

Corso di laurea in Matematica  
SAPIENZA Università di Roma



## **Note del corso di Sistemi Dinamici**

PAOLO BUTTÀ & PIERO NEGRINI

Dipartimento di Matematica  
“Guido Castelnuovo”  
SAPIENZA Università di Roma



## Indice

Capitolo 1. Aspetti generali	1
1.1. Processi evolutivi e sistemi dinamici	1
1.2. Campi vettoriali ed equazioni differenziali ordinarie	4
1.3. Campi vettoriali sulla retta e separazione delle variabili	6
1.4. Teoremi generali	8
1.5. Equazioni differenziali autonome	12
1.6. Integrali primi	18
1.7. Soluzione degli esercizi	20
1.8. Nota bibliografica	22
Capitolo 2. Sistemi lineari	23
2.1. Linearizzazione	23
2.2. Proprietà generali	25
2.3. Il teorema di Liouville	31
2.4. Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti	32
2.5. Sistemi lineari bidimensionali	41
2.6. Flussi iperbolici	43
2.7. Soluzione degli esercizi	48
2.8. Nota bibliografica	50
Capitolo 3. Flussi hamiltoniani	53
3.1. Sistemi lagrangiani e sistemi hamiltoniani	53
3.2. Leggi di conservazione e parentesi di Poisson	59
3.3. Teorema di Liouville e misure invarianti	64
3.4. Il teorema del ritorno di Poincaré	65
3.5. Misura microcanonica ed ipotesi ergodica	67
3.6. Moto condizionatamente periodico	71
3.7. Nota bibliografica	78
Capitolo 4. Trasformazioni canoniche ed integrabilità	79
4.1. Trasformazioni simplettiche	79
4.2. Conservazione della 1-forma di Liouville e funzioni generatrici	87
4.3. L'equazione di Hamilton-Jacobi	92
4.4. Il Teorema di Liouville-Arnold	97
4.5. Nota bibliografica	99
Capitolo 5. Dinamica iperbolica	101

5.1. Teorema delle varietà stabile ed instabile	101
5.2. Punti fissi iperbolici	109
5.3. Sistemi periodicamente perturbati	113
5.4. Punti omoclini ed insiemi iperbolici	115
5.5. Lemma dell'orbita ombra e sue conseguenze	121
5.6. Applicazione alla dinamica del pendolo forzato	126
5.7. Esistenza di intersezioni omocline trasverse in $\mathbb{R}^2$ e formula di Melnikov	127
5.8. Nota bibliografica	131
Capitolo 6. Stabilità degli equilibri	133
6.1. Nozione di stabilità	133
6.2. Stabilità riconosciuta dalla parte lineare	136
6.3. Il metodo diretto di Liapunov	140
6.4. Insiemi limite e bacini di attrazione	144
6.5. Soluzione degli esercizi	151
6.6. Nota bibliografica	153
Capitolo 7. Soluzioni periodiche ed applicazioni di Poincaré	155
7.1. Equazioni lineari a coefficienti periodici	155
7.2. Criteri di asintotica stabilità per sistemi dinamici discreti	158
7.3. Cicli e loro stabilità	159
7.4. Cicli limite e teorema di Poincaré-Bendixson	162
7.5. Applicazione alla teoria dei circuiti non lineari	167
7.6. Soluzione degli esercizi	174
7.7. Nota bibliografica	174
Appendice A. Teoremi fondamentali sulle equazioni differenziali ordinarie	177
A.1. Stime preliminari e condizione di Lipschitz	177
A.2. Il teorema di esistenza ed unicità	180
A.3. Dipendenza dai dati iniziali e dai parametri	182
A.4. Nota bibliografica	185

## Aspetti generali

### 1.1. Processi evolutivi e sistemi dinamici

Si definisce genericamente *sistema dinamico* un qualsiasi processo evolutivo, ovvero una struttura caratterizzata da

- uno *spazio degli stati*  $S$ ,
- il *tempo*  $t$ , un parametro che assume valori in  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}_+$  o  $\mathbb{Z}_+$ ,
- una *legge di evoluzione*, ovvero una applicazione  $(t, x) \mapsto \varphi^t(x) \in S$ ,  $x \in S$ , tale che  $\varphi^0(x) = x$  per ogni  $x \in S$ .

Un sistema dinamico è in particolare qualsiasi modello matematico che descrive l'evoluzione nel tempo di un sistema fisico, chimico, biologico, sociale, etc... La struttura dell'insieme  $S$  è in tal caso legata alla natura del sistema reale che si vuole descrivere, dovendo gli elementi di  $S$  rappresentare univocamente i possibili stati del sistema reale. Ad esempio, ad ogni istante di tempo, lo stato di un sistema fisico costituito da  $N$  particelle puntiformi che obbediscono alle leggi della meccanica classica è determinato univocamente dalle posizioni e dalle velocità di queste ultime, dunque  $S = \mathbb{R}^{6N}$ . Osserviamo che in questo caso il sistema evolve con tempo continuo. D'altra parte esistono processi evolutivi descrivibili in maniera naturale con tempo discreto (che senza perdita di generalità possiamo identificare con l'insieme degli interi). Ad esempio, nel lancio ripetuto di una moneta, il tempo naturale è rappresentato dal numero di lanci effettuati. In altri casi, sebbene il processo sia inizialmente definito con tempo continuo, può essere utile associare ad esso un sistema dinamico con tempo discreto, ottenuto osservando il processo originario solo ad istanti di tempo prestabiliti, essendo tale descrizione "ridotta" sufficiente a dedurre proprietà significative del processo originario.

La classe di processi evolutivi di cui ci occuperemo possiedono le seguenti proprietà:

- *Determinismo*: il presente determina univocamente passato e futuro del sistema; in particolare  $t \in \mathbb{R}$  (o  $t \in \mathbb{Z}$ ).
- *Dimensione finita*: lo spazio degli stati, detto anche *spazio delle fasi*, ha dimensione finita, ovvero ciascuno stato del sistema può essere individuato da un numero finito di parametri.
- *Differenziabilità*: lo spazio degli stati possiede la struttura di una varietà differenziabile che è conservata dalla legge di evoluzione.

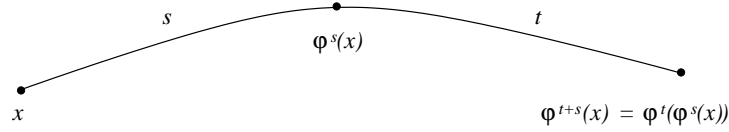


FIGURA 1.1. Proprietà di gruppo.

Il determinismo implica che  $\varphi^t(\varphi^s(x)) = \varphi^{t+s}(x)$  per ogni coppia di tempi  $t, s$  ed ogni  $x \in S$ . Poiché inoltre  $\varphi^0(x) = x$ , la famiglia  $\{\varphi^t\}$  di endomorfismi di  $S$  costituisce allora un *gruppo ad un parametro di trasformazioni di  $S$* . In particolare:

- i)  $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^s \circ \varphi^t$  (commutatività);
- ii) esiste l'inversa  $(\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}$  ( $\varphi^t$  è biunivoca).

Nel caso discreto, dalla proprietà di gruppo applicata ricorsivamente segue che  $\varphi^t = (\varphi^1)^t$ , cosicché assegnare un processo deterministico equivale ad assegnare una coppia  $(S, g)$ , con  $g$  applicazione biunivoca di  $S$  in sé, la legge di evoluzione essendo definita dalle iterazioni della mappa  $g$ :

$$g^0(x) = x, \quad g^1(x) = g(x), \quad g^2(x) = g(g(x)), \quad \dots, \quad g^k(x) = g(g^{k-1}(x)).$$

Da ora innanzi, se non specificato altrimenti, considereremo processi evolutivi a tempo continuo ( $t \in \mathbb{R}$ ). Assegnare un processo deterministico significa quindi assegnare la coppia  $(S, \{\varphi^t\})$ , detta *flusso di fase*. La funzione  $t \mapsto \varphi^t(x)$  viene detta *moto* o *legge oraria* di  $x$ , mentre la sua immagine in  $S$ , ovvero l'insieme  $\gamma(x) \doteq \{\varphi^t(x); t \in \mathbb{R}\}$  è detto *curva di fase* o *orbita* di  $x$ . Il punto  $x \in S$  è detto *punto fisso* o *posizione di equilibrio* se  $\varphi^t(x_0) = x_0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , ovvero  $\gamma(x_0) \equiv \{x_0\}$ : il sistema rimane nello stato  $x_0$  per tutti i tempi.

Analizziamo ora le conseguenze delle ipotesi di differenziabilità e dimensione finita del processo evolutivo. Queste consistono nel supporre che lo spazio delle fasi sia una varietà differenziabile di dimensione finita e che la mappa  $\varphi: \mathbb{R} \times S \rightarrow S$  definita da  $\varphi(t, x) = \varphi^t(x)$  sia differenziabile. Ne segue che  $\{\varphi^t\}$  è un *gruppo ad un parametro reale di diffeomorfismi di  $S$*  (essendo anche l'inversa  $(\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}$  differenziabile).

Ricordiamo che varietà differenziabili sono lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , i domini (insiemi aperti) di tali spazio, e tutti gli insiemi che ammettono sistemi di coordinate locali, quali la circonferenza, la sfera, il toro. Senza ricorrere alla definizione più generale, intenderemo nel seguito varietà di dimensione  $n$  un sottoinsieme  $M$  di uno spazio euclideo  $\mathbb{R}^N$ , con  $N > n$ , tale che

$$M = \{z \in \mathbb{R}^N : \Phi_k(z) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, N - n\}, \quad (1.1)$$

essendo  $\Phi_k: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  una collezione di  $N - n$  funzioni differenziabili e funzionalmente indipendenti, ovvero tali che

$$\text{rango} \left\{ \frac{\partial \Phi_k}{\partial z_i}(z) \right\} = N - n \quad \forall z \in M.$$

In effetti, sotto queste ipotesi, il teorema della funzione implicita garantisce che nell'intorno di ciascun punto di  $M$  è possibile introdurre coordinate locali. Più precisamente, per ciascun  $\bar{z} \in M$  esistono un intorno  $W$  di  $\bar{z}$ , un aperto  $U \subset \mathbb{R}^n$  ed un'applicazione differenziabile  $f : U \rightarrow W$ , iniettiva e di rango massimo, tale che  $M \cap W = f(U) = \{z \in \mathbb{R}^N : z = f(x), x \in U\}$ . In altri termini, nell'intorno  $W$  di  $\bar{z}$  la superficie  $M$  ha equazione parametrica  $z = f(x)$ , ovvero

$$\begin{cases} z_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ z_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ z_N = f_N(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.2)$$

Viceversa, la mappa inversa  $f^{-1} : M \cap W \rightarrow U$  fornisce le coordinate locali  $x = (x_1, \dots, x_n)$  come funzioni  $x_i = x_i(z)$  di  $M \cap W$  in  $\mathbb{R}$ .

Tranne che in pochi casi particolari, gli argomenti trattati in queste note non sono legati a strutture geometriche e topologiche particolari dello spazio delle fasi. Per tale motivo ci limiteremo quasi sempre al caso di flussi di fase in domini di  $\mathbb{R}^n$ .

**DEFINIZIONE 1.1.** Sia  $(\mathcal{D}, \{\varphi^t\})$  il flusso di fase definito da un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi  $\{\varphi^t\}$  di un dominio  $\mathcal{D}$  di  $\mathbb{R}^n$ . Definiamo velocità di fase del flusso  $\varphi^t$  nel punto  $x \in \mathcal{D}$  il vettore:

$$v(x) \doteq \left. \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right|_{t=0}.$$

Per la proprietà di gruppo del flusso di fase notiamo che, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{d}{dt} \varphi^t(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi^{t+h}(x) - \varphi^t(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi^h(\varphi^t(x)) - \varphi^t(x)}{h} = v(\varphi^t(x)).$$

In altri termini ogni moto è una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria:

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathcal{D}. \quad (1.3)$$

L'Eq. (1.3) è *autonoma*, ovvero il campo vettoriale non dipende esplicitamente dal tempo, poiché abbiamo tacitamente assunto che la legge di evoluzione non dipende dall'istante iniziale. Più in generale, una legge di evoluzione deterministica è assegnata da una famiglia di applicazioni differenziabili  $\varphi^{t,t_0} : S \rightarrow S$ , al variare di  $t, t_0 \in \mathbb{R}$ , tali che:

- i)  $\varphi^{t_0,t_0}(x) = x$  per ogni  $x \in S$  e  $t_0 \in \mathbb{R}$ ;
- ii)  $\varphi^{t,t_0} = \varphi^{t,s} \circ \varphi^{s,t_0}$  per ogni  $t, t_0, s \in \mathbb{R}$ .

In particolare  $\varphi^{t,t_0}$  è un diffeomorfismo essendo  $(\varphi^{t,t_0})^{-1} = \varphi^{t_0,t}$ .

Definendo:

$$v(t, x) = \left. \frac{d}{ds} \varphi^{s,t}(x) \right|_{s=t},$$

si verifica analogamente che i moti sono ora soluzioni dell'equazione differenziale:

$$\dot{x} = v(t, x). \quad (1.4)$$

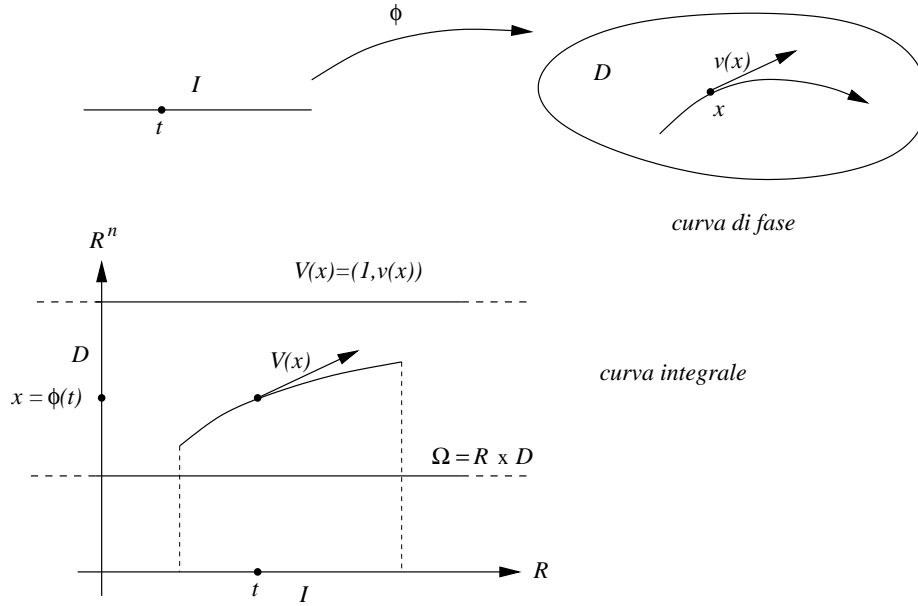


FIGURA 1.2. Curva di fase e curva integrale di  $\dot{x} = v(x)$ .

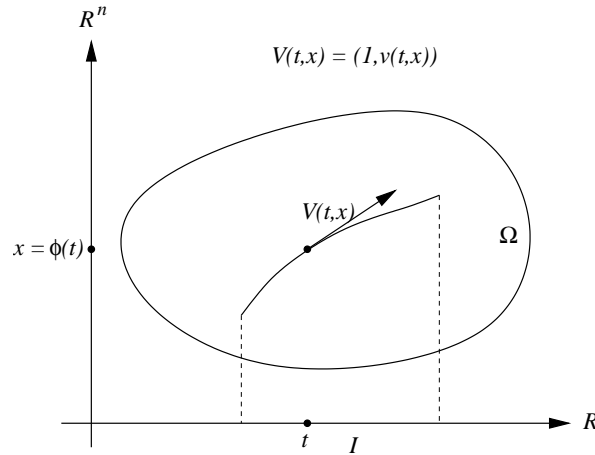
Usualmente il processo evolutivo è assegnato mediante una *legge locale di evoluzione* (1.3) (o più in generale (1.4)). Infatti l'analisi sperimentale di un sistema reale permette (nella migliore delle ipotesi) di dedurre le leggi del moto. La buona posizione del modello matematico si fonda sulla possibilità (almeno in linea di principio) di ricostruire il passato e predire il futuro sulla base della legge locale assegnata. In altri termini occorre risolvere il *problema fondamentale delle equazioni differenziali ordinarie* o *problema di Cauchy*: assegnata la legge locale di evoluzione ricostruire il moto del sistema dai dati iniziali.

## 1.2. Campi vettoriali ed equazioni differenziali ordinarie

Sia  $\mathcal{D}$  un dominio aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Indichiamo con  $C^0(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$  [risp.  $C^k(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ ] l'insieme dei campi vettoriali continui [risp.  $k$  volte differenziabili con continuità], ovvero delle funzioni  $v: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  le cui componenti  $v_i: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni continue [risp.  $k$  volte differenziabili con continuità]. L'insieme  $\mathcal{D}$  è detto *spazio delle fasi* del campo vettoriale mentre il prodotto diretto  $\mathbb{R} \times \mathcal{D}$  è detto *spazio delle fasi ampliato*.

Assegnato  $v \in C^0(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ , una *soluzione dell'equazione differenziale autonoma* (1.3) è una applicazione differenziabile  $\phi \in C^1(I; \mathcal{D})$ ,  $I$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ , tale che la relazione  $\dot{\phi}(t) = v(\phi(t))$  è verificata per ogni  $t \in I$ .

Una *curva integrale dell'equazione differenziale* (1.4) è il grafico di una sua soluzione; una *curva di fase* è la proiezione di una curva integrale sul piano delle fasi  $\mathcal{D}$  (vedi Figura 1.2).

FIGURA 1.3. Curva integrale di  $\dot{x} = v(t, x)$ .

Sia ora  $\Omega$  un dominio aperto dello spazio  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  delle coordinate  $(t, x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Indichiamo con  $C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$  [risp.  $C^k(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ] l'insieme dei campi vettoriali continui [risp.  $k$  volte differenziabili con continuità], ovvero delle funzioni  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue [risp.  $k$  volte differenziabili con continuità]. L'insieme  $\Omega$  è detto *spazio delle fasi ampliato* del campo vettoriale.

Assegnato  $v \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , una *soluzione dell'equazione differenziale non autonoma* (1.4) è una applicazione differenziabile  $\phi \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ ,  $I$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ , tale che il grafico di  $\phi$  giace in  $\Omega$  e la relazione  $\dot{\phi}(t) = v(t, \phi(t))$  sia verificata per ogni  $t \in I$ . Analogamente al caso autonomo, definiamo *curva integrale dell'equazione differenziale* (1.4) il grafico di una sua soluzione (vedi Figura 1.3).

Una soluzione  $\phi \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  dell'equazione differenziale (1.4) è detta soluzione del relativo *problema di Cauchy* di dati iniziali  $(t_0, x_0) \in \Omega$  se  $t_0 \in I$  e  $\phi(t_0) = x_0$ .

Chiaramente l'Eq. (1.3) è un caso particolare dell'Eq. (1.4), in cui  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathcal{D}$  e  $v(t, x) = v(x)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . In effetti è vero anche il viceversa. Più precisamente, l'Eq. (1.4) è equivalente all'equazione autonoma  $\dot{y} = V(y)$ , essendo  $V \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^{n+1})$  il campo vettoriale tale che  $V(y) = (1, v(t, x))$  per  $y = (t, x) \in \Omega$ .

Prima di discutere i teoremi generali della teoria delle equazioni differenziali ci soffermiamo su un caso particolare. Precisamente considereremo equazioni differenziali autonome unidimensionali, per le quali è possibile fornire un metodo di integrazione esplicita (separazione di variabili), riconducendo così la determinazione della soluzione del problema ai valori iniziali ad un'operazione di *quadratura*.

### 1.3. Campi vettoriali sulla retta e separazione delle variabili

Sia  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  un campo continuo sull'intervallo aperto  $U = (a, b)$ , dove  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Distinguiamo due casi:

*i)* Se  $v(x_0) = 0$ , ovvero  $x_0$  è un punto *singolare* del campo  $v$ , allora  $x(t) \equiv x_0$  è soluzione di (1.5) per ogni  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Tale soluzione è detta *stazionaria* (ovvero indipendente dal tempo). Rimandiamo a dopo la discussione sulla eventuale esistenza di altre soluzioni con questi dati iniziali.

*ii)* Supponiamo ora che  $v(x_0) \neq 0$ . Sia  $V = (x_-, x_+)$  dove

$$\begin{aligned} x_- &\doteq \inf\{x \in U \cap (-\infty, x_0] : v(y) \neq 0 \forall y \in (x, x_0)\}, \\ x_+ &\doteq \sup\{x \in U \cap [x_0, +\infty) : v(y) \neq 0 \forall y \in [x_0, x)\}. \end{aligned}$$

Poiché il campo  $v$  è continuo, si ha  $x_- < x_+$  e la funzione  $1/v(x)$  è continua in  $V$ . Rimane quindi definita la funzione differenziabile con continuità  $G : \mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$G(t, x) \doteq t - t_0 - \int_{x_0}^x dy \frac{1}{v(y)}.$$

Supponiamo ora che  $t \mapsto \phi(t)$ ,  $t \in J$ , sia una soluzione di (1.5). Per continuità, in un intorno  $J_0$  di  $t_0$  sufficientemente piccolo, tale soluzione assume valori in  $V$ . È quindi ben definita la funzione  $t \mapsto G(t, \phi(t))$ ,  $t \in J_0$ , ed inoltre:

$$\frac{d}{dt} G(t, \phi(t)) = 1 - \frac{\dot{\phi}(t)}{v(\phi(t))} = 0,$$

avendo utilizzato, nell'ultima uguaglianza, che  $\dot{\phi}(t) = v(\phi(t))$ . Quindi la funzione  $G(t, x)$  rimane costante lungo le soluzioni di (1.5). Osservando che  $G(t_0, x_0) = 0$ , concludiamo che ogni eventuale soluzione  $\phi(t)$  di (1.5), ristretta ad un intorno sufficientemente piccolo di  $t_0$ , deve soddisfare  $G(t, \phi(t)) = 0$ . Ma essendo

$$\nabla G(t, x) = \left(1, -\frac{1}{v(x)}\right) \neq (0, 0) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times V,$$

il teorema della funzione implicita garantisce che rimane univocamente determinata la soluzione  $t \rightarrow x(t)$  dell'equazione  $G(t, x(t)) = 0$ , essendo in particolare la funzione inversa di

$$t(x) = t_0 + \int_{x_0}^x dy \frac{1}{v(y)}, \quad x \in V. \quad (1.6)$$

Chiaramente  $x(t)$  è soluzione di (1.5) poiché  $x(t_0) = x(t(x_0)) = x_0$  e

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{t'(x)} \Big|_{x=x(t)} = v(x(t)).$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy (1.5) esiste ed è unica nell'intorno  $J_0 \times V$  del punto  $(t_0, x_0)$ ; inoltre, a meno della integrazione in (1.6), la si può calcolare esplicitamente come funzione inversa di  $x \mapsto t(x)$ .

