del piano $y=2z$. **N.B.:** In seguito torneremo su questo esercizio usando il teorema di Stokes.

2.6 Trovare tutte le costanti a e b che rendono conservativo il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{ay}{1+x^2y^2} + \frac{2x}{1+x^2}\,,\ \frac{x}{1+x^2y^2} - b\cos y\right)$$

e trovarne un potenziale.

2.7 Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{4y-x}{(x+2y)^3}\,dx + \frac{2y-5x}{(x+2y)^3}\,dy\,,$$

dire se è esatta nel suo dominio e in tal caso trovarne le primitive.

2.8 Provare che il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = (2x(1+y) - y\,\mathrm{sen}(xy)\ ,\ x^2 - x\,\mathrm{sen}(xy) + \cos(2y))$$

è conservativo. Si calcoli il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva γ di parametrizzazione $\mathbf{r}(t) = \left(t\,,\ \frac{\pi}{t^2}\right)$, $t\in[1,3]$.

2.9 Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{x(x^2+y^2)\,dx + y(x^2+y^2)\,dy}{x^2+y^2-1}\,,$$

verificare a priori se è esatta nell'aperto $x^2+y^2-1>0$, e in tal caso calcolare una sua primitiva.

2.10 Data la forma differenziale

$$\omega = (e^y - y^2)\,dx + (3y^2 - 2xy + xe^y)\,dy\ ,$$

dire se è esatta. Calcolarne l'integrale sul quarto di ovale

$$(x-1)^6 + y^6 = 1\ ,\qquad x\ge 1\ ,\qquad y\le 0\,.$$

2.11 Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega = \left(1 - \frac{y}{x}\right)e^{\frac{y}{x}}\,dx + e^{\frac{y}{x}}\,dy$$

lungo la curva di equazioni parametriche

$$x = 5 + \cos(t\pi)\,,\ y = t^2+1\,,\qquad t\in[0,1].$$

(*Suggerimento:* il calcolo diretto è complicato)

2.12 Considerare la forma differenziale

$$\omega = \frac{3y^2}{9y^4+x^2}\,dx - \left(\frac{6xy}{9y^4+x^2} + 2\right)dy.$$

Trovare una primitiva nell'insieme $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\}$. Dire se ω è esatta nel suo dominio di definizione. (Soluzione disponibile all'indirizzo `http://www.dmmm.uniroma1.it/~aglio/cd3/Soluz_2001_12_15.pdf`)

2.13 Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{\lambda^2 y}{x^2+\lambda y^2}dx - \frac{(2-\lambda)x}{x^2+\lambda y^2}dy\,,$$

a) al variare del parametro $\lambda\in\mathbb{R}$, determinarne il dominio;
b) determinare tutti i valori di λ tali che ω risulti chiusa;
c) alla luce dei risultati dei punti a) e b), determinare tutti i valori di λ tali che ω risulti esatta nel suo dominio.

2.14 Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{2x}{x^2+y^2-4}dx + \frac{x^2+3y^2-4}{(x^2+y^2-4)y}dy\,,$$

a) determinarne il dominio;
b) dire se è chiusa;
c) dire se è esatta nel suo dominio, e in tal caso determinare una primitiva in uno degli aperti connessi disgiunti in cui si scompone il dominio di ω. (Soluzione disponibile all'indirizzo `http://www.dmmm.uniroma1.it/~aglio/cd3/CD3-sol-2003_07_25.pdf`)

3 Risposte ad alcuni esercizi

1.4: $\pi\,(a^2+b^2)$; **1.5:** $\frac{1}{2}\,(e^{2\pi}+\pi-1)$;