La funzione  $x \mapsto t(x)$  rappresenta il tempo necessario alla soluzione che parte da  $x_0$  al tempo  $t_0$  per raggiungere la posizione  $x \in V$ . Ciascuno degli estremi  $x_{\pm}$  può essere un punto singolare del campo oppure un punto di frontiera del dominio  $U$  (nel qual caso potrebbe coincidere con  $\pm\infty$  se  $U$  è illimitato). Il tempo che la soluzione impiega per “raggiungere” questi punti (nel futuro o nel passato) è dato dai limiti:

$$\lim_{x \rightarrow x_{\pm}} t(x) = t_0 + \int_{x_0}^{x_{\pm}} dy \frac{1}{v(y)}, \quad (1.7)$$

che esistono essendo la funzione  $t(x)$  monotona sul suo dominio  $V$ . L'integrale a secondo membro va interpretato come integrale (eventualmente) improprio: di prima specie nel caso in cui  $x_{\pm}$  è un punto singolare (la funzione integranda  $1/v(x)$  diverge in  $x_{\pm}$ ), di seconda specie se  $x_{\pm} = \pm\infty$ . La convergenza di tale integrale nel caso di punti di frontiera non singolari implica la non globalità (nel tempo) della soluzione; viceversa, se una soluzione impiega un tempo finito per raggiungere un punto singolare, si ha perdita di unicità della soluzione. Illustriamo tali situazioni con una serie di esempi.

**ESEMPIO 1.1.** Sia  $v(x) = 3x^{2/3}$ ,  $U = \mathbb{R}$ . L'unico punto singolare è  $x = 0$ . Fissato  $x_0 > 0$  [risp.  $x_0 < 0$ ] calcoliamo la funzione  $x \mapsto t(x)$  su  $(0, +\infty)$  [risp.  $(-\infty, 0)$ ] definita da

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x dy \frac{1}{3y^{2/3}} = t_0 + x^{1/3} - x_0^{1/3},$$

da cui  $x(t) = (x_0^{1/3} - t_0 + t)^3$ . Osserviamo che ciascuna soluzione impiega un tempo infinito per raggiungere  $\pm\infty$  (ovvero la frontiera di  $U = \mathbb{R}$ ) cosicché essa è definita globalmente. D'altra parte impiega un tempo finito per raggiungere il punto singolare  $x = 0$ ; infatti  $x(t^*) = 0$  se  $t^* = t_0 - x_0^{1/3}$ . Ne segue una perdita di unicità per il problema di Cauchy con  $x_0 = 0$ : oltre alla soluzione stazionaria  $x(t) \equiv 0$ , anche  $x(t) = (t - t_0)^3$  è soluzione con condizione iniziale  $x(t_0) = 0$ . In effetti ciascuna funzione

$$x_{t_1, t_2}(t) = \begin{cases} (t - t_1)^3 & \text{se } t < t_1 \\ 0 & \text{se } t_1 \leq t \leq t_2 \\ (t - t_2)^3 & \text{se } t > t_2 \end{cases}$$

al variare di  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  con  $t_1 \leq t_0 \leq t_2$ , soddisfa la condizione  $x_{t_1, t_2}(t_0) = 0$ , ed è soluzione dell'equazione differenziale (verificarlo!).

**ESEMPIO 1.2.** Sia  $v(x) = kx$ ,  $U = \mathbb{R}$ . Assumiamo  $k \neq 0$ ; abbiamo solo il punto singolare  $x = 0$ . Fissato  $x_0 > 0$  [risp.  $x_0 < 0$ ] calcoliamo la funzione  $x \mapsto t(x)$  su  $(0, +\infty)$  [risp.  $(-\infty, 0)$ ] definita da

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x dy \frac{1}{ky} = t_0 + \frac{1}{k} \log \frac{x}{x_0},$$

da cui  $x(t) = x_0 \exp[k(t - t_0)]$ , che fornisce la soluzione del problema di Cauchy con  $x(t_0) = x_0$ . Nuovamente ciascuna soluzione impiega un tempo infinito per raggiungere la frontiera  $\pm\infty$  di  $U = \mathbb{R}$ , ovvero è definita globalmente. Inoltre, essendo  $\exp[kt] > 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , in questo caso una soluzione che parte da

$x_0 \neq 0$  impiega un tempo infinito per raggiungere l'origine. Abbiamo quindi unicità anche nel punto singolare  $x = 0$ . Inoltre l'espressione  $x(t) = x_0 \exp[k(t - t_0)]$ , (che abbiamo determinato per  $x_0 \neq 0$ ), rimane valida anche per  $x_0 = 0$ , fornendo in tal caso la soluzione stazionaria  $x(t) \equiv 0$ .

ESEMPIO 1.3. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Si integra per separazione delle variabili e si trova la soluzione:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}.$$

Gli intervalli di esistenza sono sempre sottoinsiemi propri dell'asse reale, tranne che per  $x_0 = 0$ . Per esempio, se  $x_0 > 0$  allora la soluzione esiste nell'intervallo  $J_0 = (-\infty, t_0 + 1/x_0)$ . Quando  $t \rightarrow t_0 + 1/x_0$  la soluzione fugge all'infinito (che è la frontiera di  $\mathbb{R}$ , dominio su cui è definito il campo vettoriale).

ESEMPIO 1.4. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{x}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Il campo è definito su  $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ . Si integra per separazione delle variabili e si trova la soluzione:

$$x(t) = \frac{x_0}{|x_0|} \sqrt{2(t - t_0) + x_0^2}.$$

Gli intervalli di esistenza sono limitati nel passato: quando  $t \rightarrow t_0 - x_0^2/2$  la soluzione tende a portarsi sulla frontiera  $\{x = 0\}$  del dominio di definizione del campo.

ESERCIZIO 1.1. *Dimostrare che se  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile con continuità ed inoltre esiste  $K > 0$  tale che  $|v(x)| \leq K(1 + |x|)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , allora ogni soluzione del problema di Cauchy (1.5) esiste per tutti i tempi.*

ESERCIZIO 1.2. *Mostrare che il problema di Cauchy per il campo  $v(x) = 1 + \sqrt{|x|}$  ammette un'unica soluzione globale di dati iniziali  $(t_0, x_0) = (0, 0)$  e calcolarla.*

ESERCIZIO 1.3. *Calcolare la soluzione del problema di Cauchy per il campo  $v(x) = x - x^2$ , discutendone il comportamento al variare del dato iniziale  $(t_0, x_0)$ .*

#### 1.4. Teoremi generali

Passiamo ora a discutere i teoremi fondamentali della teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

TEOREMA 1.2. *Sia il membro di destra dell'Eq. (1.4) un campo vettoriale differenziabile  $v \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . Allora ogni punto  $(t_0, x_0)$  dello spazio delle fasi ampliato  $\Omega$  ammette un intorno  $I \times U \subset \Omega$  tale che per ogni  $x \in U$  esiste un'unica*

soluzione  $\phi \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  per cui  $\phi(t_0) = x$ . Inoltre tale soluzione è una funzione differenziabile con continuità delle variabili  $(t, x)$ .

La richiesta di differenziabilità del campo vettoriale non è necessaria per l'esistenza ed unicità di una soluzione locale. In Appendice A è dimostrato che se il campo vettoriale è continuo e localmente lipschitziano rispetto alla variabile  $x$ , allora esiste un'unica soluzione locale che dipende con continuità dal dato iniziale. Ricordiamo inoltre che si può dimostrare che la sola richiesta di continuità garantisce l'esistenza della soluzione, ma ovviamente non è sufficiente a garantire l'unicità, come mostra l'Esempio 1.1.

Più in generale vale il seguente risultato di esistenza e regolarità.

TEOREMA 1.3. Sia

$$\dot{x} = v(t, x, \lambda), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (1.10)$$

una famiglia di equazioni differenziali che dipendono da un parametro reale  $\lambda \in \Lambda$ . Se  $v \in C^k(\Omega \times \Lambda; \mathbb{R}^n)$  allora per ogni  $(t_0, x_0, \lambda_0)$  la soluzione locale  $\phi(t)$  dell'Eq. (1.10) di dati iniziali  $\phi(t_0) = x$  è una funzione differenziabile (di classe  $C^k$ ) delle variabili  $(t, x, \lambda)$  per  $|t - t_0|, |x - x_0|, |\lambda - \lambda_0|$  sufficientemente piccoli.

Il Teorema 1.2 ci ha consentito di costruire una soluzione locale (intorno a  $(t_0, x_0)$ ). Possiamo estendere tale soluzione? In particolare, se il sistema è autonomo, è possibile estendere la soluzione a tutto l'asse dei tempi  $\mathbb{R}$ ? Gli Esempi 1.8 e 1.9 mostrano che la risposta è in generale negativa. In entrambi questi esempi abbiamo la manifestazione della stessa patologia che fa da ostruzione ad una esistenza globale: l'accumularsi alla frontiera del dominio spaziale in tempi finiti. In effetti vale il seguente teorema generale.

TEOREMA 1.4. Sia  $v \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . La soluzione  $\phi$  dell'Eq. (1.4) di dati iniziali  $\phi(t_0) = x_0$  può essere prolungata in avanti ed indietro nel tempo fino ad un intervallo massimale  $(\alpha, \beta)$ . La distanza del punto  $(t, \phi(t))$  dalla frontiera di  $\Omega$  tende a zero per  $t \rightarrow \alpha^+$  e  $t \rightarrow \beta^-$ . Inoltre tale prolungamento è unico.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo innanzitutto che il prolungamento è unico, ovvero che se  $\phi_1(t)$ ,  $t \in I_1$ , e  $\phi_2(t)$ ,  $t \in I_2$ , sono due soluzioni dell'Eq. (1.4) che verificano una stessa condizione iniziale, allora esse coincidono su tutta l'intersezione  $I \doteq I_1 \cap I_2$ . Sia quindi  $\phi_1(t_0) = \phi_2(t_0)$  per qualche  $t_0 \in I$ . Supponiamo che  $T \doteq \sup\{t \geq t_0 : \phi_1(s) = \phi_2(s) \forall s \in [t_0, t]\}$  sia un punto interno di  $I$ . Per continuità si ha  $\phi_1(T) = \phi_2(T)$  da cui, per il Teorema 1.2 di esistenza ed unicità locali, le due soluzioni coincidono in tutto un intorno di  $T$ , contraddicendo la definizione di  $T$ . Dunque  $\phi_1(t) = \phi_2(t)$  per ogni  $t \in [t_0, +\infty) \cap I$ . Analogamente si conclude per  $t \leq t_0$ .

Dimostriamo ora l'esistenza del prolungamento in avanti (il caso del prolungamento indietro si tratta analogamente). Sia  $K$  un insieme compatto tale che  $(t_0, x_0) \in K \subset \Omega$  ed indichiamo con  $T$  l'estremo superiore di tutti i tempi  $t \geq t_0$  per i quali esiste una soluzione  $\phi$  dell'Eq. (1.4) che verifica le condizioni  $\phi(t_0) = x_0$  e  $(s, \phi(s)) \in K$  per ogni  $s \in [t_0, t]$ . Mostriamo che allora la soluzione

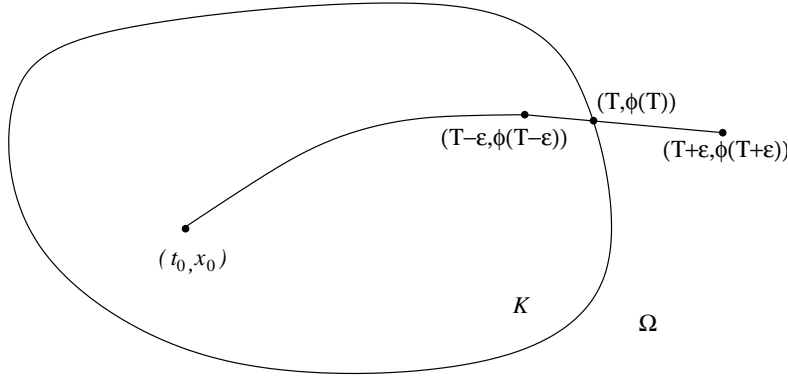


FIGURA 1.4. Il prolungamento della soluzione  $\phi$  raggiunge la frontiera del compatto  $K \subset \Omega$ .

si prolunga fino al tempo  $T$  con  $(T, \phi(T)) \in \partial K$ , essendo  $\partial K$  la frontiera di  $K$ . In effetti, essendo  $K$  un compatto, dal Teorema 1.2 segue che possiamo determinare un numero  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $(\tau, x) \in K$  esiste una soluzione  $\varphi_{\tau, x}(t)$  di dati iniziali  $\varphi_{\tau, x}(\tau) = x$  e definita per  $|t - \tau| < 2\varepsilon$ . Essendo  $(T - \varepsilon, \phi(T - \varepsilon)) \in K$ , esiste la soluzione  $\varphi_{T - \varepsilon, \phi(T - \varepsilon)}(t)$  definita per  $|t - T + \varepsilon| < 2\varepsilon$ , mediante la quale possiamo prolungare  $\phi(t)$  su tutto l'intervallo  $[t_0, T + \varepsilon)$ . In particolare  $\phi(T)$  è definita e, per continuità,  $(T, \phi(T)) \in K$ . Dalla definizione di  $T$  segue inoltre che ogni semintorno destro di  $T$  contiene tempi  $t$  per i quali  $(t, \phi(t)) \notin K$ . Dunque  $(t, \phi(t)) \in \partial K$ .

Scegliamo ora una successione  $V_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , di aperti limitati tale che  $\Omega = \cup_k V_k$ ,  $(t_0, x_0) \in V_1$ ,  $\bar{V}_k \subset V_{k+1}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Per quanto sopra dimostrato, esiste una successione monotona crescente di tempi  $T_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tale che  $\phi(t)$  è definita su  $(t_0, T_k]$  e  $(T_k, \phi(T_k)) \in \partial \bar{V}_k$ . Posto  $\beta = \sup\{T_k; k \in \mathbb{N}\}$ , la soluzione si prolunga in tal modo su  $[t_0, \beta)$  e non è ulteriormente prolungabile poiché la successione  $(T_k, \phi(T_k))$  tende alla frontiera di  $\Omega$ .

Rimane da dimostrare che la distanza del punto  $(t, \phi(t))$  dalla frontiera di  $\Omega$  tende a zero per  $t \rightarrow \beta^-$ . Se  $\beta = +\infty$  è evidente. Supponiamo  $\beta < +\infty$  ed assumiamo per assurdo che tale distanza non tenda a zero. Possiamo quindi estrarre una successione crescente di tempi  $\{t_k; k \in \mathbb{N}\}$  tale che  $(t_k, \phi(t_k)) \rightarrow (\beta, y) \in \Omega$ . Essendo

$$\phi(t) = \phi(t_k) + \int_{t_k}^t ds v(s, \phi(s)),$$

nel limite  $k \rightarrow +\infty$  troviamo:

$$\phi(t) = y + \int_{\beta}^t ds v(s, \phi(s)).$$

Quindi  $(t, \phi(t))$  converge a  $(\beta, y)$  per  $t \rightarrow \beta^-$  e dunque, per il Teorema 1.2, la soluzione si può prolungare oltre  $\beta$ , giungendo in tal modo ad una contraddizione.  $\square$

Indichiamo ora con

$$\phi(t, t_0, x_0), \quad t \in J_{t_0, x_0},$$

la funzione che fornisce la *soluzione massimale* (cioè non ulteriormente prolungabile) del problema di Cauchy di dati iniziali  $(t_0, x_0)$  (si osservi che  $J_{t_0, x_0}$  è un intervallo aperto, come segue dal precedente teorema).

**PROPOSIZIONE 1.5.** *Sia  $v \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . Allora per ogni  $(t_0, x_0) \in \Omega$  e  $t \in J_{t_0, x_0}$  esiste un intorno  $U$  di  $x_0$  tale che  $t \in J_{t_0, x}$  e  $\phi(t, t_0, x)$  è una funzione differenziabile (di classe  $C^k$ ) delle variabili  $(t, x)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo  $t > t_0$  (il caso  $t < t_0$  si tratta analogamente). Essendo la curva  $\mathcal{C} = \{(s, \phi(s, t_0, x_0)); s \in [t_0, t]\}$  chiusa e limitata in  $\Omega$ , per il Teorema 1.2 esistono  $\delta, \varepsilon > 0$  tali che, posto

$$U_j = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - \phi(t_j, t_0, x)| < \delta\}, \quad t_j = t_0 + \varepsilon j, \quad j = 0, \dots, N \doteq \left\lceil \frac{t - t_0}{\varepsilon} \right\rceil,$$

le soluzioni  $(s, y) \mapsto \phi(s, t_j, y)$ ,  $j = 0, \dots, N$ , sono definite e differenziabili per  $|s - t_j| < 2\varepsilon$ ,  $y \in U_j$ .

Per la continuità di  $y \mapsto \phi(t_1, t_0, y)$  possiamo determinare un intorno  $U_{01} \subset U_0$  tale che  $\phi(t_1, t_0, y) \in U_1$  per ogni  $y \in U_{01}$ . Ne segue che per  $y \in U_{01}$  la soluzione locale  $\phi(s, t_0, y)$ ,  $|s - t_0| < 2\varepsilon$ , è prolungabile a tutto l'intervallo  $(t_0 - 2\varepsilon, t_1 + 2\varepsilon)$ . Inoltre:

$$\phi(s, t_0, y) = \phi(s, t_1, \phi(t_1, t_0, y)), \quad \forall (s, y) \in (t_1 - 2\varepsilon, t_1 + 2\varepsilon) \times U_{01},$$

cosicché anche il prolungamento è differenziabile essendo composizione di funzioni differenziabili. Possiamo ora ripetere il ragionamento e determinare un intorno  $U_{02} \subset U_{01}$  tale che la soluzione si prolunga ulteriormente sull'intervallo  $(t_0 - 2\varepsilon, t_2 + 2\varepsilon)$ . Nuovamente, essendo

$$\phi(s, t_0, y) = \phi(s, t_2, \phi(t_2, t_0, y)), \quad \forall (s, y) \in (t_2 - 2\varepsilon, t_2 + 2\varepsilon) \times U_{01},$$

otteniamo una funzione differenziabile. Dopo  $N$  passi determiniamo in tal modo un intorno  $U = U_{0,N}$  tale che per  $y \in U$  la soluzione  $\phi(s, t_0, y)$  si prolunga su tutto l'intervallo  $(t_0 - 2\varepsilon, t_N + 2\varepsilon)$  (contenente  $t$ ) ed è una funzione differenziabile di  $(s, y)$ .  $\square$

Concludiamo la sezione con il seguente corollario del Teorema 1.4, che fornisce un criterio sufficiente per l'esistenza di soluzioni globali nel tempo.

**COROLLARIO 1.6.** *Sia  $v \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  ed esista inoltre una funzione finita  $\rho \mapsto B_\rho$ ,  $\rho > 0$ , tale che:*

$$\max_{|t| \leq \rho} |v(t, x)| \leq B_\rho(1 + |x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Allora ogni soluzione dell'Eq. (1.4) è definita globalmente.*

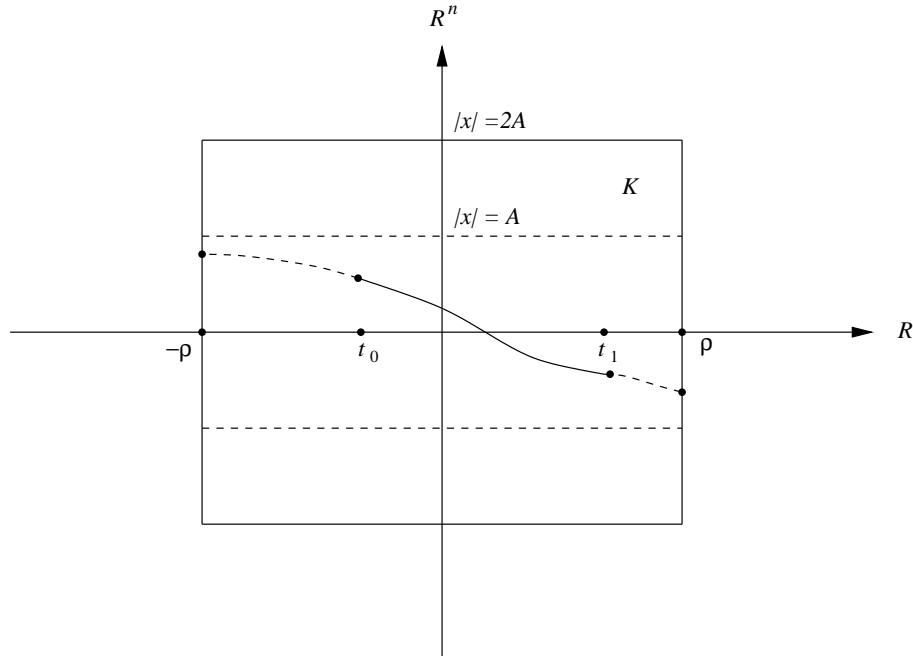


FIGURA 1.5. Il prolungamento della soluzione  $\phi$  non può toccare la superficie laterale del compatto  $K$  poiché stimiamo a priori che  $|\phi(t)| \leq A + (|\phi(t_0)| + 2\rho B_\rho)e^{2\rho B_\rho}$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\phi(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , una soluzione dell'Eq. (2.6) ed  $[-\rho, \rho]$  un qualsiasi intervallo compatto che contiene  $[t_0, t_1]$ . Scrivendo l'equazione differenziale in forma integrale ed utilizzando la disuguaglianza (A.3) (vedi Appendice A) si ha, per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ ,

$$|\phi(t)| \leq |\phi(t_0)| + \int_{t_0}^t ds |v(s, \phi(s))| \leq |\phi(t_0)| + 2\rho B_\rho + B_\rho \int_{t_0}^t ds |\phi(s)|,$$

e quindi, per il Lemma di Gronwall (vedi Lemma A.3 in Appendice A),

$$|\phi(t)| \leq (|\phi(t_0)| + 2\rho B_\rho)e^{2\rho B_\rho}.$$

Dunque la soluzione  $\phi(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , è confinata nel compatto dello spazio delle fasi ampliato  $K = \{(t, x) : |t| \leq \rho, |x| \leq 2(|\phi(t_0)| + 2\rho B_\rho)e^{2\rho B_\rho}\}$ . Per il Teorema 1.4 essa può essere prolungata fino alla frontiera di tale compatto, ma per la stima precedente non esiste un tempo  $t_* \in [-\rho, \rho]$  tale che  $|\phi(t_*)| = 2(|\phi(t_0)| + 2\rho B_\rho)e^{2\rho B_\rho}$ . Quindi la soluzione può essere prolungata avanti e indietro su tutto  $[-\rho, \rho]$  (vedi Figura 1.5). Per l'arbitrarietà di  $\rho$  concludiamo che  $\phi(t)$  si prolunga sull'intero asse dei tempi  $\mathbb{R}$ .  $\square$

### 1.5. Equazioni differenziali autonome

Consideriamo ora più in dettaglio il caso delle equazioni autonome, quando il campo vettoriale non dipende esplicitamente dal tempo. Sia quindi  $v \in$

$C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$  con  $\mathcal{D}$  un dominio di  $\mathbb{R}^n$ . Indichiamo con  $\varphi^t(x_0)$ ,  $t \in J_{x_0}$ , la soluzione massimale del problema di Cauchy di dati iniziali  $\varphi^0(x_0) = x_0$ ; allora

$$\phi(t, t_0, x_0) = \varphi^{t-t_0}(x_0) \quad \forall t \in J_{t_0, x_0} = t_0 + J_{x_0}. \quad (1.11)$$

In effetti si verifica immediatamente che  $\varphi^{t-t_0}(x_0)$  è soluzione del problema di Cauchy di dati iniziali  $(t_0, x_0)$ . È altresì evidente che l'intervallo massimale di definizione  $J_{t_0, x_0}$  della soluzione deve necessariamente coincidere con l'insieme  $t_0 + J_{x_0} = \{t + t_0 : t \in J_{x_0}\}$ .

**1.5.1. Struttura delle curve di fase.** Immediate conseguenze del teorema di esistenza ed unicità e di (1.11) sono le seguenti proposizioni.

**PROPOSIZIONE 1.7.** *Sia  $v \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$ . Allora per ogni punto dello spazio delle fasi  $\mathcal{D}$  passa una ed una sola curva di fase (massimale).*

**DIMOSTRAZIONE.** In effetti per ogni  $x_0 \in \mathcal{D}$  si ha:

$$\{\phi(t, t_0, x_0) : t \in J_{t_0, x_0}\} = \{\varphi^t(x_0) : t \in J_{x_0}\} \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}.$$

□

**PROPOSIZIONE 1.8.** *Sia  $v \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$ ,  $x \in \mathcal{D}$ . Supponiamo che esista  $t_1 \neq 0$  tale che  $\varphi^{t_1}(x) = x$ . Allora  $J_x = \mathbb{R}$  e la soluzione  $t \mapsto \varphi^t(x)$  è periodica di periodo  $T = |t_1|$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo  $t_1 = T > 0$  (il caso  $t_1 < 0$  è analogo). Sia  $\phi \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{D})$  il prolungamento  $T$ -periodico della funzione  $t \mapsto \varphi^t(x)$ ,  $t \in [0, T]$ , ovvero  $\phi(t) = \varphi^{t-kT}(x)$  con  $k = k(t)$  l'intero tale che  $t - kT \in [0, T]$ . È immediato verificare che  $\phi$  è soluzione dell'equazione. □

Si verifica ora facilmente che: i) l'insieme di tutti i periodi di una funzione continua  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}$  è un sottogruppo chiuso del gruppo dei numeri reali; ii) ogni sottogruppo chiuso del gruppo dei numeri reali è costituito da tutto  $\mathbb{R}$ , dal singolo elemento  $\{0\}$ , oppure dall'insieme  $\{kT; k \in \mathbb{Z}\}$  per qualche  $T > 0$  (dimostrare queste affermazioni!). Di conseguenza, una curva di fase (massimale) che interseca se stessa è un punto singolare del campo oppure è una curva chiusa che completa il primo giro in un tempo  $T$ .

In particolare, se un campo vettoriale è definito su tutto lo spazio euclideo (i.e.  $v \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ) la struttura geometrica intrinseca delle curve di fase è molto semplice: un punto, una curva chiusa diffeomorfa ad una circonferenza, oppure una curva aperta diffeomorfa ad una retta. Può viceversa essere molto complicata la loro disposizione nello spazio delle fasi.

**1.5.2. Esistenza di flussi di fase.** È naturale ora chiedersi se un campo vettoriale  $v \in C^k(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$  genera un flusso di fase sul dominio  $\mathcal{D}$ , ovvero se  $v$  è il campo delle velocità di un flusso di fase. La risposta è una conseguenza dei risultati della sezione precedente:

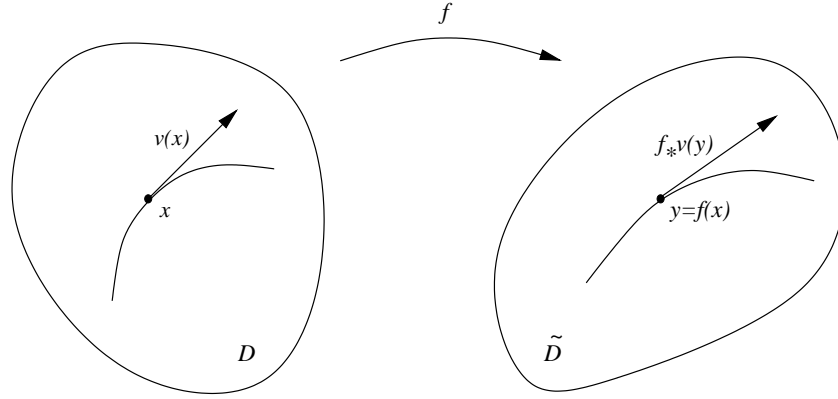


FIGURA 1.6. Azione di un diffeomorfismo  $f$  sul campo vettoriale  $v$ .

PROPOSIZIONE 1.9. *Sia  $v \in C^k(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ . Supponiamo che l'Eq. (1.3) possa essere prolungata indefinitivamente in avanti ed indietro nel tempo. Allora  $(\mathcal{D}, \{\varphi^t\})$  è un flusso di fase (di classe  $C^k$ ) di cui  $v$  è il campo delle velocità di fase.*

DIMOSTRAZIONE. L'esistenza ed unicità globali della soluzione implicano che  $\phi(t+s, 0, x) = \phi(t+s, s, \phi(s, 0, x))$  per ogni  $s, t \in \mathbb{R}$  ed  $x \in \mathcal{D}$ , da cui  $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$ . Essendo  $\varphi^0$  la mappa identità, concludiamo che  $\{\varphi^t\}$  è un gruppo ad un parametro di trasformazioni di  $\mathcal{D}$ . La differenziabilità di tali trasformazioni segue dalla Proposizione 1.5.  $\square$

Si osservi che nel caso in cui la soluzione non esiste globalmente l'applicazione  $\varphi^t(x)$  non definisce (in generale) un diffeomorfismo per nessun tempo  $t \neq 0$ . Si consideri ad esempio l'equazione  $\dot{x} = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (risolta nell'Esempio 1.3). In questo caso  $\varphi^t(x) = x(1 - xt)^{-1}$  che non è un diffeomorfismo per  $t \neq 0$  poiché non è definita in  $x = 1/t$ .

**1.5.3. Azione di un diffeomorfismo su un campo vettoriale.** Supponiamo che  $f: \mathcal{D} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}$  sia un diffeomorfismo di  $\mathcal{D}$  nel dominio  $\tilde{\mathcal{D}}$ . Sia  $t \mapsto \phi(t)$  una curva in  $\mathcal{D}$  soluzione dell'Eq. (1.3). Posto  $\psi(t) \doteq f(\phi(t))$  si ha:

$$\dot{\psi}(t) = Df(\phi(t))v(\phi(t)) = Df(f^{-1}(\psi(t)))v(f^{-1}(\psi(t))).$$

Definiamo allora immagine del campo vettoriale  $v: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sotto l'azione del diffeomorfismo  $f$ , il campo vettoriale  $f_*v: \tilde{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che:

$$f_*v(y) \doteq Df(x)v(x) \Big|_{x=f^{-1}(y)}.$$

In particolare, se  $(\mathcal{D}, \{\varphi^t\})$  è il flusso di fase la cui velocità di fase è data dal campo vettoriale  $v \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ , allora il flusso immagine tramite  $f$ , ovvero il flusso di fase  $(\tilde{\mathcal{D}}, \{f \circ \varphi^t \circ f^{-1}\})$ , è generato dal campo vettoriale  $\tilde{v} \doteq f_*v$ .

Il diffeomorfismo  $f$  può essere interpretato come un cambiamento di coordinate in  $\mathcal{D}$ . Se  $x_i: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sono le coordinate assegnate in  $\mathcal{D}$ , le

funzioni

$$y_i : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} : y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

definiscono un nuovo sistema di coordinate ammissibile (ovvero che conserva la struttura differenziabile) in  $\mathcal{D}$ . Una curva  $\phi(t)$  soluzione dell'Eq. (1.3) ha componenti  $x_i(t) = x_i(\phi(t))$ ,  $i = 1, \dots, n$ , soluzioni del sistema:

$$\dot{x}_i(t) = v_i(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad i = 1, \dots, n,$$

e componenti  $y_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$ ,  $i = 1, \dots, n$ , soluzioni del sistema:

$$\dot{y}_i(t) = (f_* v)_i(y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Quindi  $v \mapsto f_* v$  è la legge di trasformazione del campo vettoriale  $v$  sotto il cambiamento di coordinate  $y = f(x)$ .

**1.5.4. Il teorema della scatola di flusso.** Sia  $v \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ . Un punto  $x_0 \in \mathcal{D}$  è detto *singolare* se  $v(x_0) = 0$ . Il seguente teorema mostra che la struttura delle curve di fase in prossimità di un punto *non* singolare è estremamente semplice.

**TEOREMA 1.10.** *In un intorno sufficientemente piccolo di un punto non singolare un campo vettoriale differenziabile è diffeomorfo al campo costante  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . In altri termini in un intorno di un punto non singolare esiste un diffeomorfismo che trasforma il campo originale in  $e_1$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $v \in C^k(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$  ed  $\bar{x} \in \mathcal{D}$  un punto non singolare (ovvero  $v(\bar{x}) \neq 0$ ). Dobbiamo determinare un intorno  $V \subset \mathcal{D}$  di  $\bar{x}$  ed un  $C^k$ -diffeomorfismo  $f : V \rightarrow W$  dell'intorno  $V$  su un dominio  $W$  di  $\mathbb{R}^n$  tale che  $f_* v(y) = e_1$  per ogni  $x \in V$ . Sia  $H$  un iperpiano ( $\dim(H) = n - 1$ ) passante per  $\bar{x}$  e non contenente  $v(\bar{x})$ . Quindi  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x - \bar{x}) = 0\}$  per un opportuno funzionale lineare  $h$  tale che  $h(v(\bar{x})) \neq 0$ . Possiamo assumere il sistema di coordinate  $x_i : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

$$\bar{x} = 0, \quad v(0) = |v(0)|e_1, \quad H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

(ci si può infatti ricondurre a tale caso mediante una trasformazione affine di coordinate). In tal modo ogni elemento  $\xi \in H$  rimane individuato attraverso le  $n - 1$  coordinate  $(\xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

Per il teorema di esistenza ed unicità locali esistono un intorno  $I$  di  $t = 0$  e  $U$  di  $\bar{x} = 0$  tali che la soluzione  $\varphi^t(x)$  esiste di classe  $C^k$  per ogni  $(t, x) \in I \times U$ . In particolare, posto  $S = U \cap H$ , è definita l'applicazione di classe  $C^k$ ,

$$\psi : I \times S \rightarrow \mathcal{D} : \psi(y) = \varphi^t(\xi), \quad y = (t, \xi),$$

che fornisce l'evoluzione al tempo  $t$  del punto  $\xi$  sulla sezione  $S$ . Mostriamo che  $\psi$  è un diffeomorfismo locale (intorno l'origine delle coordinate). A tal scopo è sufficiente applicare il teorema della funzione inversa: essendo la matrice jacobiana

$$D\psi(0) = \begin{pmatrix} |v(0)| & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

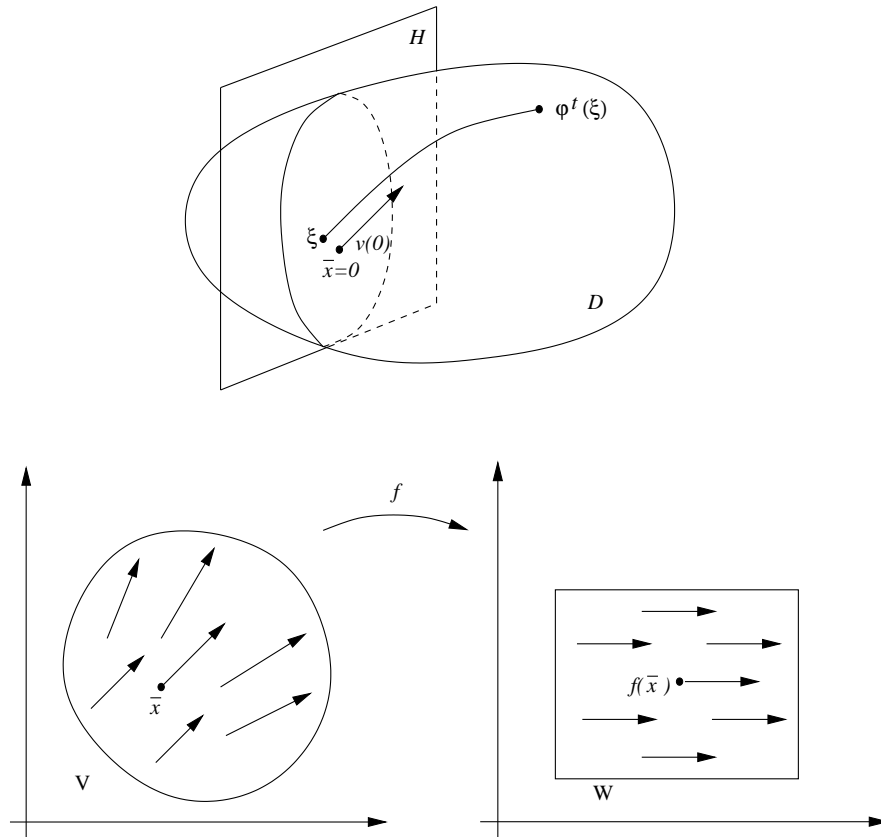


FIGURA 1.7. Diffeomorfismo di rettificazione

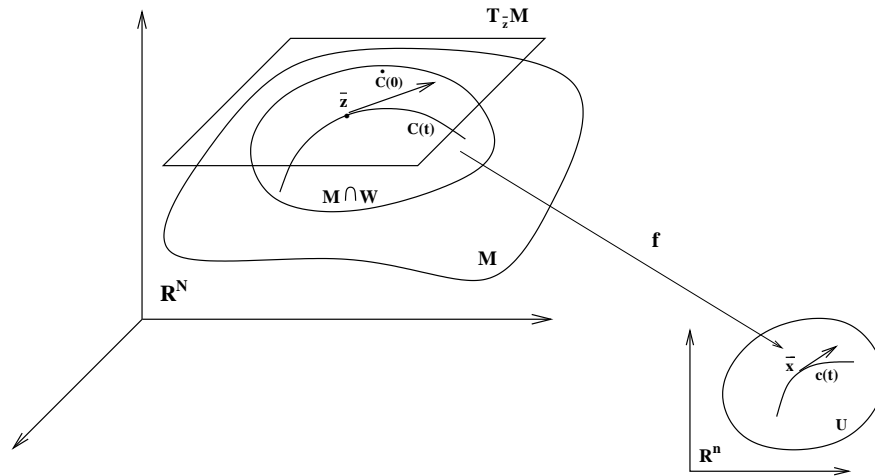
(Il la matrice identità su  $\mathbb{R}^{n-1}$ ) non singolare, esiste un intorno  $W \subset I \times S$  dell'origine tale che, posto  $V = \psi(W)$ , l'applicazione  $\psi : W \rightarrow V$  è un  $C^k$ -diffeomorfismo. Inoltre, per ogni  $x \in V$ , se  $x = \psi(y) = \varphi^t(\xi)$ ,

$$\psi_* e_1(x) = D\psi(y)e_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y_1}(y) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi^t(\xi) = v(\varphi^t(\xi)) = v(x),$$

ovvero  $\psi_*^{-1} v(y) = e_1$  (infatti  $D\psi^{-1} = (D\psi)^{-1}$ ). Dunque  $f \doteq \psi^{-1}$  è il  $C^k$ -diffeomorfismo cercato.  $\square$

Si osservi che il teorema ora dimostrato afferma equivalentemente che, in un intorno  $V$  di un punto non singolare del campo  $v$ , l'equazione  $\dot{x} = v(x)$  è equivalente alla semplice equazione  $\dot{y} = e_1$ ,  $y \in W$ , la cui soluzione è  $y_1(t) = y_1(0) + t$ ,  $y_j(t) = y_j(0)$ ,  $j = 2, \dots, n$ .

**1.5.5. Equazioni differenziali su varietà.** La Definizione 1.1 si estende al caso di un flusso  $(M, \{\varphi^t\})$  su una varietà differenziabile  $M$  definita come in (1.1). Fissato  $\bar{z} \in M$ , il moto  $t \mapsto \varphi^t(\bar{z})$  è una curva differenziabile su  $M$ , passante per  $\bar{z}$

FIGURA 1.8. Spazio tangente alla superficie  $M \subset \mathbb{R}^N$  nel punto  $\bar{z}$ 

al tempo  $t = 0$ . Definiamo allora velocità di fase del flusso in  $\bar{z}$  il vettore

$$v(\bar{z}) = \left. \frac{d}{dt} \varphi^t(\bar{z}) \right|_{t=0}.$$

Poiché la curva giace in  $M$ , tale vettore è tangente ad  $M$  nel punto  $\bar{z}$ , ovvero appartiene allo spazio (o iperpiano) tangente ad  $M$  in  $\bar{z}$ , che indichiamo con  $T_{\bar{z}}M$ . Per descrivere tale spazio introduciamo un sistema di coordinate locali  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$  in un intorno  $W$  di  $\bar{z}$ , definito mediante le equazioni parametriche  $z = f(x)$ , vedi l'equazione (1.2).

Chiaramente ogni curva  $t \mapsto C(t)$  in  $M \cap W$  tale che  $C(0) = \bar{z}$  si ottiene come immagine  $C(t) = f(c(t))$  di un'opportuna curva  $t \mapsto c(t)$  nel dominio  $U$  tale che  $c(0) = \bar{x} := f^{-1}(\bar{z})$ . Allora il vettore tangente a  $C(t)$  in  $t = 0$  si scrive:

$$\dot{C}(0) = \left. \frac{d}{dt} f(c(t)) \right|_{t=0} = Df(\bar{x}) \dot{c}(0) = \sum_{i=1}^n \dot{c}_i(0) \partial_{x_i} f(\bar{x}),$$

ovvero una combinazione lineare degli  $n$  vettori  $\partial_{x_i} f(\bar{x})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . D'altra parte, poiché  $f$  ha rango massimo, il rango di  $Df(\bar{x}) = \{\partial_{x_i} f_j(\bar{x})\}$  è pari ad  $n$ , cosicché i vettori  $\partial_{x_i} f(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sono linearmente indipendenti. Ne segue che l'insieme  $T_{\bar{z}}M$  dei vettori tangenti ad  $M$  in  $\bar{z}$  è uno spazio lineare di dimensione  $n$ , in cui le coordinate locali inducono una base naturale. In particolare il vettore velocità di fase  $v(\bar{z})$  è il vettore tangente ad  $M$  in  $\bar{z}$  le cui componenti  $\xi_1, \dots, \xi_n$  (nel suddetto sistema di coordinate) sono:

$$\xi_i = \left. \frac{d}{dt} x_i(\varphi^t(\bar{z})) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (f^{-1})_i(\varphi^t(\bar{z})) \right|_{t=0}.$$

Dunque i moti sono soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria  $\dot{z} = v(z)$  sulla varietà  $M$ . Tutti i risultati di natura locale sulle equazioni differenziali su domini di  $\mathbb{R}^n$  si estendono immediatamente al caso di equazioni su varietà, poiché quest'ultimo caso si riduce al primo dopo avere introdotto le coordinate

locali. La struttura topologica della varietà si evidenzia viceversa in risultati riguardanti il comportamento globale delle soluzioni. Ricordiamo qui un primo semplice risultato: *ogni campo vettoriale differenziabile su una varietà compatta  $M$  è il campo delle velocità di fase di un flusso  $(M, \{\varphi^t\})$* . In effetti abbiamo visto che l'ostruzione all'esistenza di un gruppo di diffeomorfismi si manifesta sempre nella fuga all'infinito (in generale verso la frontiera del dominio del campo) delle soluzioni. È quindi evidente che ogni soluzione di un'equazione su una varietà compatta (si pensi ad esempio ad un toro, una superficie sferica etc.) si possa prolungare indefinitivamente nel tempo.

### 1.6. Integrali primi

Si dice *derivata di Lie* della funzione  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  rispetto al campo vettoriale  $v : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  la nuova funzione  $L_v F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$L_v F(x) := \left. \frac{d}{dt} F(\varphi^t(x)) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) v_i(x) = \langle \nabla F(x), v(x) \rangle, \quad (1.12)$$

dove  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è il prodotto scalare canonico di  $\mathbb{R}^n$ . Indicando con  $\varphi^t(x)$ ,  $t \in J_x$ , la soluzione massimale del problema di Cauchy associato al campo  $v$ , si verifica immediatamente che:

$$\frac{d}{dt} F(\varphi^t(x)) = L_v F(\varphi^t(x)) \quad \forall t \in J_x.$$

Dal segno di  $L_v F$  si può così determinare se la funzione  $F$  cresce, decresce o rimane costante lungo le soluzioni. In particolare la funzione  $F$  è detta *integrale primo* (indipendente dal tempo) per il sistema (1.3) se  $L_v F = 0$ . Ne segue in tal caso che  $F$  è costante lungo ogni soluzione di (1.3) e che ogni curva di fase giace interamente su uno ed un solo insieme di livello di  $F$ .

La conoscenza di integrali primi fornisce informazioni sul comportamento delle soluzioni. In particolare, se sono noti  $n - 1$  integrali primi  $F_k$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ , funzionalmente indipendenti, il problema di Cauchy è completamente integrabile. Infatti, per ogni dato iniziale  $x_0$ , l'orbita rimane fissata dall'intersezione delle  $n - 1$  superfici di equazione  $F_k(x) = F_k(x_0)$ , dopodiché la legge oraria lungo l'orbita, che è un problema unidimensionale autonomo, si integra per separazione delle variabili.

In generale, un campo vettoriale può non ammettere alcun integrale primo non costante. Infatti, a causa della struttura topologica delle orbite, queste possono non essere interamente contenute nella superficie di livello di nessuna funzione non banale, definita globalmente sul dominio  $\mathcal{D}$ . Viceversa, localmente esistono sempre integrali primi non banali. Più precisamente, nell'intorno di un punto non singolare del campo vettoriale, esistono addirittura  $n - 1$  integrali primi funzionalmente indipendenti. In effetti, per il sistema standard  $\dot{y} = e_1$ , è evidente che le coordinate  $y_2, \dots, y_n$  sono  $n - 1$  integrali primi funzionalmente indipendenti. D'altra parte, per il teorema della scatola di flusso, nell'intorno di un punto non singolare ogni sistema differenziale ammette coordinate in cui

assume la forma standard (si osservi infine che l'indipendenza funzionale non dipende dal sistema di coordinate).

ESEMPIO 1.5. Consideriamo un sistema di  $N$  particelle di masse  $m_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , interagenti mediante forze conservative. Quindi esiste una funzione delle coordinate delle particelle,  $U = U(x_1, \dots, x_N)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, \dots, N$ , detta energia potenziale, tale che le equazioni del moto sono assegnate dal sistema del secondo ordine:

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Si verifica immediatamente che l'energia meccanica totale

$$\mathcal{E}(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 + U(x_1, \dots, x_N)$$

è un integrale primo del moto.

ESERCIZIO 1.4. Con riferimento all'Esempio 1.5, dimostrare che le soluzioni delle equazioni di Newton sono prolungabili su tutto l'asse dei tempi nel caso in cui l'energia potenziale è una funzione non negativa e due volte differenziabile su  $\mathbb{R}^{3N}$ .

ESERCIZIO 1.5. Supponiamo che il sistema (1.3) ammette un'orbita densa in  $\mathcal{D}$ . Dimostrare che allora non esistono integrali primi non banali.

ESERCIZIO 1.6. Sia  $C^\infty(\mathcal{D})$  l'insieme delle funzioni reali infinitamente differenziabili su  $\mathcal{D}$ , dotato della struttura naturale di anello. La derivata di Lie rispetto ad un campo vettoriale  $v : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  infinitamente differenziabile definisce un'applicazione  $L_v : C^\infty(\mathcal{D}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{D})$ . Dimostrare le seguenti proprietà

- 1)  $L_v$  è una derivazione sull'anello  $C^\infty(\mathcal{D})$ , ovvero  $L_v$  è un operatore lineare tale che  $L_v(FG) = FL_vG + GL_vF$ ;
- 2)  $L_{v+u} = L_v + L_u$ ;
- 3)  $L_{Fv} = FL_v$ ;
- 4) l'operatore differenziale  $[L_v, L_u] \doteq L_vL_u - L_uL_v$  è un operatore del primo ordine. In particolare  $[L_v, L_u] = L_{[v, u]}$ , dove il campo vettoriale  $[v, u]$ , detto commutatore o parentesi di Lie dei campi  $v, u$ , ha componenti

$$[v, u]_i = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j};$$

- 5)  $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$  (identità di Jacobi).

**Caso non autonomo.** Sia  $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $\Omega$  un dominio di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Ricordiamo che l'eq. (1.4) è equivalente all'equazione autonoma  $\dot{y} = V(y)$ , con  $V \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^{n+1})$  il campo vettoriale tale che  $V(y) = (1, v(t, x))$  per  $y = (t, x) \in \Omega$ . Una funzione  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$  è detta *integrale primo dipendente dal tempo* per l'equazione (1.4) se è un integrale primo del sistema autonomo  $\dot{y} = V(y)$ , dunque se

$$L_V F(y) = \langle \nabla F(y), V(y) \rangle = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x) v_i(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in \Omega. \quad (1.13)$$

Analogamente al caso autonomo, ogni curva integrale del sistema è interamente contenuta in uno ed un solo insieme di livello di  $F$ .

ESEMPIO 1.6. Consideriamo le *equazioni non autonome sulla retta a variabili separabili*, ovvero il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = p(t)v(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.14)$$

dove  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni continue sugli intervalli aperti  $U$ ,  $I$  rispettivamente. Si osservi che il sistema autonomo (1.5) è il caso particolare di (1.14) in cui si ponga  $p(t) = 1$ ,  $I = \mathbb{R}$ .

Chiaramente se  $v(x_0) = 0$  esiste la soluzione stazionaria  $x(t) \equiv x_0$  del problema. Se invece  $v(x_0) \neq 0$  possiamo integrare localmente l'equazione ragionando analogamente al caso autonomo. Sia quindi  $V = (x_-, x_+)$  definito come in Sezione 1.3 e poniamo ora:

$$G(t, x) \doteq \int_{t_0}^t ds p(s) - \int_{x_0}^x dy \frac{1}{v(y)}.$$

Chiaramente  $G : I \times V \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile con continuità e si verifica immediatamente che  $G(t, \phi(t)) = 0$  lungo ogni soluzione  $t \mapsto \phi(t)$  di (1.14), ovvero  $G$  è un integrale primo dipendente dal tempo. D'altra parte

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t, x) = \frac{1}{v(x)} \neq 0 \quad \forall (t, x) \in I \times V,$$

cosicché, per il teorema della funzione implicita, esiste un'unica esplicitazione  $t \mapsto x(t)$  dell'equazione  $G(t, x(t)) = 0$ , che fornisce quindi anche l'unica soluzione locale del problema (1.14).

Si osservi che in questo caso non è garantita l'esplicitazione locale del tempo  $t(x)$ . In effetti, se  $p(t_0) = 0$  la soluzione  $x(t)$  può essere non monotona in ogni intorno di  $t_0$ ; d'altra parte la condizione  $p(t_0) \neq 0$  non è necessaria per l'esistenza ed unicità locale della soluzione stessa.

### 1.7. Soluzione degli esercizi

SOLUZIONE ES. 1.1. È sufficiente osservare che sotto le ipotesi date, se  $x_{\pm}$  è un punto singolare oppure  $x_{\pm} = \pm\infty$  allora l'integrale improprio che appare nel membro di destra dell'Eq. (1.7) è divergente (nel caso in cui  $x_{\pm}$  è un punto singolare si utilizzi il fatto che la differenziabilità del campo implica che esistono un intorno  $V$  di  $x_{\pm}$  ed una costante  $C$  tali che  $|v(x)| \leq C|x - x_0|$  per ogni  $x \in V$ ).

SOLUZIONE ES. 1.2. Per separazione delle variabili si verifica facilmente che l'unica soluzione del problema di Cauchy è la funzione inversa di  $t = t(x)$  così definita:

$$t = \begin{cases} 2[\sqrt{x} - \log(1 + \sqrt{x})] & \text{se } x \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 2[-\sqrt{-x} + \log(1 + \sqrt{-x})] & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

SOLUZIONE ES. 1.3. I punti singolari del campo sono  $x = 0$  ed  $x = 1$ , cosicché le funzioni  $x_1(t) \equiv 0$  ed  $x_2(t) \equiv 1$  sono soluzioni stazionarie. Sia ora  $x_0 \neq 0, 1$  e quindi  $v(x_0) \neq 0$ . Determiniamo la soluzione con condizione iniziale  $x(t_0) = x_0$  come funzione inversa di  $t = t(x)$  definita da

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x dy \frac{1}{y(1-y)} = t_0 + \log \frac{x(1-x_0)}{x_0(1-x)},$$

da cui

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{-(t-t_0)}}.$$

Distinguiamo quindi tre casi:

*i)*  $x_0 < 0$ . La soluzione  $x(t)$  è monotona decrescente ed è definita solo per tempi  $t < T$ , dove  $T$  è definito da:

$$x_0 + (1-x_0)e^{-(T-t_0)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T = t_0 + \log \frac{|x_0|+1}{|x_0|} > t_0.$$

In particolare:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow T^-} x(t) = -\infty.$$

*ii)*  $0 < x_0 < 1$ . La soluzione  $x(t)$  è monotona crescente ed è definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . In particolare:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1.$$

*iii)*  $x_0 > 1$ . La soluzione  $x(t)$  è monotona decrescente ed è definita solo per tempi  $t > \bar{T}$ , dove  $\bar{T}$  è definito da:

$$x_0 + (1-x_0)e^{-(\bar{T}-t_0)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{T} = t_0 + \log \frac{x_0-1}{x_0} < t_0.$$

In particolare:

$$\lim_{t \rightarrow \bar{T}^+} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1.$$

Troviamo che per certi dati iniziali ( $x_0 < 0$  o  $x_0 > 1$ ) la soluzione non esiste globalmente ma fugge all'infinito (che è la frontiera di  $\mathbb{R}$ , dominio del campo vettoriale) in un tempo finito. Viceversa, qualunque sia il dato iniziale  $x_0 \neq 0, 1$ , il tempo necessario a raggiungere le posizioni di equilibrio  $x = 0, 1$  è infinito, cosicché non si ha perdita di unicità.

SOLUZIONE ES. 1.5. Se  $F$  è un integrale primo, allora  $F$  è una funzione continua e costante su un insieme denso in  $\mathcal{D}$ ; dunque  $F$  è costante su tutto  $\mathcal{D}$ .

SOLUZIONE ES. 1.4. Le equazioni del moto sono equivalenti al seguente sistema del primo ordine autonomo in  $\mathbb{R}^{6N}$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i \\ m_i \dot{y}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \end{cases} \quad (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad i = 1, \dots, N.$$

La regolarità di  $U$  garantisce l'esistenza ed unicità locali delle soluzioni. Sia  $t \mapsto \{(x_i(t), y_i(t)); i = 1, \dots, N\}$  una soluzione. Essendo l'energia potenziale positiva, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{m_i}{2} y_i(t)^2 &\leq \mathcal{E}(x_1(t), \dots, x_N(t), y_1(t), \dots, y_N(t)) \\ &= \mathcal{E}(x_1(0), \dots, x_N(0), y_1(0), \dots, y_N(0)) \\ &= E_0 \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Quindi, poiché inoltre  $y_i(t) = \dot{x}_i(t)$ , si hanno le stime:

$$|y_i(t)| \leq \sqrt{2E_0/m_i}, \quad |x_i(t) - x_i(0)| \leq \sqrt{2E_0/m_i} |t| \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

che valgono per tutti i tempi  $t$  per i quali la soluzione è definita. Fissato  $T > 0$ , consideriamo ora il compatto  $K_T = [-T, T] \times Q_T$  dello spazio delle fasi ampliato  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{6N}$ , dove

$$Q_T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{6N} : |x_i - x_i(0)| \leq 2T\sqrt{E_0/m_i}, |y_i| \leq 2\sqrt{E_0/m_i}, i = 1, \dots, N\}.$$

Per il Teorema 1.4 la soluzione si prolunga fino alla frontiera di  $K_T$ , ma per le stime precedenti essa può raggiungere solo le facce di  $K_T$  per cui  $|t| = T$ . La soluzione si prolunga in tal modo su l'intero intervallo di tempi  $[-T, T]$  e quindi, essendo  $T$  arbitrario, su tutto  $\mathbb{R}$ .

SOLUZIONE ES. 1.41. Dimostriamo l'identità di Jacobi, gli altri punti sono banali. Dobbiamo dimostrare che

$$[[L_a, L_b], L_c] + [[L_b, L_c], L_a] + [[L_c, L_a], L_b] = 0.$$

Si ha

$$[[L_a, L_b], L_c] = L_a L_b L_c - L_a L_c L_b - L_b L_c L_a + L_c L_b L_a$$

ed analogamente gli altri due termini. La somma di queste espressioni è uguale a zero.

### 1.8. Nota bibliografica

Per gli argomenti trattati in questo capitolo si può fare riferimento ai testi sotto riportati.

- 1) V.I. Arnold. *Equazioni differenziali ordinarie*. Mosca: Edizioni Mir, 1978.
- 2) V.I. Arnold. *Metodi matematici della meccanica classica*. Roma: Editori Riuniti, 1979.
- 3) J. Guckenheimer, P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. (Applied Mathematical Sciences **42**). Berlin: Springer, 1993.
- 4) A. Katok, B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. (Encyclopedia of mathematics and its applications **54**). Cambridge: Cambridge U.P., 1995.

## CAPITOLO 2

### Sistemi lineari

#### 2.1. Linearizzazione

Consideriamo l'equazione differenziale:

$$\dot{x} = v(t, x) \quad (t, x) \in I \times \mathcal{D}, \quad (2.1)$$

dove  $v \in C^0(I \times \mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ ,  $Dv = \partial v / \partial x \in C^0(I \times \mathcal{D}; \mathbb{R}^{n^2})$  e sia  $\phi(t)$  una soluzione. Posto  $x = \phi(t) + y$ , l'equazione differenziale nella variabile  $y$  si scrive:

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad (2.2)$$

dove  $A(t) \doteq Dv(t, \phi(t))$  ed  $f(t, y)$  è un infinitesimo di ordine superiore:  $f(t, 0) = 0$ ,  $Df(t, 0) = 0$ . *Linearizzare* l'Eq. (2.1) intorno alla soluzione  $\phi(t)$  significa trascurare i termini di ordine superiore nello sviluppo del campo intorno a  $\phi(t)$  e considerare l'equazione differenziale *lineare*:

$$\dot{y} = A(t)y, \quad (t, y) \in I \times \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

È naturale chiedersi quale connessione esista tra le soluzioni del sistema lineare (2.3) e quelle dell'equazione originale (2.1). In particolare si può sperare che almeno localmente (ovvero in un intorno della soluzione  $\phi(t)$ ) ogni soluzione  $y(t) = x(t) - \phi(t)$  dell'Eq. (2.2) sia ben approssimata dal corrispondente problema di Cauchy per il sistema (2.3). Lo studio della relazione tra le soluzioni del problema originario e quelle del problema linearizzato si basano su un controllo particolareggiato di queste ultime.

La situazione più semplice che possiamo considerare è quella della linearizzazione intorno ad una posizione di equilibrio di un sistema autonomo. Sia quindi  $x_0$  un punto singolare del campo vettoriale  $v \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ . Dunque  $x(t) \equiv x_0$  è una soluzione stazionaria dell'equazione differenziale  $\dot{x} = v(x)$ . In tal caso l'equazione linearizzata è:

$$\dot{y} = Ay, \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

essendo  $A \doteq Dv(x_0)$ .

Entrambe le equazioni (2.3) e (2.4) sono lineari ed *omogenee*, ovvero il campo vettoriale che le definisce è una funzione lineare della variabile  $y$  ed è assente un termine di ordine 0 nella stessa  $y$ . Osserviamo che l'Eq. (2.4) è inoltre autonoma: la matrice  $A$  è una funzione costante, ovvero non dipende dalla variabile temporale  $t$ . Vedremo che in questo caso il calcolo delle soluzioni dell'equazione differenziale si riduce al problema algebrico della riduzione della matrice  $A$  in forma opportuna.

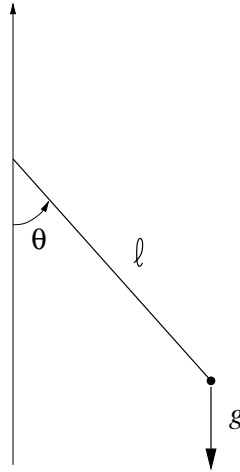


FIGURA 2.1. Il pendolo matematico piano.

Un altro esempio importante di equazione differenziale lineare è costituito dalla equazione delle variazioni (A.18) che descrive l'evoluzione della matrice jacobiana (rispetto ai dati iniziali) della soluzione di un problema di Cauchy.

ESEMPIO 2.1. Consideriamo l'equazione del pendolo matematico piano,

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta, \quad \omega \doteq \sqrt{\frac{g}{\ell}},$$

dove  $\theta \in \mathbb{R}$  è l'angolo (crescente in senso antiorario) che il pendolo forma con la verticale discendente,  $g$  l'accelerazione di gravità ed  $\ell$  la lunghezza del pendolo. Nello spazio delle fasi  $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2$  l'equazione si riscrive come sistema del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 \sin x_1. \end{cases}$$

ovvero  $\dot{x} = v(x)$  con

$$v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega^2 \sin x_1 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente  $z_j = (j\pi, 0)$  è un punto singolare del campo per ogni  $j \in \mathbb{Z}$ , ovvero  $v(z_j) = 0$ . Si ha:

$$A_j \doteq Dv(z_j) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(j\pi, 0) & \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(j\pi, 0) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(j\pi, 0) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(j\pi, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{j+1}\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'equazione linearizzata intorno al punto singolare  $z_j$  è allora  $\dot{y} = A_j y$ , ovvero:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = (-1)^{j+1}\omega^2 y_1. \end{cases}$$

In particolare, per  $j$  pari, troviamo la ben nota equazione dell'oscillatore armonico,  $\ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 = 0$ , che descrive le piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile  $x = 0 \pmod{2\pi}$ .

Più in generale, sia  $q = q_0$  una posizione di equilibrio del sistema meccanico descritto dall'equazione:

$$\ddot{q} = F(q), \quad q \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

Il corrispondente campo vettoriale nello spazio delle fasi  $x = (q, \dot{q}) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^n$  possiede un punto singolare in  $x_0 = (q_0, 0)$ . L'equazione linearizzata intorno a tale punto è:

$$\dot{y} = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^{2n},$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ DF(q_0) & 0 \end{pmatrix},$$

essendo i blocchi a destra matrici  $n \times n$ . Più esplicitamente:

$$\begin{cases} \dot{y}_i = y_{n+i}, \\ \dot{y}_{n+i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial q_j}(q_0) y_j, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

ESERCIZIO 2.1. Linearizzare le equazioni del pendolo con attrito,

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta - \beta \dot{\theta}, \quad \beta > 0,$$

intorno alla posizione di equilibrio  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ .

ESERCIZIO 2.2. Si consideri un pendolo matematico piano in cui il punto di sospensione oscilla verticalmente secondo la legge  $a \cos(\gamma t)$ , essendo  $a, \gamma$  due parametri positivi. Siano rispettivamente  $g, \ell, m$  l'accelerazione di gravità, la lunghezza ed il peso del pendolo. Utilizzando l'angolo  $\theta$  (crescente in senso antiorario) che il pendolo forma con la verticale discendente, scrivere la lagrangiana del sistema e le relative equazioni del moto. Verificare che  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  è una posizione di equilibrio e linearizzare le equazioni del moto intorno a tale posizione.

ESERCIZIO 2.3. Si consideri il seguente sistema differenziale su  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) - x_2(1 + x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1(1 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2). \end{cases}$$

Utilizzando le coordinate polari  $(r, \theta)$ , determinare una soluzione periodica del sistema e scrivere il sistema linearizzato intorno ad essa.

## 2.2. Proprietà generali

**2.2.1. Preliminari.** Sia  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Assumeremo nel seguito fissato in  $\mathbb{R}^n$  il prodotto scalare canonico  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,

$$\langle x, y \rangle \doteq \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

Altrimenti detto,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è il prodotto scalare rispetto al quale la base canonica  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  di  $\mathbb{R}^n$  è ortonormale. Tramite il prodotto scalare definiamo la norma euclidea:

$$|x| \doteq \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

e quindi la distanza tra vettori  $d(\cdot, \cdot)$ :

$$d(x, y) \doteq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dotato della quale  $\mathbb{R}^n$  è uno spazio metrico completo.

Sia ora  $\mathcal{M}_n$  lo spazio delle matrici  $n \times n$ , che assumiamo dotato della struttura naturale di spazio lineare di  $\mathbb{R}^{n^2}$  e del prodotto riga per colonna. Fissata una base in  $\mathbb{R}^n$ , ad esempio quella canonica  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ , ogni operatore lineare  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è univocamente determinato dalla matrice  $\{A_{i,j}\}_{i,j=1, \dots, n}$  i cui elementi forniscono l'azione dell'operatore sui vettori di base:

$$Ae_i = \sum_{j=1}^n A_{j,i} e_j,$$

ovvero sulle coordinate:

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j.$$

Questa corrispondenza è un isomorfismo lineare tra  $\mathcal{M}_n$  e lo spazio lineare  $L(\mathbb{R}^n)$  degli operatori lineari su  $\mathbb{R}^n$ , che fornisce una identificazione canonica di  $L(\mathbb{R}^n)$  con  $\mathcal{M}_n$ . Inoltre, definendo il prodotto di due operatori  $A, B \in L(\mathbb{R}^n)$  come la composizione degli stessi, ovvero ponendo  $(AB)x \doteq A(Bx) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ , la matrice rappresentativa dell'operatore  $AB$  è data dal prodotto riga per colonna delle matrici  $A$  e  $B$ :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j}.$$

Introduciamo in  $L(\mathbb{R}^n)$  (e quindi in  $\mathcal{M}_n$ ) la *norma uniforme*:

$$\|A\| \doteq \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax|, \quad (2.5)$$

rispetto alla quale  $L(\mathbb{R}^n)$  è uno spazio normato completo. Essendo  $L(\mathbb{R}^n)$  di dimensione finita, tutte le norme sono equivalenti. Più specificatamente è facile dimostrare che:

$$\max_j \sum_{i=1}^n A_{i,j}^2 \leq \|A\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n A_{i,j}^2 \quad \forall A \in L(\mathbb{R}^n),$$

che mostra in particolare come una successione di operatori  $\{A^{(k)}; k = 1, \dots\}$  è di Cauchy [risp. convergente all'operatore  $A$ ] se e solo se le successioni di numeri reali  $\{A_{i,j}^{(k)}; k = 1, \dots\}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , sono di Cauchy [risp. convergono ad  $A_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ].

**2.2.2. Equazioni lineari omogenee.** Consideriamo l'equazione differenziale lineare omogenea:

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

dove  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo e  $t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n$  una funzione continua, ovvero  $A(t) = \{A_{i,j}(t)\}_{i,j=1,\dots,n}$  con  $t \mapsto A_{i,j}(t)$  funzioni reali continue. Per il teorema di esistenza ed unicità il problema di Cauchy per l'equazione (2.6) è ben posto.

LEMMA 2.1. *Ogni soluzione dell'Eq. (2.6) è prolungabile sull'intero intervallo  $I$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\varphi(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , una soluzione dell'Eq. (2.6) ed  $[a, b]$  un qualsiasi intervallo compatto di  $I$  che contiene  $[t_0, t_1]$ . Poniamo:

$$C_{a,b} = \max_{t \in [a,b]} \|A(t)\|,$$

dove  $\|A(t)\|$  è la norma uniforme dell'operatore lineare  $A(t)$ . Chiaramente  $C_{a,b} < +\infty$  essendo  $t \mapsto A(t)$  continua ed  $[a, b]$  compatto. Scrivendo l'equazione (2.6) in forma integrale ed utilizzando (A.3) si ha, per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ ,

$$|\varphi(t)| \leq |\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^t ds |A(s)\varphi(s)| \leq |\varphi(t_0)| + C_{a,b} \int_{t_0}^t ds |\varphi(s)|,$$

e quindi, per il Lemma di Gronwall (vedi Lemma A.3),

$$|\varphi(t)| \leq |\varphi(t_0)| e^{C_{a,b}(b-a)}.$$

Dunque la soluzione  $\varphi(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  è confinata nel compatto dello spazio delle fasi ampliato  $\{(t, x) : t \in [a, b], |x| \leq 2|\varphi(t_0)|e^{C_{a,b}(b-a)}\}$ . Possiamo ora ripetere il medesimo ragionamento fatto nella dimostrazione del Corollario 1.6 e concludere la prova.  $\square$

Ricordiamo che ciascun insieme  $C^k(I; \mathbb{R}^n)$ ,  $k \geq 0$ , delle funzioni  $k$  volte differenziabili con continuità è dotato di una struttura naturale di spazio lineare. Infatti se  $\varphi_1, \varphi_2 \in C^k(I; \mathbb{R}^n)$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  allora  $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 \in C^k(I; \mathbb{R}^n)$ . Ovviamente il vettore nullo di tale spazio è dato dalla funzione identicamente nulla:  $\varphi(t) = 0 \forall t \in I$ . Si può facilmente mostrare che tutti questi spazi hanno dimensione infinita.

TEOREMA 2.2. *L'insieme di tutte le soluzioni dell'Eq. (2.6) è un sottospazio lineare di  $C^1(I; \mathbb{R}^n)$  isomorfo allo spazio delle fasi  $\mathbb{R}^n$ .*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con  $\mathcal{S}$  l'insieme di tutte le soluzioni dell'Eq. (2.6). Siano  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$  e si ponga  $\psi \doteq \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$ , essendo  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Si ha, per ogni  $t \in I$ ,

$$\dot{\psi}(t) = \lambda\dot{\varphi}_1(t) + \mu\dot{\varphi}_2(t) = \lambda A(t)\varphi_1(t) + \mu A(t)\varphi_2(t) = A(t)\psi(t),$$

ovvero  $\psi \in \mathcal{S}$ . Quindi  $\mathcal{S}$  è un sottospazio lineare di  $C^1(I; \mathbb{R}^n)$ . Definiamo ora mappa di valutazione al tempo  $t \in I$  l'applicazione lineare:

$$\Omega_t : C^0(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Omega_t \varphi \doteq \varphi(t). \quad (2.7)$$

Mostriamo che  $\Omega_t$  è isomorfismo di  $\mathcal{S}$  su  $\mathbb{R}^n$ . In effetti, per il teorema di esistenza ed unicità esiste un'unica  $\varphi \in \mathcal{S}$  tale che  $\varphi(t) = x$ , ovvero  $\Omega_t \varphi = x$ . Dunque  $\Omega_t$  è applicazione biunivoca di  $\mathcal{S}$  in  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

Assegnato un generico sistema di  $n$  funzioni  $\varphi_i \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , indichiamo con  $\varphi_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , le componenti di  $\varphi_i$ , ovvero

$$\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^n \varphi_{i,j}(t) e_j,$$

e definiamo *wronskiano* del suddetto sistema la funzione numerica  $t \mapsto W(t)$  tale che:

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_{1,1}(t) & \dots & \varphi_{n,1}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{1,n}(t) & \dots & \varphi_{n,n}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Quando sarà necessario esplicitare la dipendenza dalle  $n$  funzioni utilizzeremo la notazione estesa  $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](t)$  per indicare il wronskiano.

Definiamo ora *sistema fondamentale di soluzioni* dell'Eq. (2.6) ogni base di  $\mathcal{S}$ , ovvero ogni collezione di  $n$  soluzioni linearmente indipendenti. Il seguente lemma fornisce un criterio per stabilire la indipendenza lineare di un sistema di soluzioni.

**LEMMA 2.3.** *Sia  $W$  il wronskiano di un sistema di  $n$  soluzioni dell'Eq. (2.6). Allora  $W(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$  oppure  $W(t) = 0$  per ogni  $t \in I$ . Nel primo caso il sistema è fondamentale.*

**DIMOSTRAZIONE.** Essendo la mappa  $\Omega_t$  definita in (2.7) un isomorfismo di  $\mathcal{S}$  in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$  soluzioni  $\{\varphi_i\}_{i=1, \dots, n}$  sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono gli  $n$  vettori  $\{\varphi_i(t)\}_{i=1, \dots, n}$  di  $\mathbb{R}^n$  (per ogni  $t \in I$ ). D'altra parte questi ultimi sono linearmente indipendenti se e solo se  $W(t) \neq 0$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE 2.1.** Il wronskiano di  $n$  funzioni generiche (non soluzioni di (2.6)) può annullarsi in qualche punto senza che queste siano linearmente dipendenti. Consideriamo ad esempio le funzioni:

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix} \implies W(t) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & t^2 \end{pmatrix} = t(t-1).$$

Osserviamo che  $W(0) = W(1) = 0$  e  $W(t) \neq 0$  se  $t \neq 0, 1$ . In particolare  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$  ed  $\varphi_1(1) = \varphi_2(1)$ , mentre  $\varphi_1(t)$  è indipendente da  $\varphi_2(t)$  per ogni  $t \neq 0, 1$ . D'altra parte le funzioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono tra loro linearmente indipendenti poiché non esistono costanti  $c_1$  e  $c_2$  non nulle tali che  $c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . È possibile anche che il wronskiano si annulli identicamente senza che le

funzioni siano linearmente dipendenti. Si consideri il seguente esempio:

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \implies W(t) = \det \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} \equiv 0$$

In questo caso  $\varphi_2(t) = t\varphi_1(t)$ , per cui i vettori  $\varphi_1(t)$  e  $\varphi_2(t)$  sono linearmente dipendenti per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . D'altra parte le funzioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono tra loro linearmente indipendenti poiché il fattore di proporzionalità tra i vettori  $\varphi_1(t)$  e  $\varphi_2(t)$  non è costante.

Dal Lemma 2.6, se  $\varphi_i \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , è un sistema fondamentale di soluzioni, la matrice  $\Phi(t)$  di elementi  $\Phi_{i,j}(t) = \varphi_{j,i}(t)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , è non singolare, ovvero  $\det \Phi(t) \neq 0$ , per ogni  $t \in I$ . Inoltre, essendo le  $\varphi_i$  soluzioni di (2.6), la funzione  $t \mapsto \Phi(t)$  soddisfa l'equazione:

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi \iff \dot{\Phi}_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}(t)\Phi_{k,j} \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Chiamiamo allora *matrice fondamentale* dell'Eq. (2.6) ciascuna funzione  $\Phi \in C^1(I; \mathcal{M}_n)$  che soddisfa l'equazione (2.9) e tale che  $\det \Phi(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ . Ovviamente gli  $n$  vettori colonna di una matrice fondamentale formano un sistema fondamentale di soluzioni.

Dalle definizioni precedenti segue che ogni soluzione dell'Eq. (2.6) si può cercare nella forma  $\psi(t) = \Phi(t)y$  con  $\Phi$  una matrice fondamentale ed il vettore  $y \in \mathbb{R}^n$  da determinare mediante le condizioni iniziali. In effetti essendo  $\Phi$  soluzione dell'Eq. (2.9) segue immediatamente che  $\psi$  è soluzione dell'Eq. (2.6), qualsiasi sia il vettore costante  $y$ . La soluzione di condizioni iniziali  $\psi(t_0) = x_0$  si ottiene per  $y = \Phi^{-1}(t_0)x_0$ .

Chiamiamo infine *matrice principale* al tempo  $t_0 \in I$  dell'Eq. (2.6) la matrice fondamentale  $t \mapsto P_{t,t_0}$  tale che  $P_{t_0,t_0} = \mathbb{I}$ , ovvero l'unica soluzione continua dell'equazione:

$$P_{t,t_0} = \mathbb{I} + \int_{t_0}^t ds A(s)P_{s,t_0}, \quad t \in I.$$

Ne segue che per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}$  si ha  $\varphi(t) = P_{t,t_0}\varphi(t_0)$ , motivo per il quale  $P_{t,t_0}$  è anche detta funzione di avanzamento da  $t_0$  a  $t$ . In particolare,  $\varphi(t) = P_{t,t_0}x_0$  fornisce la soluzione del problema di Cauchy per l'Eq. (2.6) con condizione iniziale  $\varphi(t_0) = x_0$ . La matrice principale soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} 1) \quad & P_{t_0,t_0} = \mathbb{I} && \forall t_0 \in I, \\ 2) \quad & P_{t,s}P_{s,t_0} = P_{t,t_0} && \forall t_0, s, t \in I, \\ 3) \quad & P_{t,t_0}^{-1} = P_{t_0,t} && \forall t_0, t \in I. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Osserviamo che la 1) è vera per definizione, la 2) per l'unicità del prolungamento delle soluzioni e la 3) è conseguenza delle prime due.

**2.2.3. Equazioni lineari non omogenee. Variazioni delle costanti.** Consideriamo ora l'equazione lineare non omogenea:

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n, \quad (2.11)$$

dove  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo e  $t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n$ ,  $t \mapsto b(t) \in \mathbb{R}^n$  sono funzioni continue. Analogamente al caso omogeneo ogni soluzione si estende a tutto l'intervallo  $I$ . Se  $b(t)$  non è identicamente nullo l'insieme delle soluzioni dell'Eq. (2.11) non forma uno spazio lineare. Osserviamo però che se  $\psi_1, \psi_2 \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  sono due qualsiasi soluzioni dell'equazione non omogenea allora la funzione  $\varphi = \psi_1 - \psi_2$  è soluzione dell'equazione omogenea associata  $\dot{x} = A(t)x$ . In effetti, nota una soluzione particolare  $\psi_*$  dell'Eq. (2.9) ed un sistema fondamentale  $\{\varphi_i\}_{i=1, \dots, n}$  di soluzioni dell'equazione omogenea associata, è possibile determinare ogni altra soluzione dell'Eq. (2.9) nella forma

$$\psi(t) = \psi_*(t) + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(t),$$

dove le costanti  $C_i$  vengono determinate imponendo i dati iniziali  $\psi(t_0) = x_0$ . Infatti, indicando con  $\Phi$  la matrice fondamentale associata al sistema di soluzioni  $\{\varphi_i\}_{i=1, \dots, n}$  e con  $C \in \mathbb{R}^n$  il vettore di componenti  $C_i$ , possiamo riscrivere la precedente espressione nella forma:

$$\psi(t) = \psi_*(t) + \Phi(t)C,$$

da cui segue che la soluzione cercata si ottiene per  $C = \Phi^{-1}(t_0)[x_0 - \psi_*(t_0)]$ . In definitiva si ha:

$$\psi(t) = \psi_*(t) + \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)[x_0 - \psi_*(t_0)]. \quad (2.12)$$

In realtà, la conoscenza di un sistema fondamentale di soluzioni (ovvero di una matrice fondamentale) dell'equazione omogenea associata, consente di determinare, mediante quadrature, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Ciò si realizza applicando il metodo della *variazione delle costanti*, che consiste nel cercare una soluzione dell'Eq. (2.11) nella forma  $\psi_*(t) = \Phi(t)C(t)$  essendo  $\Phi(t)$  una matrice fondamentale dell'equazione omogenea associata e  $t \mapsto C(t)$  una funzione incognita. Derivando rispetto al tempo si ha:

$$\dot{\psi}_*(t) = \dot{\Phi}C(t) + \Phi\dot{C}(t) = A(t)\Phi(t)C(t) + \Phi(t)\dot{C}(t) = A(t)\psi_*(t) + \Phi(t)\dot{C}(t).$$

Affinché  $\psi_*$  sia soluzione dell'Eq. (2.11) la funzione incognita  $C(t)$  deve soddisfare l'equazione differenziale  $\Phi(t)\dot{C}(t) = b(t)$ , ovvero:

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^t ds \Phi^{-1}(s)b(s).$$

Scegliendo  $C(t_0) = 0$  abbiamo la soluzione particolare:

$$\psi_*(t) = \int_{t_0}^t ds \Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s),$$

tale che  $\psi_*(t_0) = 0$ . Sostituendo in (2.12) otteniamo la soluzione del problema di Cauchy di dati iniziali  $\psi(t_0) = x_0$ :

$$\psi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t ds \Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s). \quad (2.13)$$

Osservando infine che per ogni matrice fondamentale  $\Phi$  si ha sempre:

$$P_{t_1, t_2} = \Phi(t_1)\Phi^{-1}(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in I,$$

possiamo riscrivere la soluzione (2.13) nella forma:

$$\psi(t) = P_{t,t_0} x_0 + \int_{t_0}^t ds P_{t,s} b(s). \quad (2.14)$$

### 2.3. Il teorema di Liouville

Abbiamo visto nel Lemma 2.3 che il wronskiano di un sistema di soluzioni dell'Eq. (2.6) non è mai nullo oppure è identicamente nullo. Ciò è rafforzato dal seguente teorema.

**TEOREMA 2.4 (Teorema di Liouville).** *Sia  $W$  il wronskiano di  $n$  soluzioni dell'Eq. (2.6). Allora, per ogni  $t_0, t \in I$ ,*

$$W(t) = W(t_0) \exp \left[ \int_{t_0}^t ds \operatorname{Tr} A(s) \right] = W(t_0) \det P_{t,t_0}. \quad (2.15)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Assegnata una matrice  $B$  indichiamo con  $\Gamma$  il suo determinante e con  $\Gamma_{i,j}$  il complemento algebrico dell'elemento  $B_{i,j}$ . Come noto dall'algebra lineare (regola di Laplace):

$$\Gamma = \sum_{k=1}^n B_{i,k} \Gamma_{i,k} \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (2.16)$$

cosicché, visto che l'elemento  $B_{i,j}$  non appare nei complementi algebrici  $\Gamma_{i,k}$  qualsiasi sia  $k = 1, \dots, n$ ,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial B_{i,j}} = \Gamma_{i,j} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Siano ora  $\varphi_i \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , soluzioni dell'Eq. (2.6). Indichiamo con  $\Phi(t)$  la matrice di elementi  $\Phi_{i,j}(t) = \varphi_{j,i}(t)$ , cosicché  $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$  e  $W(t) = \det \Phi(t)$ . Sia  $W_{i,j}(t)$  il complemento algebrico di  $\Phi_{i,j}(t)$ . Considerando il wronskiano  $W(t) = W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](t)$  come funzione composta, derivando si ha:

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial W}{\partial \Phi_{i,j}} \dot{\Phi}_{i,j}(t) = \sum_{i,j=1}^n W_{i,j}(t) \dot{\Phi}_{i,j}(t) \\ &= \sum_{i,j=1}^n W_{i,j}(t) \sum_{k=1}^n A_{i,k}(t) \Phi_{k,j}(t) \\ &= \sum_{i,k=1}^n A_{i,k}(t) \left[ \sum_{j=1}^n W_{i,j}(t) \Phi_{k,j}(t) \right]. \end{aligned}$$

Utilizzando l'Eq. (2.16) vediamo che se  $k = i$  il termine tra parentesi quadre è uguale a  $W(t)$ , mentre se  $k \neq i$  esso è nullo essendo il determinante di una matrice con due righe uguali (precisamente la  $i$ -esima e la  $k$ -esima). In conclusione il wronskiano soddisfa l'equazione differenziale:

$$\dot{W} = \operatorname{Tr} A(t) W,$$

che risolta per separazione delle variabili fornisce la prima identità in (2.15). La seconda identità segue banalmente applicando la prima al wronskiano  $\det P_{t,t_0}$ , cosicché:

$$\det P_{t,t_0} = \exp \left[ \int_{t_0}^t ds \operatorname{Tr} A(s) \right],$$

essendo  $\det P_{t_0,t_0} = 1$ . □

ESERCIZIO 2.4. Si consideri l'equazione lineare omogenea di ordine  $n$ :

$$\frac{d^n \xi}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} \xi}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t) \xi = 0, \quad (2.17)$$

dove  $a_i \in C^0(I; \mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ed  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$ . Utilizzando l'applicazione:

$$\varphi \mapsto \left( \varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), \dots, \frac{d^n \varphi}{dt^n}(t) \right), \quad t \in I,$$

dimostrare che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio lineare di  $C^1(I; \mathbb{R})$  isomorfo allo spazio delle fasi  $\mathbb{R}^n$ . Definito quindi il wronskiano delle  $n$  soluzioni  $\varphi_i \in C^1(I; \mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \frac{d\varphi_1}{dt}(t) & \dots & \frac{d\varphi_n}{dt}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^n \varphi_1}{dt^n}(t) & \dots & \frac{d^n \varphi_n}{dt^n}(t) \end{pmatrix},$$

dimostrare che:

$$W(t) = W(t_0) \exp \left[ - \int_{t_0}^t ds a_1(s) \right] \quad \forall t_0, t \in I.$$

## 2.4. Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti

**2.4.1. Mappa esponenziale.** Consideriamo l'equazione differenziale lineare omogenea:

$$\dot{x} = Ax, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \quad (2.18)$$

Poniamo  $P_t \doteq P_{t,0}$ , la matrice principale al tempo  $t_0 = 0$ . Essendo il sistema autonomo si ha  $P_{t,t_0} = P_{t-t_0,0}$ . In altri termini,  $\varphi(t) = P_{t-t_0} x_0$  fornisce la soluzione del problema di Cauchy di dati iniziali  $\varphi(t_0) = x_0$ . Quindi l'integrazione dell'Eq. (2.18) si riduce alla determinazione della funzione differenziabile  $t \mapsto P_t \in L(\mathbb{R}^n)$  soluzione dell'equazione:

$$\begin{cases} \dot{P}_t = AP_t \\ P_0 = \mathbb{I} \end{cases}$$

Osserviamo che le relazioni (2.10) diventano in questo caso: 1)  $P_0 = \mathbb{I}$ , 2)  $P_{t+s} = P_t P_s$ , 3)  $P_t^{-1} = P_{-t}$ , ovvero la mappa  $t \mapsto P_t \in L(\mathbb{R}^n)$  forma un *gruppo ad un parametro di trasformazioni (lineari) di  $\mathbb{R}^n$* .

Per analogia con in caso scalare  $n = 1$ , definiamo la mappa esponenziale  $\exp : L(\mathbb{R}^n) \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$  in modo tale che  $P_t = \exp(At)$ . A tal scopo ricordiamo che la mappa esponenziale su  $\mathbb{R}$  rimane definita dalla sua serie di Taylor:

$$e^a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \doteq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{a^k}{k!},$$

che converge assolutamente ed uniformemente sui compatti di  $\mathbb{R}$ . Definiamo allora *esponenziale* dell'operatore (ovvero della matrice)  $A$  l'operatore

$$\exp A \doteq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!}, \quad (2.19)$$

dove il limite va inteso nella metrica indotta da una norma di  $L(\mathbb{R}^n)$ . Ricordiamo in proposito che tutte le norme di  $L(\mathbb{R}^n)$  sono equivalenti, per cui la nozione di convergenza non dipende dalla norma utilizzata per definire la metrica. Mostriamo che la definizione (2.19) è ben posta. Essendo  $L(\mathbb{R}^n)$  uno spazio normato completo occorre dimostrare che:

$$S_N \doteq \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!}, \quad N \in \mathbb{N},$$

è una successione di Cauchy in  $L(\mathbb{R}^n)$ . Per far ciò osserviamo che dalla definizione di norma uniforme si dimostra facilmente che  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \forall A, B \in L(\mathbb{R}^n)$ . Allora, qualunque sia  $M > N$ ,

$$\|S_M - S_N\| = \left\| \sum_{k=N+1}^M \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=N+1}^M \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k>N} \frac{\|A\|^k}{k!} \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow +\infty,$$

ovvero la successione è di Cauchy. La serie in (2.19) converge inoltre assolutamente ed uniformemente sui compatti. Infatti, fissato un qualunque  $a > 0$ , per ogni  $A \in L(\mathbb{R}^n)$  tale che  $\|A\| \leq a$ , si ha:

$$\left\| \exp A - \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k>N} \frac{a^k}{k!}.$$

Inoltre:

$$\|\exp A\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a.$$

La mappa esponenziale gode delle seguenti proprietà:

- 1)  $\exp 0 = \mathbb{I}$ ,
- 2)  $\exp(A+B) = \exp A \exp B$  se  $[A, B] = 0$ ,
- 3)  $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$ ,
- 4)  $[\exp A, B] = 0$  se  $[A, B] = 0$ .

La 1) e la 4) sono immediate conseguenze della definizione (2.19), mentre la 3) segue dalle 1) e 2). Rimane da dimostrare la 2): se  $A$  e  $B$  commutano possiamo

scrivere:

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^N}{N!} = \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{N=k}^{+\infty} \frac{A^k B^{N-k}}{k!(N-k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{A^k B^h}{k!h!} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left( \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{B^h}{h!} \right) = \exp A \exp B,\end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza è corretta, ovvero si possono moltiplicare termine a termine le due serie, essendo queste assolutamente convergenti.

Dimostriamo ora che  $P_t = \exp(At)$ , cioè che:

$$\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At) = \exp(At) A,$$

ovvero che la serie

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

può essere derivata termine a termine. In effetti:

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\exp[A(t+\delta)] - \exp(At)}{\delta} - A \exp(At) \right\| &= \left\| \exp(At) \left( \frac{\exp(A\delta) - \mathbb{I} - A\delta}{\delta} \right) \right\| \\ &= \left\| \exp(At) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\delta^{k-1} A^k}{k!} \right\| \leq e^{\|A\|t} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|\delta|^{k-1} \|A\|^k}{k!} \\ &\leq \|A\|^2 e^{\|A\|(t+\delta)} |\delta| \rightarrow 0 \quad \text{per } \delta \rightarrow 0.\end{aligned}$$

È evidente che iterando il ragionamento si dimostra che  $\exp(At)$  è in realtà una funzione infinitamente derivabile e che tutte le sue derivate si ottengono derivando la serie termine a termine.

**ESEMPIO 2.2.** Calcoliamo l'esponenziale delle seguenti matrici in dimensione  $n = 2$ :

$$i) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad ii) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad iii) \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix},$$

dove  $a, b \in \mathbb{R}$ .

*i)* Sia ha:

$$\exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}.$$

*ii)* Decomponiamo:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a\mathbb{I} + bJ \quad \text{con } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservando che  $J^2 = -\mathbb{I}$  e che  $[\mathbb{I}, J] = 0$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} &= \exp(a\mathbb{I} + bJ) = \exp(a\mathbb{I}) \exp(bJ) = e^a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(bJ)^k}{k!} \\ &= e^a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-b^2\mathbb{I})^k}{(2k)!} + e^a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-b^2\mathbb{I})^k bJ}{(2k+1)!} \\ &= e^a (\cos b\mathbb{I} + \sin bJ) \\ &= e^a R[b]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

avendo posto:

$$R[b] \doteq \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Quindi l'azione di  $\exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  sui vettori di  $\mathbb{R}^2$  è la composizione di una dilatazione di un fattore  $e^a$  con una rotazione di un angolo  $b$ .

*iii*) Decomponiamo:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = a\mathbb{I} + bN \quad \text{con} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservando che  $N^2 = 0$  e che  $[\mathbb{I}, N] = 0$ , otteniamo:

$$\exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \exp(a\mathbb{I} + bN) = \exp(a\mathbb{I}) \exp(bN) = e^a (\mathbb{I} + bN) = e^a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Chiaramente il caso trasposto  $a\mathbb{I} + bN^T$  è analogo.

**OSSERVAZIONE 2.2.** Sia  $\mathcal{L} \doteq \{A \in \mathcal{M}_2 : A = a\mathbb{I} + bJ\}$ . Si verifica facilmente che  $\mathcal{L}$  è un sottospazio bidimensionale di  $\mathcal{M}_2$ , chiuso rispetto al prodotto di matrici e che tale prodotto è commutativo su  $\mathcal{L}$ . Inoltre  $\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2}$  se  $A = a\mathbb{I} + bJ$  (dimostrarlo!). Si definisca quindi la mappa  $\psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$  ponendo  $\psi(A) = a + ib$  se  $A = a\mathbb{I} + bJ$ . Si può verificare che l'applicazione  $\psi$  è un isomorfismo lineare che conserva la norma ed il prodotto (assumendo  $\mathbb{C}$  dotato del prodotto e della norma usuali). Definiamo allora esponenziale di  $z = a + ib$  il numero complesso  $\psi(\exp A)$ , ove  $A = a\mathbb{I} + bJ$ , ovvero:

$$e^z = e^{a+ib} \doteq e^a (\cos b + i \sin b),$$

nota come *formula di Eulero* per  $e^z$ . Inoltre, poiché  $\psi$  è una isometria lineare che conserva il prodotto, si ha anche:

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\psi(A^k)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Quest'ultima uguaglianza si può assumere come definizione di esponenziale di un numero complesso (da cui si ricava analogamente la formula di Eulero).

**ESERCIZIO 2.5.** Osserviamo che la mappa  $t \mapsto P_t \in L(\mathbb{R}^n)$  è soluzione continua dell'equazione:

$$P_t = \mathbb{I} + \int_0^t ds AP_s. \quad (2.23)$$

Utilizzare il metodo delle approssimazioni successive di Picard per dimostrare l'esistenza ed unicità della soluzione in  $C^0(\mathbb{R}; L(\mathbb{R}^n))$ , riottendendo in particolare l'espressione di  $P_t$  in serie di potenze di  $At$ .

ESERCIZIO 2.6. Dimostrare che per ogni operatore  $A \in L(\mathbb{R}^n)$  si ha:

$$\det(\exp A) = \exp(\operatorname{Tr} A).$$

ESERCIZIO 2.7. La matrice  $A \in \mathcal{M}_n$  abbia la seguente forma a blocchi:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

essendo  $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}$ ,  $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}$ ,  $n_1 + n_2 = n$ . Dimostrare che allora:

$$\exp A = \begin{pmatrix} \exp A_1 & 0 \\ 0 & \exp A_2 \end{pmatrix}.$$

**2.4.2. Matrici simili, cambiamenti di base, calcolo della soluzione.** Determinare le soluzioni dell'Eq. (2.18) equivale a calcolare la matrice  $\exp(At)$ . Dalla definizione (2.19) è immediato verificare che

$$S^{-1}(\exp A)S = \exp(S^{-1}AS) \quad \forall A \in \mathcal{M}_n \quad \forall S : \det S \neq 0.$$

Quindi se sappiamo calcolare  $\exp(A_S t)$  con  $A_S = S^{-1}AS$  per qualche matrice non singolare  $S$ , riusciamo a calcolare anche  $\exp(At)$ . (Ricordiamo che ogni matrice del tipo  $A_S = S^{-1}AS$  è detta *simile* ad  $A$ ).

Equivalentemente, sia  $\{f_i\}_{i=1, \dots, n}$  una nuova base di  $\mathbb{R}^n$  ed  $S \in \mathcal{M}_n$  la matrice non singolare tale che

$$f_i = \sum_{j=1}^n S_{j,i} e_j.$$

Il cambiamento di base definisce nuove coordinate  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ , identificando:

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n y_i f_i.$$

Si verifica facilmente che  $x = Sy$  e che la matrice rappresentativa dell'operatore  $A$  nella nuova base è  $A_S = S^{-1}AS$ . Quindi:

$$Af_i = \sum_{j=1}^n (A_S)_{j,i} f_j \implies \exp(At) f_i = \sum_{j=1}^n [\exp(A_S t)]_{j,i} f_j.$$

Altrimenti detto, il sistema differenziale (2.18) nelle nuove coordinate  $y$  diventa  $S\dot{y} = ASy$  ovvero  $\dot{y} = A_S y$ . La soluzione del problema di Cauchy (2.18) di dato iniziale  $x(0) = x_0$  è allora  $x(t) = Sy(t)$  essendo  $y(t) = \exp(A_S t)y_0$  ed  $y_0 = S^{-1}x_0$ .

Chiamiamo *spettro* della matrice  $A$  l'insieme degli *autovalori* di  $A$ , ovvero l'insieme:

$$\sigma(A) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0\}.$$

Se  $\lambda$  è un autovalore reale di  $A$  allora il sottospazio (di  $\mathbb{R}^n$ )  $\operatorname{Ker}(A - \lambda \mathbb{I})$  contiene vettori non nulli, detti *autovettori* di  $A$  associati all'autovalore  $\lambda$ . Osserviamo che ha anche senso definire  $\sigma(A)$  lo spettro dell'operatore lineare identificato dalla

matrice  $A$  nella base considerata. Infatti si verifica facilmente che  $\sigma(A_S) = \sigma(A)$  per ogni matrice non singolare  $S$ . Supponiamo ora che  $\xi$  sia un autovettore di  $A$ , quindi  $A\xi = \lambda\xi$ . Allora si calcola immediatamente  $\exp(At)\xi = e^{\lambda t}\xi$ . Più in generale, se la matrice  $A$  ammette una base di autovettori ed  $S$  è la matrice del cambiamento di base, allora:

$$A_S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$\exp(A_S t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e^{\lambda_{n-1} t} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

L'esistenza di una base di autovettori è garantita solo in casi particolari, ad esempio se la matrice  $A$  possiede  $n$  autovalori reali e distinti, oppure se essa è simmetrica. Nel caso generale sussiste il seguente risultato.

**TEOREMA 2.5.** *Sia  $A \in \mathcal{M}_n$ . Allora:*

*i) Se  $\lambda$  è un autovalore reale di molteplicità algebrica  $d$ , esiste una matrice non singolare  $S$  tale che*

$$A_S = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

*dove  $B \in \mathcal{M}_{n-d}$  e  $D \in \mathcal{M}_d$  è una matrice triangolare inferiore con tutti gli elementi diagonali uguali all'autovalore  $\lambda$ :*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ D_{2,1} & \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & D_{d,d-2} & \lambda & 0 \\ D_{d,1} & \dots & \dots & \dots & D_{d,d-1} & \lambda \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

*ii) Se  $\mu \pm i\omega$  sono due autovalori complessi e coniugati di molteplicità algebrica  $r$ , esiste una matrice non singolare  $S$  tale che*

$$A_S = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

dove  $B \in \mathcal{M}_{n-2r}$  e  $T \in \mathcal{M}_{2r}$  è una matrice triangolare inferiore della forma:

$$T = \begin{pmatrix} \mu & -\omega & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \omega & \mu & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{3,1} & T_{3,2} & \mu & -\omega & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \omega & \mu & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mu & -\omega & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \omega & \mu & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & T_{2r-1,2r-2} & \mu & -\omega \\ T_{2r,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & T_{2r,2r-2} & \omega & \mu \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Iniziamo con il dimostrare il punto *i*). Sia  $f_1$  un autovettore unitario di  $A^T$  corrispondente all'autovalore reale  $\lambda$  e si consideri l'iperpiano  $\Pi_1 = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, f_1 \rangle = 0\}$  dei vettori ortonormali ad  $f_1$ . Essendo  $\langle A\xi, f_1 \rangle = \langle \xi, A^T f_1 \rangle = \lambda \langle \xi, f_1 \rangle = 0$  per ogni  $\xi \in \Pi_1$ , tale iperpiano è invariante rispetto ad  $A$  e quindi esiste la restrizione di  $A$  a  $\Pi_1$  che indichiamo con  $A_1$ . Se  $d > 1$  allora  $\lambda \in \sigma(A_1)$  cosicché esiste un autovettore unitario di  $A_1^T$  corrispondente a  $\lambda$ . Esiste quindi la restrizione di  $A_1$  all'iperpiano  $\Pi_2 = \{\xi \in \Pi_1 : \langle \xi, f_2 \rangle = 0\}$ . Iterando l'argomento otteniamo  $d$  vettori ortonormali  $\{f_i\}_{i=1,\dots,d}$ , che possiamo completare per costruire una base ortonormale. Otteniamo in tal modo una trasformazione unitaria  $U$  tale che:

$$A_U \doteq U^{-1}AU = \begin{pmatrix} D & 0 \\ K & B \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo ora una trasformazione non singolare  $\bar{S}$  della forma:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ G & \mathbb{I} \end{pmatrix},$$

con  $G$  matrice  $(n-d) \times d$ , in modo tale che:

$$\bar{S}^{-1}A_U\bar{S} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Chiaramente se troviamo una tale trasformazione allora il punto *i*) è dimostrato con  $S = U\bar{S}$ . Si ha:

$$\bar{S}^{-1}A_U\bar{S} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ -G & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ K & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ G & \mathbb{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ K - GD + BG & B \end{pmatrix}.$$

La matrice  $G$  deve quindi risolvere l'equazione lineare  $K - GD + BG = 0$ , che è un sistema lineare non omogeneo nelle  $d(n-d)$  incognite  $G_{i,j}$ . Affinché esista un'unica soluzione per ogni termine noto  $K$  è necessario e sufficiente che il sistema lineare omogeneo associato  $BG - GD = 0$  ammetta la sola soluzione nulla  $G = 0$ . Per dimostrare ciò utilizziamo la forma particolare di  $D$  ed il fatto che  $\lambda \notin \sigma(B)$ . Sia  $\{e_i\}_{i=1,\dots,d}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^d$  ed assumiamo  $G$  tale che  $BG = GD$ . In particolare, essendo  $De_d = \lambda e_d$ , deve aversi  $BGe_d = \lambda Ge_d$ . Poiché  $\lambda \notin \sigma(B)$  ne segue che  $Ge_d = 0$ . Essendo ora  $De_{d-1} = D_{d,d-1}e_d + \lambda e_{d-1}$ , troviamo

$BGe_{d-1} = \lambda Ge_{d-1}$  e quindi analogamente deve aversi  $Ge_{d-1} = 0$ . Iterando il ragionamento concludiamo che  $Ge_i = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, d$ , ovvero  $G$  è la matrice nulla.

Dimostriamo ora il punto *i*). Estendiamo  $A$  ad un operatore su  $\mathbb{C}^n$ , la complessificazione di  $\mathbb{R}^n$  ottenuta prendendo i vettori  $z = z_1 e_1 + \dots + z_n e_n$  con  $z_i \in \mathbb{C}$  ed  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Siano ora  $\xi_{\pm}$  autovettori unitari di  $A^T$  associati agli autovalori  $\mu \pm i\omega$ , dunque  $A^T \xi_{\pm} = (\mu \pm i\omega)\xi_{\pm}$ . Essendo la matrice  $A$  reale i vettori  $\xi_{\pm}$  sono complessi coniugati:  $\xi_- = \bar{\xi}_+$ , cosicché i vettori:

$$f_1 = \frac{\xi_+ + \xi_-}{2}, \quad f_2 = \frac{\xi_+ - \xi_-}{2i}$$

sono reali. Inoltre:

$$A^T f_1 = \mu f_1 - \omega f_2, \quad A^T f_2 = \omega f_1 + \mu f_2.$$

Consideriamo l'iperpiano  $\Pi_1 = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, f_i \rangle = 0 \text{ per } i = 1, 2\}$ . Essendo  $\langle A\xi, f_i \rangle = \langle \xi, A^T f_i \rangle = 0$  per ogni  $\xi \in \Pi_1$  ed  $i = 1, 2$ , tale iperpiano è invariante rispetto ad  $A$ , quindi esiste la restrizione di  $A$  a  $\Pi_1$  che indichiamo con  $A_1$ . Iterando l'argomento se  $r > 1$  otteniamo  $2r$  vettori  $\{f_i\}_{i=1, \dots, 2r}$ , che possiamo completare per costruire una nuova base. Otteniamo in tal modo una trasformazione non singolare  $U$  tale che

$$A_U = U^{-1} A U = \begin{pmatrix} T & 0 \\ K & B \end{pmatrix}$$

(precisamente  $U$  è la trasposta dell'inversa della matrice le cui colonne sono formate dai vettori  $\{f_i\}_{i=1, \dots, 2r}$ ). Possiamo ora procedere come nel caso precedente. Occorre solo verificare che il sistema lineare omogeneo  $BG - GT = 0$ , nelle  $2r(n - 2r)$  incognite  $G_{i,j}$  ammette la sola soluzione nulla  $G = 0$ . Sia  $\{e_i\}_{i=1, \dots, 2r}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^{2r}$  ed assumiamo  $G$  tale che  $BG = GT$ . In particolare, essendo  $Te_{2r} = \mu e_{2r} - \omega e_{2r-1}$ ,  $Te_{2r-1} = \omega e_{2r} + \mu e_{2r-1}$ , deve aversi  $BGe_{2r} = \mu Ge_{2r} - \omega Ge_{2r-1}$ ,  $BGe_{2r-1} = \omega Ge_{2r} + \mu Ge_{2r-1}$ . Allora, posto  $\eta_{\pm} = Ge_{2r} \pm iGe_{2r-1}$ , si ha  $B\eta_{\pm} = (\mu \pm i\omega)\eta_{\pm}$ . Poiché  $\mu \pm i\omega \notin \sigma(B)$  deve aversi  $\eta_{\pm} = 0$ , ovvero  $Ge_{2r} = Ge_{2r-1} = 0$ . Ragionando ora sulla coppia  $\{e_{2r-4}; e_{2r-3}\}$  dimostriamo analogamente che  $Te_{2r-4} = Te_{2r-3} = 0$ . Iterando il ragionamento concludiamo che  $Ge_i = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, 2r$ , ovvero  $G$  è la matrice nulla.  $\square$

**COROLLARIO 2.6.** *Lo spettro della matrice  $A \in \mathcal{M}_n$  sia costituito da  $p$  autovalori reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  di molteplicità algebrica  $d_1, \dots, d_p$  e da  $q$  autovalori complessi coniugati  $\mu_1 \pm i\omega_1, \dots, \mu_q \pm i\omega_q$ , di molteplicità algebrica  $r_1, \dots, r_q$ . Allora esiste una trasformazione non singolare  $S$  tale che  $A_S$  ha la seguente struttura*

diagonale a blocchi:

$$A_S = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & D_p & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & T_1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & T_q & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & T_q \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

essendo  $D_j \in \mathcal{M}_{d_j}$ ,  $j = 1, \dots, q$  [risp.  $T_j \in \mathcal{M}_{2r_j}$ ,  $j = 1, \dots, 2r_j$ ] una matrice del tipo (2.24) relativa all'autovalore reale  $\lambda_j$  [risp. del tipo (2.25) relativa agli autovalori complessi coniugati  $\mu_j \pm i\omega_j$ ].

Come conseguenza del Corollario 2.6 e dell'Esercizio 2.7, il calcolo dell'esponenziale  $\exp(At)$  si riduce a quello di  $\exp(Dt)$  ed  $\exp(Tt)$  essendo  $D$  e  $T$  matrici del tipo (2.24) e (2.25) rispettivamente. Equivalentemente dobbiamo determinare la soluzione dei problemi di Cauchy:

$$1) \begin{cases} \dot{x} = Dx, & x \in \mathbb{R}^d, \\ x(0) = c, & c \in \mathbb{R}^d. \end{cases}, \quad 2) \begin{cases} \dot{x} = Tx, & x \in \mathbb{R}^{2r}, \\ x(0) = c, & c \in \mathbb{R}^{2r}. \end{cases}$$

(scegliendo il dato iniziale  $c_i = \delta_{i,j}$  si ottiene l'esponenziale). Tali sistemi si integrano facilmente mediante la formula di variazione delle costanti ripetutamente applicata. Più precisamente, per il sistema 1) abbiamo:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{\lambda t}, \\ x_2(t) &= c_2 e^{\lambda t} + \int_0^t ds e^{\lambda(t-s)} D_{2,1} x_1(s) = e^{\lambda t} [c_2 + D_{2,1} c_1 t], \\ x_3(t) &= c_3 e^{\lambda t} + \int_0^t ds e^{\lambda(t-s)} [D_{3,2} x_2(s) + D_{3,1} x_1(s)] \\ &= e^{\lambda t} \left[ c_3 + (D_{3,2} c_2 + D_{3,1} c_1) t + D_{3,2} D_{2,1} c_1 \frac{t^2}{2} \right], \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Quindi ciascun elemento della matrice  $\exp(Dt)$  è uguale al prodotto di  $e^{\lambda t}$  per un polinomio in  $t$  di grado massimo al più  $d-1$ . Notiamo che a tale conclusione potevamo giungere anche osservando che  $D = \lambda \mathbb{I} + \bar{D}$  con  $\bar{D} \doteq D - \lambda \mathbb{I}$  matrice nilpotente tale che  $\bar{D}^k = 0$  se  $k \geq d$ , cosicché:

$$\exp(Dt) = \exp(\lambda \mathbb{I} + \bar{D}) = \exp(\lambda \mathbb{I}) \exp(\bar{D}t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{\bar{D}^k t^k}{k!},$$

dove abbiamo usato che  $[\lambda \mathbb{I}, \bar{D}] = 0$ .

Per risolvere il sistema 2) osserviamo preliminarmente che dall'Eq. (2.20) segue:

$$\exp \left[ \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix} t \right] = e^{\mu t} R[\omega t], \quad (2.27)$$

dove la matrice di rotazione  $R[\cdot]$  è stata definita in (2.21). Allora la soluzione di 2) è:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= e^{\mu t} R[\omega t] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} &= e^{\mu t} R[\omega t] \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \int_0^t ds e^{\mu(t-s)} R[\omega(t-s)] \begin{pmatrix} T_{3,1} & T_{3,2} \\ T_{4,1} & T_{4,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} \\ &= e^{\mu t} R[\omega t] \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + e^{\mu t} \int_0^t ds R[\omega(t-s)] \begin{pmatrix} T_{3,1} & T_{3,2} \\ T_{4,1} & T_{4,2} \end{pmatrix} R[\omega s] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Utilizzando la formula di integrazione per parti è facile dimostrare induttivamente che, per ogni intero  $k = 0, 1, 2, \dots$ , gli integrali del tipo

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \cos[\omega(t-s)] \sin(\omega s) s^k, \quad \int_0^t ds \sin[\omega(t-s)] \cos(\omega s) s^k, \\ \int_0^t ds \cos[\omega(t-s)] \cos(\omega s) s^k, \quad \int_0^t ds \sin[\omega(t-s)] \sin(\omega s) s^k, \end{aligned}$$

sono funzioni della forma  $P(t) \cos(\omega t) + Q(t) \sin(\omega t)$ , essendo  $P(t)$  e  $Q(t)$  polinomi di grado  $k + 1$ . In tal modo  $x_3(t)$  ed  $x_4(t)$  sono funzioni della forma  $e^{\mu t} [P_1(t) \cos(\omega t) + Q_1(t) \sin(\omega t)]$ , con  $P_1(t)$  e  $Q_1(t)$  polinomi di grado 1,  $x_5(t)$  ed  $x_6(t)$  sono funzioni del tipo  $e^{\mu t} [P_2(t) \cos(\omega t) + Q_2(t) \sin(\omega t)]$ , con  $P_2(t)$  e  $Q_2(t)$  polinomi di grado 2, e via di seguito. Si comprende allora che ciascun elemento della matrice  $\exp(Tt)$  è una funzione del tipo  $e^{\mu t} [\cos(\omega t) P_r(t) + \sin(\omega t) Q_r(t)]$ , con  $P_r(t)$  e  $Q_r(t)$  polinomi di grado massimo al più  $r - 1$ . In conclusione, dal Corollario 2.6 abbiamo il seguente risultato:

**TEOREMA 2.7.** *Lo spettro della matrice  $A \in \mathcal{M}_n$  sia costituito da  $p$  autovalori reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  di molteplicità algebrica  $d_1, \dots, d_p$  e da  $q$  autovalori complessi coniugati  $\mu_1 \pm i\omega_1, \dots, \mu_q \pm i\omega_q$ , di molteplicità algebrica  $r_1, \dots, r_q$ . Allora ogni elemento della matrice  $\exp(At)$  e quindi ogni componente della soluzione dell'Eq. (2.18) sono dati da somme di funzioni del tipo:*

$$e^{\lambda_j t} P_j(t), \quad e^{\mu_k t} \cos(\omega_k t) Q_k(t), \quad e^{\mu_k t} \sin(\omega_k t) R_k(t), \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 1, \dots, q,$$

essendo  $P_j$  e  $Q_k, R_k$  polinomi di grado inferiore a  $d_j$  ed  $r_k$  rispettivamente.

### 2.5. Sistemi lineari bidimensionali

Studiamo più in dettaglio le soluzioni dell'Eq. (2.18) nel caso bidimensionale  $n = 2$ . Consideriamo quindi il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = K, \end{cases} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Il polinomio caratteristico di  $A$  è

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} A_{1,1} - \lambda & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\text{Tr } A) \lambda + \det A,$$

per cui lo spettro di  $A$  è fornito dalle soluzioni dell'equazione  $p(\lambda) = 0$ , ovvero:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[ \text{Tr } A \pm \sqrt{(\text{Tr } A)^2 - 4 \det A} \right].$$

Dobbiamo considerare tre casi differenti.

*Caso 1.* Supponiamo che  $(\text{Tr } A)^2 > 4 \det A$  cosicché esistono due autovalori reali e distinti  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Possiamo allora determinare due autovettori indipendenti  $f_1, f_2$ . Quindi siano:

$$f_1 = \begin{pmatrix} S_{1,1} \\ S_{2,1} \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} S_{1,2} \\ S_{2,2} \end{pmatrix}, \quad S \doteq \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

la matrice  $S$  essendo non singolare cosicché è ben definita la sua inversa:

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} \begin{pmatrix} S_{1,1} & -S_{1,2} \\ -S_{2,1} & S_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$A_S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{A_S t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Nelle nuove coordinate  $y = S^{-1}x$  il sistema si scrive  $\dot{y} = A_S y$ , la cui soluzione di dati iniziali  $y(0) = c$  è:

$$y(t) = e^{A_S t} c = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} c_1 \\ e^{\lambda_2 t} c_2 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

La soluzione del problema di Cauchy (2.28) (nelle coordinate originarie) è allora  $x(t) = S y(t)$  essendo  $y(t)$  la soluzione (2.30) di dati iniziali  $c = S^{-1}K$ . Dunque  $x(t) = S e^{A_S t} S^{-1}K$ . Equivalentemente, essendo  $e^{A_S t} f_i = e^{\lambda_i t} f_i$ ,  $i = 1, 2$ , possiamo scrivere direttamente la soluzione nella forma:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} f_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} f_2$$

e determinare le costanti  $c_1$  e  $c_2$  imponendo la condizione iniziale  $c_1 f_1 + c_2 f_2 = K$  (che è esattamente l'equazione  $S c = K$  di soluzione  $c = S^{-1}K$ ).

*Caso 2.* Supponiamo che  $(\text{Tr } A)^2 < 4 \det A$  cosicché esistono due autovalori complessi e coniugati  $\mu \pm i\omega$ . Esistono quindi due vettori linearmente indipendenti  $f_1, f_2$  tali che:

$$A f_1 = \mu f_1 + \omega f_2, \quad A f_2 = -\omega f_1 + \mu f_2.$$

Utilizzando la notazione come in (2.29) e ricordando (2.27) si ha allora:

$$A_S = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{A_S t} = e^{\mu t} R[\omega t].$$

Nelle nuove coordinate  $y = S^{-1}x$  il sistema si scrive  $\dot{y} = A_S y$ , la cui soluzione di dati iniziali  $y(0) = c$  è:

$$y(t) = e^{A_S t} c = e^{\mu t} \begin{pmatrix} c_1 \cos(\omega t) - c_2 \sin(\omega t) \\ c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Come nel caso precedente la soluzione nelle variabili originarie è  $x(t) = Sy(t) = Se^{As^t}S^{-1}K$ . Equivalentemente, essendo

$$e^{At}f_1 = e^{\mu t} [\cos(\omega t)f_1 + \sin(\omega t)f_2], \quad e^{At}f_2 = e^{\mu t} [-\sin(\omega t)f_1 + \cos(\omega t)f_2],$$

possiamo scrivere direttamente la soluzione nella forma:

$$x(t) = e^{\mu t} [c_1 \cos(\omega t) - c_2 \sin(\omega t)] f_1 + e^{\mu t} [c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)] f_2$$

e determinare le costanti  $c_1$  e  $c_2$  imponendo la condizione iniziale  $c_1 f_1 + c_2 f_2 = K$ .

*Caso 3.* Supponiamo che  $(\text{Tr } A)^2 = 4 \det A$  cosicché esiste un unico autovalore reale  $\lambda$  di molteplicità algebrica 2. Se esistono due autovettori linearmente indipendenti allora  $A = \lambda I$  e la soluzione dell'Eq. (2.28) è  $x(t) = e^{\lambda t} K$ . Supponiamo invece che non sia questo il caso. Determiniamo allora un autovettore  $f_1$  della matrice trasposta  $A^T$  associato all'autovalore  $\lambda$ . Fissiamo quindi un vettore  $f_2$  ortogonale ad  $f_1$ . Utilizzando la notazione come in (2.29) e ricordando (2.22) si ha allora:

$$A_S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{A_S t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha t & 1 \end{pmatrix}.$$

Nelle nuove coordinate il sistema si scrive  $\dot{y} = A_S y$ , la cui soluzione di dati iniziali  $y(0) = c$  è:

$$y(t) = e^{A_S t} c = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 + \alpha t c_1 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

mentre la soluzione del problema di Cauchy (2.28) è  $x(t) = Se^{A_S t} S^{-1} K$ . Equivalentemente, essendo

$$e^{At}f_1 = e^{\lambda t} (f_1 + \alpha t f_2), \quad e^{At}f_2 = e^{\lambda t} f_2,$$

possiamo scrivere direttamente la soluzione nella forma:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} f_1 + (c_2 + \alpha t c_1) e^{\lambda t} f_2$$

e determinare le costanti  $c_1$  e  $c_2$  imponendo la condizione iniziale  $c_1 f_1 + c_2 f_2 = K$ .

Le curve di fase dell'Eq. (2.28) sono quindi l'immagine affine (ovvero attraverso una trasformazione lineare non singolare) delle curve di fase di uno tra i flussi (2.30), (2.31) o (2.32).

## 2.6. Flussi iperbolici

I risultati della precedente Sezione 2.4 permettono in linea di principio il calcolo esplicito (o numerico) delle soluzioni dell'Eq. (2.18). D'altra parte spesso si è solo interessati ad una analisi qualitativa sul comportamento nel tempo delle soluzioni. In questa sezione studiamo il caso importante in cui gli autovalori dell'operatore  $A$  hanno tutti parte reale non nulla, mostrando come in tal caso il comportamento qualitativo del corrispondente flusso di fase  $e^{At}$  è molto semplice.

DEFINIZIONE 2.8. Se tutti gli autovalori della matrice  $A$  hanno parte reale non nulla il flusso di fase lineare  $e^{At}$  è detto un flusso iperbolico. In particolare, esso è detto contrazione [risp. espansione] se tutti gli autovalori della matrice  $A$  hanno parte reale negativa [risp. positiva]. Corrispondentemente, il punto singolare  $x = 0$  dell'Eq. (2.18) viene detto punto iperbolico. In particolare esso è detto pozzo [risp. sorgente] se il flusso di fase è una contrazione [risp. espansione].

TEOREMA 2.9. Sia  $A \in L(\mathbb{R}^n)$  e siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tali che  $\alpha < \Re \lambda < \beta$  per ogni  $\lambda \in \sigma(A)$ . Allora esiste un prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$  su  $\mathbb{R}^n$  tale che:

$$\alpha |x|_*^2 \leq \langle x, Ax \rangle_* \leq \beta |x|_*^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.33)$$

dove  $|x|_* = \sqrt{\langle x, x \rangle_*}$ . Inoltre:

$$e^{\alpha t} |x|_* \leq |e^{At} x|_* \leq e^{\beta t} |x|_*. \quad (2.34)$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo dapprima le stime (2.33). Sia  $S$  la trasformazione che appare in (2.26) e siano  $d_1, \dots, d_p, r_1, \dots, r_q$  come nel Teorema 2.6. Per ogni  $\varepsilon > 0$  sia

$$I_\varepsilon = \begin{pmatrix} I_\varepsilon^{(1)} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & I_\varepsilon^{(2)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & I_\varepsilon^{(p)} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & I_\varepsilon^{(p+1)} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & I_\varepsilon^{(p+q-1)} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & I_\varepsilon^{(p+q)} & \dots \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

dove se  $k = 1, \dots, p$  allora  $I_\varepsilon^{(k)} \in \mathcal{M}_{d_k}$  è la matrice diagonale di elementi

$$(I_\varepsilon^{(k)})_{i,j} = \varepsilon^{1-i} \delta_{i,j},$$

mentre se  $k = p+1, \dots, p+q$  allora  $I_\varepsilon^{(k)} \in \mathcal{M}_{2r_k}$  è la matrice diagonale di elementi

$$(I_\varepsilon^{(k)})_{i,j} = \begin{cases} \varepsilon^{(1-i)/2} \delta_{i,j} & \text{se } i = 1, 3, \dots, 2r_k - 1 \\ \varepsilon^{(2-i)/2} \delta_{i,j} & \text{se } i = 2, 4, \dots, 2r_k \end{cases}$$

Poniamo quindi  $A_\varepsilon \doteq S_\varepsilon^{-1} A S_\varepsilon$ , ove  $S_\varepsilon \doteq S I_\varepsilon$ . Consideriamo ora la trasformazione di coordinate  $x = S_\varepsilon y$  e sia  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varepsilon$  il prodotto scalare da essa indotto:  $\langle x, x' \rangle_\varepsilon \doteq \langle y, y' \rangle = \langle S_\varepsilon^{-1} x, S_\varepsilon^{-1} x' \rangle$ . Osserviamo che:

$$\langle x, Ax \rangle_\varepsilon = \langle y, A_\varepsilon y \rangle = \langle y, A_\varepsilon^{\text{sim}} y \rangle$$

dove, per ogni  $B \in \mathcal{M}_n$ ,  $B^{\text{sim}}$  denota la parte simmetrica di  $B$ , ovvero  $B^{\text{sim}} \doteq (B + B^T)/2$  (la parte antisimmetrica di una matrice non contribuisce alla forma quadratica associata). Ricordando la forma (2.26) di  $A_S$  e la definizione di  $I_\varepsilon$  è facile verificare che:

$$(A_\varepsilon^{\text{sim}})_{i,j} = \varepsilon^{\kappa(i,j)} (A_S^{\text{sim}})_{i,j} \quad \forall i \geq j,$$

dove  $\kappa(i, j)$  è un intero positivo se  $i > j$  e nullo se  $i = j$ . Quindi:

$$\langle y, A_\varepsilon^{\text{sim}} y \rangle = \sum_{k=1}^n (\Re \lambda_k) y_k^2 + \sum_{i>j} \varepsilon^{\kappa(i,j)} (A_S^{\text{sim}})_{i,j} y_i y_j,$$

cosicché:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\langle y, A_\varepsilon^{\text{sim}} y \rangle}{\langle y, y \rangle} = \frac{1}{\langle y, y \rangle} \sum_{k=1}^n (\Re \lambda_k) y_k^2.$$

Ne segue che, fissando  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo,  $\alpha \langle y, y \rangle \leq \langle y, A_\varepsilon^{\text{sim}} y \rangle \leq \beta \langle y, y \rangle$ , ovvero  $\alpha \langle x, x \rangle_\varepsilon \leq \langle x, Ax \rangle_\varepsilon \leq \beta \langle x, x \rangle_\varepsilon$ , da cui le stime (2.33) con  $\langle \cdot, \cdot \rangle_* = \langle \cdot, \cdot \rangle_\varepsilon$ .

Le disuguaglianze (2.34) sono conseguenza delle (2.33). Chiaramente se  $x = 0$  esse sono banalmente verificate. Calcoliamo invece la derivata di  $|x|_*^2$  lungo una soluzione  $x(t) = e^{At} x$  con  $x \neq 0$ . Si ha (omettendo la dipendenza esplicita dal tempo della soluzione):

$$\frac{d}{dt} |x|_*^2 = \frac{d}{dt} \langle x, x \rangle_* = 2 \langle x, Ax \rangle_*,$$

da cui, per la (2.33),

$$2\alpha |x|_*^2 \leq \frac{d}{dt} |x|_*^2 \leq 2\beta |x|_*^2,$$

e dunque:

$$\alpha \leq \frac{d}{dt} \log |x|_* \leq \beta.$$

Integrando si ha:

$$\alpha t \leq \log \frac{|x(t)|_*}{|x(0)|_*} \leq \beta t,$$

da cui, essendo  $x(t) = e^{At} x$ , seguono le (2.34).  $\square$

**TEOREMA 2.10.** *Sia  $A \in L(\mathbb{R}^n)$  ed indichiamo con  $|\cdot|_*$  la norma che appare nel Teorema 2.9.*

1) *Se  $e^{At}$  è una contrazione allora esistono costanti  $b > 0$  e  $K \geq 1$  tali che:*

$$\begin{cases} |e^{At} x|_* \leq e^{-bt} |x|_* \\ |e^{-At} x|_* \geq e^{bt} |x|_* \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.36)$$

e

$$\begin{cases} |e^{At} x| \leq K e^{-bt} |x| \\ |e^{-At} x| \geq K^{-1} e^{bt} |x| \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.37)$$

2) *Se  $e^{At}$  è una espansione allora esistono costanti  $a > 0$  ed  $K \geq 1$  tali che:*

$$\begin{cases} |e^{At} x|_* \geq e^{at} |x|_* \\ |e^{-At} x|_* \leq e^{-at} |x|_* \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.38)$$

e

$$\begin{cases} |e^{At} x| \geq K^{-1} e^{at} |x| \\ |e^{-At} x| \leq K e^{-at} |x| \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.39)$$

DIMOSTRAZIONE. Le disuguaglianze (2.37) e (2.39) seguono rispettivamente dalle (2.36) e (2.38) per l'equivalenza delle norme in  $\mathbb{R}^n$ . Dimostriamo quindi le disuguaglianze (2.36) e (2.38).

Se  $A$  genera una contrazione esiste  $b > 0$  tale che  $\Re\lambda < -b$  per ogni  $\lambda \in \sigma(A)$ , cosicché la prima disuguaglianza in (2.36) segue dalla seconda disuguaglianza in (2.34) con  $\beta = -b$ . D'altra parte si ha inoltre che  $\Re\lambda > b$  per ogni  $\lambda \in \sigma(-A)$ , cosicché la seconda disuguaglianza in (2.36) segue dalla prima disuguaglianza in (2.34) applicata all'operatore  $-A$  con  $\alpha = b$ .

Se  $A$  genera una espansione, allora  $-A$  genera una contrazione e le disuguaglianze (2.38) non sono altro che le (2.36) relative all'operatore  $-A$  (con  $a > 0$  tale che  $\Re\lambda > a$  per ogni  $\lambda \in \sigma(A)$ ).  $\square$

Quindi tutte le soluzioni non nulle di una contrazione vengono attratte esponenzialmente dal pozzo  $x = 0$ . Viceversa, tutte le soluzioni non nulle di una espansione crescono esponenzialmente allontanandosi dalla sorgente  $x = 0$ . Si osservi inoltre il significato geometrico del prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$  costruito nel Teorema 2.9. Nel caso della contrazione [risp. espansione], esso fornisce una struttura euclidea su  $\mathbb{R}^n$  tale che il vettore velocità di fase  $Ax$  forma con il raggio vettore  $x$  un angolo ottuso [risp. acuto]. Altrimenti detto, se  $S_r^* = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_* = r\}$  è la sfera di raggio  $r$  rispetto alla norma adattata  $|\cdot|_*$ , tutte le traiettorie del flusso di fase si muovono verso l'interno [risp. l'esterno] di questa nel caso di una contrazione [risp. espansione], qualunque sia il valore di  $r$ .

TEOREMA 2.11. *Sia  $x = 0$  un punto iperbolico dell'Eq. (2.18). Allora esiste una decomposizione dello spazio delle fasi:*

$$\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-, \quad E^\pm = \pi_\pm \mathbb{R}^n,$$

dove  $\pi_\pm$  sono operatori di proiezione,  $\pi_+ + \pi_- = \mathbb{I}$ ,  $E^\pm$  sono sottospazi invarianti rispetto ad  $A$ , tali che il flusso di fase indotto su  $E^+$  è una contrazione ed il flusso di fase indotto su  $E^-$  è una espansione. In particolare esistono costanti  $C > 0$ ,  $\gamma_+ > 0$  e  $\gamma_- > 0$  tali che:

$$\begin{cases} |e^{At} \pi_+ x| \leq C e^{-\gamma_+ t} |\pi_+ x| \\ |e^{-At} \pi_- x| \leq C e^{-\gamma_- t} |\pi_- x| \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.40)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $S$  come in (2.26). Sia quindi  $P$  la trasformazione lineare non singolare che consiste nel riordinare i blocchi della matrice  $A_S$  per valori crescenti di  $\Re\lambda$  al variare di  $\lambda \in \sigma(A)$ . Indichiamo con  $n_+$  [risp.  $n_-$ ] il numero di autovalori con parte reale negativa [risp. positiva], ciascuno contato con la propria molteplicità algebrica. Posto  $U = SP$  si ha:

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix},$$

dove  $A_+ \in \mathcal{M}_{n_+}$  [risp.  $A_- \in \mathcal{M}_{n_-}$ ] è tale che  $\Re \lambda < 0 \forall \lambda \in \sigma(A_+)$  [risp.  $\Re \lambda > 0 \forall \lambda \in \sigma(A_-)$ ]. Definiamo quindi:

$$E^+ \doteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = Uy \text{ con } y = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}^{n_+} \right\},$$

$$E^- \doteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = Uy \text{ con } y = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}^{n_-} \right\}.$$

Chiaramente  $E^\pm$  sono sottospazi invarianti rispetto ad  $A$ . Essendo  $U$  non singolare si ha la decomposizione in somma diretta  $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$ , rimanendo così definiti gli operatori di proiezione  $\pi_\pm : \mathbb{R}^n \rightarrow E^\pm$ :

$$\pi_+ x = U \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_- x = U \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U^{-1} x.$$

Abbiamo ora:

$$e^{At} \pi_+ x = U \begin{pmatrix} e^{A_+ t} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{At} \pi_- x = U \begin{pmatrix} 0 \\ e^{A_- t} v \end{pmatrix}, \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U^{-1} x.$$

La stima (2.40) segue facilmente dal Teorema 2.10, ad esempio applicando la prima disuguaglianza in (2.37) alle matrici  $A_+$  e  $-A_-$ . Indicando con  $K_\pm$  e  $b_\pm$  le relative costanti, si ha:

$$\begin{aligned} |e^{At} \pi_+ x| &\leq \|U\| |e^{A_+ t} u| \leq K_+ e^{-b_+ t} \|U\| |u| \leq K_+ e^{-b_+ t} \|U\| \|U^{-1}\| |\pi_+ x|, \\ |e^{-At} \pi_- x| &\leq \|U\| |e^{-A_- t} v| \leq K_- e^{-b_- t} \|U\| |v| \leq K_- e^{-b_- t} \|U\| \|U^{-1}\| |\pi_- x|, \end{aligned}$$

da cui la (2.40) segue con  $\gamma_\pm = b_\pm$  e  $C = \max\{K_+, K_-\} \|U\| \|U^{-1}\|$ .  $\square$

I sottospazi  $E^+$  ed  $E^-$  sono detti rispettivamente *sottospazio stabile* e *sottospazio instabile* del flusso iperbolico  $\dot{x} = Ax$ . Eccetto l'origine  $x = 0$ , tutte le orbite delle soluzioni dell'Eq. (2.18) giacenti sullo spazio stabile [risp. instabile] sono aperte e tendono a 0 per  $t \rightarrow +\infty$  [risp.  $t \rightarrow -\infty$ ]. Tali sottospazi possono essere caratterizzati nella seguente maniera:

$$E^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sup_{t \geq 0} |e^{At} x| < +\infty \right\}, \quad E^- = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sup_{t \leq 0} |e^{At} x| < +\infty \right\}. \quad (2.41)$$

In effetti dalle disuguaglianze (2.40) abbiamo:

$$|\pi_\pm x| = |e^{\pm At} e^{\mp At} \pi_\pm x| \leq C e^{-\gamma_\pm t} |e^{\mp At} \pi_\pm x| \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

cosicch :

$$\begin{cases} |e^{-At} \pi_+ x| \geq C^{-1} e^{\gamma_+ t} |\pi_+ x| \\ |e^{At} \pi_- x| \geq C^{-1} e^{\gamma_- t} |\pi_- x| \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.42)$$

Essendo ora  $e^{At} x = e^{At} \pi_+ x + e^{At} \pi_- x$ , dalle disuguaglianze (2.40) e (2.42) otteniamo le identit  (2.41). Segue inoltre che la decomposizione in sottospazi stabile ed instabile   unica.

## 2.7. Soluzione degli esercizi

SOLUZIONE ES. 2.1. Il sistema linearizzato è  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , dove:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\beta \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE ES. 2.2. A meno di termini dipendenti soltanto dal tempo ed eliminando una derivata totale rispetto al tempo si verifica che la lagrangiana del sistema è:

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{m\ell^2}{2} \dot{\theta}^2 + m\ell [g + a\gamma^2 \cos(\gamma t)] \cos\theta,$$

da cui ricaviamo le equazioni del moto:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2(t) \sin\theta, \quad \omega(t) \doteq \sqrt{\frac{g + a\gamma^2 \cos(\gamma t)}{\ell}},$$

ovvero, nello spazio delle fasi  $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2(t) \sin x_1. \end{cases}$$

Essendo  $x = 0$  un punto singolare del campo vettoriale ( $v(0, t) = 0 \forall t$ ) allora  $x(t) = 0$  è soluzione di equilibrio del sistema. Linearizzando si ottiene il sistema non autonomo  $\dot{y} = A(t)y$ ,  $y \in \mathbb{R}^2$ , dove:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

La corrispondente equazione del secondo ordine è:

$$\ddot{y} + \omega^2(t)y = 0,$$

nota con il nome di *equazione di Mathieu*.

SOLUZIONE ES. 2.3. Le coordinate polari sono definite dalla trasformazione:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos\theta \\ x_2 = r \sin\theta \end{cases} \quad r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Osserviamo preliminarmente che tale trasformazione è ben definita solo sull'aperto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . D'altra parte l'origine delle coordinate è un punto singolare del campo vettoriale. Quindi esso costituisce da solo un'orbita chiusa (corrispondente alla soluzione stazionaria  $x(t) = 0$ ) e tutte le altre soluzioni hanno orbite giacenti sull'aperto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . La matrice jacobiana della trasformazione di coordinate è:

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r \sin\theta \\ \sin\theta & r \cos\theta \end{pmatrix},$$

cosicché la legge di trasformazione dei vettori tangenti è:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r \sin\theta \\ \sin\theta & r \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix},$$

Quindi il sistema nelle coordinate polari si scrive:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r(r, \theta) \\ v_\theta(r, \theta) \end{pmatrix}$$

essendo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_r(r, \theta) \\ v_\theta(r, \theta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1(x_1(r, \theta), x_2(r, \theta)) \\ v_2(x_1(r, \theta), x_2(r, \theta)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r(1-r^2) \cos \theta - r(1+r^2) \sin \theta \\ r(1+r^2) \cos \theta - r(1-r^2) \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli si trova:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2), \\ \dot{\theta} = 1+r^2. \end{cases}$$

È immediato verificare che la funzione  $t \mapsto (r(t), \theta(t)) = (1, \theta_0 + 2t)$  è soluzione del sistema. Essa corrisponde ad un moto circolare uniforme la cui orbita è la circonferenza unitaria di centro l'origine. La linearizzazione del sistema differenziale intorno alla soluzione periodica è allora  $\dot{y} = Ay$ , essendo:

$$A = \left. \frac{\partial (v_r, v_\theta)}{\partial (r, \theta)} \right|_{\substack{r=1 \\ \theta=\theta_0+2t}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La soluzione periodica in coordinate cartesiane è:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 + 2t) \\ \sin(\theta_0 + 2t) \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE ES. 2.4. Tutte le affermazioni sono semplici conseguenze del fatto che l'equazione (2.17) è equivalente al sistema (2.6) ove si ponga:

$$x = \begin{pmatrix} \xi \\ \frac{d\xi}{dt} \\ \dots \\ \frac{d^{n-1}\xi}{dt^{n-1}} \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-3}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE ES. 2.5. Le approssimazioni di Picard per l'Eq. (2.23) sono:

$$\begin{aligned} P_t^{(0)} &= \mathbb{I}, \\ \dots &= \dots, \\ P_t^{(k)} &= \mathbb{I} + \int_0^t ds AP_s^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned}
 P_t^{(k)} &= \mathbb{I} + At + \int_0^t ds \int_0^s d\tau A^2 P_\tau^{(k-2)} = \mathbb{I} + At + \int_0^t d\tau (t-\tau) A^2 P_\tau^{(k-2)} \\
 &= \mathbb{I} + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \int_0^t ds \int_0^s d\tau (s-\tau) A^3 P_s^{(k-3)} \\
 &= \mathbb{I} + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \int_0^t d\tau \frac{A^2 (t-\tau)^2}{2} A P_\tau^{(k-3)} \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \sum_{h=0}^k \frac{A^h t^h}{h!}.
 \end{aligned}$$

Chiaramente  $\|P_t^{(k)} - P_t^{(k-1)}\| \leq (t\|A\|)^k / k!$ , cosicché la successione di matrici  $P_t^{(k)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , converge assolutamente ed uniformemente sui compatti di  $\mathbb{R}$ , ed il suo limite fornisce la soluzione dell'Eq. (2.23).

SOLUZIONE ES. 2.6. È banale conseguenza del teorema di Liouville applicato alla matrice principale dell'equazione  $\dot{x} = Ax$ :

$$\det(\exp A) = \det P_1 = \exp \left[ \int_0^1 ds \operatorname{Tr} A \right] = \exp(\operatorname{Tr} A).$$

SOLUZIONE ES. 2.7. Per induzione sull'indice  $k$  si verifica immediatamente che:

$$A^k = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
 \exp A &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{A_1^k}{k!} & 0 \\ 0 & \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{A_2^k}{k!} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \exp A_1 & 0 \\ 0 & \exp A_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

## 2.8. Nota bibliografica

Per gli argomenti trattati in questo capitolo si può fare riferimento ai testi sotto riportati.

- 1) V.I. Arnold. *Equazioni differenziali ordinarie*. Mosca: Edizioni Mir, 1978.
- 2) V.I. Arnold. *Metodi matematici della meccanica classica*. Roma: Editori Riuniti, 1979.

- 3) E.A. Coddington, N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. (International series in pure and applied mathematics). New York: McGraw-Hill, 1955.
- 4) J.K. Hale. *Ordinary differential equations*. (Pure and applied mathematics **21**). New York: Wiley-Interscience, 1969.
- 5) M.W. Hirsch, S. Smale. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. (Pure and applied mathematics. A series of Monographs and Textbooks). San Diego: Academic Press, 1974.



## Flussi hamiltoniani

### 3.1. Sistemi lagrangiani e sistemi hamiltoniani

In questa sezione mostriamo che una dinamica lagrangiana (non necessariamente di natura meccanica) può essere riformulata in termini di un differenziale formalismo, detto *formalismo hamiltoniano* o *canonico*. Sarebbe però riduttivo ritenere la dinamica hamiltoniana una semplice riformulazione di quella lagrangiana. Infatti, sebbene molti sistemi fisici siano descrivibili con entrambe le formulazioni, quello canonico è estremamente ricco, rivelandosi spesso più idoneo a trattare alcuni problemi. In particolare la dinamica hamiltoniana fornisce una notazione compatta in cui il concetto di *integrabilità* si esprime in maniera molto semplice. Inoltre lo studio di sistemi “vicini” a sistemi integrabili, ovvero la *teoria delle perturbazioni*, si sviluppa molto più agevolmente in tale formalismo.

Un sistema lagrangiano è assegnato tramite una funzione scalare  $L(q, \xi, t)$ , per  $(q, \xi, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Assumiamo  $L$  regolare ed uniformemente convessa nelle variabili  $\xi$ , ovvero esiste una costante  $C_0 > 0$  tale che, per ogni  $(q, \xi, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , sia

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(q, \xi, t) \eta_i \eta_j \geq C_0 \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n.$$

In notazione più compatta, indicando con  $D_{\xi\xi}L(q, \xi, t)$  la matrice hessiana di  $L$  rispetto alle variabili  $\xi$ ,

$$\langle \eta, D_{\xi\xi}L(q, \xi, t) \eta \rangle \geq C_0 |\eta|^2 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

I moti  $t \mapsto q(t)$  del sistema sono allora le soluzioni delle *equazioni di Eulero-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \xi}(q(t), \dot{q}(t), t) = \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t), \quad (3.2)$$

ovvero, nello spazio delle fasi, le soluzioni  $t \mapsto (q(t), \xi(t))$  del problema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \xi(t), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \xi}(q(t), \xi(t), t) = \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \xi(t), t). \end{cases} \quad (3.3)$$

L'ipotesi di convessità (3.1) implica in particolare che la matrice  $D_{\xi\xi}L$  è invertibile, cosicché le equazioni (3.3) possono essere poste in forma normale

$$\begin{cases} \dot{q} = \xi \\ \dot{\xi} = G(q, \xi, t) \end{cases} \quad (q, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d,$$

essendo

$$G(q, \xi, t) = -[D_{\xi\xi}L(q, \xi, t)]^{-1} [D_{q\xi}L(q, \xi, t)\xi + \partial_{t\xi}^2 L(q, \xi, t) - \partial_q L(q, \xi, t)].$$

Come noto le equazioni di Eulero-Lagrange sono invarianti in forma sotto trasformazioni di coordinate (anche dipendenti dal tempo) in  $\Omega$ . Precisamente, sia  $q = f(\tilde{q}, t)$  la legge che fornisce le vecchie coordinate  $q$  rispetto alle nuove coordinate  $\tilde{q}$ , che induce la trasformazione di coordinate dello spazio delle fasi  $(q, \xi) \rightarrow (\tilde{q}, \tilde{\xi})$  tale che

$$q = f(\tilde{q}, t), \quad \xi = D_{\tilde{q}}f(\tilde{q}, t)\tilde{\xi} + \partial_t f(\tilde{q}, t).$$

Allora l'immagine  $t \mapsto (\tilde{q}(t), \tilde{\xi}(t))$  di una soluzione  $t \mapsto (q(t), \xi(t))$  del sistema (3.3) è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange di lagrangiana

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{\xi}, t) = L(f(\tilde{q}, t), D_{\tilde{q}}f(\tilde{q}, t)\tilde{\xi} + \partial_t f(\tilde{q}, t), t).$$

Chiaramente, se consideriamo trasformazioni più generali dello spazio delle fasi, le equazioni (3.3) perdono questa proprietà di invarianza. Introduciamo ora un sistema di coordinate su tale spazio, dette *canoniche*, in cui le equazioni del moto assumono una forma particolarmente simmetrica. L'idea è di sostituire le velocità generalizzate  $\xi$  con i momenti cinetici ad esse associati, ovvero di utilizzare come coordinate dello spazio delle fasi la coppia  $(q, p)$  dove le variabili  $p$  sono legate alle  $(q, \xi)$  dalle relazioni

$$p = \frac{\partial L}{\partial \xi}(q, \xi, t). \quad (3.4)$$

Queste variabili giocano un ruolo speciale nel formalismo lagrangiano. Ricordiamo in particolare che il momento associato ad una coordinata ciclica (ovvero che non appare esplicitamente nella lagrangiana) è un integrale primo del moto. In effetti molte leggi di conservazione dei sistemi lagrangiani si scrivono come conservazione di momenti.

Per derivare le equazioni del moto nelle nuove variabili utilizziamo un risultato generale, detto *trasformazione di Legendre*.

**TEOREMA 3.1.** *Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione regolare e convessa (ovvero la matrice  $D_{\xi\xi}f(\xi)$  è definita positiva). Allora la trasformazione*

$$p = \phi(\xi) \doteq \partial_\xi f(\xi)$$

*definisce un diffeomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  sul dominio immagine e la sua inversa è*

$$\xi = \psi(p) = \partial_p f^*(p),$$

*con  $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$  così definita:*

$$f^*(p) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, \xi \rangle - f(\xi) \}.$$

DIMOSTRAZIONE. Essendo la matrice jacobiana  $D\phi(\xi) = D_{\xi\xi}f(\xi)$  invertibile, per il teorema della funzione inversa l'applicazione  $\phi$  definisce un diffeomorfismo locale nell'intorno di ciascun punto. Per verificare l'invertibilità globale, fissiamo  $\xi_0, \xi_1 \in \mathbb{R}^n$  tali che  $\xi_0 \neq \xi_1$ . Ponendo  $\xi_\lambda = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_0$ , si ha

$$\phi(\xi_1) - \phi(\xi_0) = \int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda} \phi(\xi_\lambda) = \int_0^1 d\lambda D\phi(\xi_\lambda)(\xi_1 - \xi_0).$$

Moltiplicando scalarmente per  $\xi_1 - \xi_0$  ed utilizzando la convessità di  $f$ , otteniamo

$$\langle \xi_1 - \xi_0, \phi(\xi_1) - \phi(\xi_0) \rangle = \int_0^1 d\lambda \langle \xi_1 - \xi_0, D_{\xi\xi}f(\xi_\lambda)(\xi_1 - \xi_0) \rangle > 0,$$

da cui  $\phi(\xi_1) \neq \phi(\xi_0)$  necessariamente.

Fissato un qualsiasi punto  $p$  nel dominio immagine di  $\phi$ , consideriamo ora la funzione  $f_p(\xi) \doteq \langle p, \xi \rangle - f(\xi)$ . Essendo  $\partial_\xi f_p(\xi) = p - \partial_\xi f(\xi)$ , per l'iniettività di  $\phi$  ora dimostrata la funzione  $f_p(\xi)$  possiede un unico punto critico in  $\psi(p) \doteq \phi^{-1}(p)$ . Inoltre  $f_p$  è una funzione concava poiché  $D_{\xi\xi}f_p(\xi) = -D_{\xi\xi}f(\xi)$  è una matrice definita negativa. Concludiamo che  $f_p$  assume il suo valore massimo in  $\psi(p)$ , ovvero

$$f^*(p) = \langle p, \psi(p) \rangle - f(\psi(p)).$$

In particolare, essendo  $p = \partial_\xi f(\psi(p))$ ,

$$df^*(p) = \langle \psi(p), dp \rangle + \langle p, d\psi(p) \rangle - \langle \partial_\xi f(\psi(p)), d\psi(p) \rangle = \langle \psi(p), dp \rangle,$$

da cui  $\psi(p) = \partial_p f^*(p)$ .  $\square$

OSSERVAZIONE 3.1. La funzione  $f^*$  viene detta la *trasformata di Legendre di  $f$* . È una funzione convessa poiché

$$D_{pp}f^*(p) = D\psi(p) = D\phi^{-1}(p) = [D\phi(\psi(p))]^{-1} = [D_{\xi\xi}f(\psi(p))]^{-1}.$$

Si osservi che la trasformazione di Legendre è involutiva, ovvero il suo quadrato è la trasformazione identica:  $f^{**} = f$  (si dimostri quest'ultima affermazione).

OSSERVAZIONE 3.2. Supponiamo che la funzione  $f$  dipenda inoltre da un insieme di parametri reali  $\alpha \in U \subset \mathbb{R}^m$ , dunque  $f = f(\xi, \alpha)$ . Allora anche  $\phi = \phi(\xi, \alpha)$ ,  $\psi = \psi(p, \alpha)$ ,  $f^* = f^*(p, \alpha)$  ed inoltre

$$\partial_\alpha f^*(p, \alpha) = -\partial_\alpha f(\psi(p, \alpha), \alpha). \quad (3.5)$$

In effetti, analogamente a sopra, si ha

$$f^*(p, \alpha) = \langle p, \psi(p, \alpha) \rangle - f(\psi(p, \alpha), \alpha),$$

da cui

$$\begin{aligned} df^*(p, \alpha) &= \langle \psi(p, \alpha), dp \rangle + \langle p, d\psi(p, \alpha) \rangle - \langle \partial_\xi f(\psi(p, \alpha)), d\psi(p, \alpha) \rangle - \\ &\quad - \langle \partial_\alpha f(\psi(p, \alpha)), d\alpha \rangle \\ &= \langle \psi(p, \alpha), dp \rangle - \langle \partial_\alpha f(\psi(p, \alpha)), d\alpha \rangle. \end{aligned}$$

ESEMPIO 3.1. Nel caso di una funzione convessa  $f(\xi)$  di una variabile reale, la trasformata di Legendre è  $f^*(p) = p\psi(p) - f(\psi(p))$  con  $\psi(p)$  l'unico punto (quando esiste) in cui la distanza con segno lungo la verticale tra la retta di equazione  $y = p\xi$  e la curva  $y = f(\xi)$  è massima. Ad esempio, se  $f(\xi) = \xi^2$  allora  $\psi(p) = p/2$  e  $f^*(p) = p^2/4$ . Invece se  $f(\xi) = e^{-\xi}$  la trasformata  $f^*(p)$  è finita solo per  $p < 0$ , precisamente:

$$f^*(p) = \begin{cases} +\infty & \text{se } p > 0, \\ p \log(-p^{-1}) + p & \text{se } p \leq 0. \end{cases}$$

ESEMPIO 3.2. Calcoliamo  $f^*(p)$  nel caso in cui  $f$  è una funzione quadratica definita positiva su  $\mathbb{R}^n$ . Dunque, per qualche matrice simmetrica e definita positiva  $A$  si ha:

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \langle \xi, A\xi \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{i,j} \xi_i \xi_j.$$

L'equazione  $\partial_\xi f = p$  diventa  $A\xi = p$  da cui  $\xi = A^{-1}p$ . Quindi per ogni  $p \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$f^*(p) = \langle p, A^{-1}p \rangle - f(A^{-1}p) = \langle p, A^{-1}p \rangle - \frac{1}{2} \langle A^{-1}p, AA^{-1}p \rangle = \frac{1}{2} \langle p, A^{-1}p \rangle.$$

Dunque  $f^*(p)$  è anch'essa una forma quadratica. Inoltre  $f$  ed  $f^*$  assumono lo stesso valore sui punti corrispondenti, ovvero:

$$f(A^{-1}p) = f^*(p), \quad f^*(A\xi) = f(\xi).$$

Torniamo ora al problema lagrangiano (3.3). Per l'ipotesi di convessità (3.1) possiamo applicare i risultati precedenti alla trasformazione (3.4). Definiamo *funzione di Hamilton, o hamiltoniana*, del sistema la trasformata di Legendre  $H(q, p, t)$  della lagrangiana  $L(q, \xi, t)$ . Quindi, se  $\xi = \psi(q, p, t)$  è l'esplicitazione di  $\xi$  dalla (3.4), allora

$$\begin{aligned} H(q, p, t) &= \langle p, \psi(q, p, t) \rangle - L(q, \psi(q, p, t), t) \\ &= \left\langle \frac{\partial L}{\partial \xi}(q, \xi, t), \xi \right\rangle - L(q, \xi, t) \Big|_{\xi=\psi(q,p,t)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Altrimenti detto, la funzione hamiltoniana è uguale all'energia generalizzata in funzione delle coordinate canoniche.

TEOREMA 3.2. *Il sistema delle equazioni di Lagrange (3.3) è equivalente al sistema di equazioni*

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t) \end{cases} \quad (3.7)$$

*dette equazioni di Hamilton, con  $H(q, p, t)$  come in (3.6).*

DIMOSTRAZIONE. Dal Teorema 3.1 e dalle (3.5), si ha (per  $\xi, p$  tali che  $p = \partial_\xi L(q, \xi, t)$ )

$$\xi = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t), \quad p = \frac{\partial L}{\partial \xi}(q, \xi, t), \quad \frac{\partial L}{\partial q}(q, \xi, t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t).$$

Ne segue immediatamente che il moto  $t \mapsto (q(t), \xi(t))$  è soluzione delle equazioni (3.3) se e solo se, posto  $p(t) = \partial_\xi L(q(t), p(t), t)$ , il moto  $t \mapsto (q(t), p(t))$  è soluzione delle equazioni (3.7).  $\square$

OSSERVAZIONE 3.3. Se rinunciamo alla proprietà di convessità di  $L$  e richiediamo unicamente che la matrice jacobiana  $D_{\xi\xi} L(q, \xi, t)$  sia invertibile per ogni  $\xi$ , è ancora possibile il passaggio da un formalismo all'altro almeno localmente. Infatti, sotto queste ipotesi, la relazione (3.4) definisce comunque un diffeomorfismo locale di un intorno di  $(q, \xi, t)$  in un intorno dell'immagine  $(q, p, t)$ ; rimane definita quindi, almeno localmente, l'hamiltoniana  $H(q, p, t)$  come in (3.6).

Vediamo ora alcuni esempi di sistemi hamiltoniani.

ESEMPIO 3.3. Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  soggetto ad un potenziale posizionale  $U$ . Indicando con  $q \in \mathbb{R}^3$  la posizione di  $P$ , la lagrangiana del sistema è

$$L(q, \xi) = \frac{m\xi^2}{2} - U(q).$$

Quindi il momento cinetico  $p = m\xi$  coincide con l'usuale quantità di moto della particella. L'hamiltoniana è allora

$$H(q, p) = \langle p, p/m \rangle - L(q, p/m) = \frac{p^2}{2m} + U(q).$$

Dunque l'hamiltoniana coincide con l'energia meccanica totale del punto materiale espressa in funzione delle variabili canoniche, e le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{q} = p/m \\ \dot{p} = -\nabla U(q) \end{cases}$$

ESEMPIO 3.4. Consideriamo un sistema meccanico conservativo soggetto a vincoli olonomi ideali indipendenti dal tempo. Nelle coordinate generalizzate  $q \in \mathbb{R}^n$ , la lagrangiana assume la forma

$$L(q, \xi) = \frac{1}{2} \langle \xi, A(q)\xi \rangle - U(q)$$

con  $A(q)$  la matrice definita positiva dell'energia cinetica ed  $U(q)$  l'energia potenziale. Dunque i momenti cinetici sono  $p = A(q)\xi$ , da cui

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \langle p, A(q)^{-1} p \rangle + U(q),$$

Nuovamente l'hamiltoniana coincide con l'energia meccanica totale del sistema espressa in funzione delle variabili canoniche, e le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{q} = A(q)^{-1} p \\ \dot{p} = -\nabla U(q) - \frac{1}{2} \langle p, \nabla A(q)^{-1} p \rangle \end{cases}$$

ESEMPIO 3.5. Vediamo alcuni casi particolari dell'esempio precedente:

i) Il pendolo matematico. Indicando con  $\theta$  la coordinata angolare,  $m$  la massa del pendolo,  $\ell$  la lunghezza del pendolo e  $g$  l'accelerazione di gravità, si ha

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta, \quad H(\theta, p) = \frac{p^2}{2m\ell^2} - mg\ell \cos \theta,$$

essendo  $p = m\ell^2\dot{\theta}$  il momento cinetico associato alla variabile  $\theta$ .

ii) Il moto centrale piano. Nelle coordinate polari piane  $(r, \theta)$ , indicando con  $m$  la massa del punto e con  $U(r)$  l'energia potenziale, si ha:

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r), \quad H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + U(r),$$

essendo  $p_r = m\dot{r}$  e  $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$  i momenti cinetici associati alle variabili  $r$  e  $\theta$  rispettivamente.

iii) Un sistema di  $N$  punti materiali  $P_i$  di masse  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , non soggetti a vincoli. Indichiamo con  $q_i \in \mathbb{R}^3$  la posizione del punto  $P_i$  e sia  $U(q_1, \dots, q_N)$  l'energia potenziale del sistema. Le leggi del moto sono

$$\begin{cases} m_i \dot{q}_i = p_i \\ \dot{p}_i = -\nabla_{q_i} U, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N,$$

ovvero le equazioni di Hamilton di hamiltoniana

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^N \frac{|p_i|^2}{2m_i} + U(q_1, \dots, q_N)$$

nelle variabili canoniche  $(q, p)$ , con  $q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  le coordinate cartesiane dei punti e  $p = (m_1 \dot{q}_1, \dots, m_N \dot{q}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  le corrispondenti quantità di moto.

ESEMPIO 3.6. Consideriamo ora il caso più generale di un *sistema lagrangiano naturale*, ovvero quando la lagrangiana è una funzione quadratica nelle velocità:

$$L(q, \xi, t) = L_2(q, \xi, t) + L_1(q, \xi, t) + L_0(q, t), \quad (q, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad (3.8)$$

essendo

$$L_2(q, \xi, t) = \frac{1}{2} \langle \xi, A(q, t) \xi \rangle, \quad L_1(q, \xi, t) = \langle \xi, b(q, t) \rangle,$$

con  $A(q, t)$  una matrice  $n \times n$  definita positiva e  $b(q, t)$  una funzione a valori in  $\mathbb{R}^n$ . In tal caso le variabili canoniche  $(q, p)$  sono legate a quelle lagrangiane  $(q, \xi)$  dalle relazioni

$$p = A(q, t) \xi + b(q, t) \iff \xi = A(q, t)^{-1} [p - b(q, t)].$$

Poiché l'energia generalizzata è in tal caso

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial \xi}(q, \xi, t), \xi \right\rangle - L(q, \xi, t) = L_2(q, \xi, t) - L_0(q, t),$$

ne segue che

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2} \langle [p - b(q, t)], A(q, t)^{-1} [p - b(q, t)] \rangle - L_0(q, t).$$

Un sistema meccanico conservativo con vincoli olonomi che dipendono dal tempo è un esempio di sistema lagrangiano naturale. Precisamente, in tal caso l'energia cinetica del sistema è una forma quadratica nelle velocità,  $T(q, \xi, t) = T_2(q, \xi, t) + T_1(q, \xi, t) + T_0(q, t)$ . Indicando con  $U(q, t)$  l'energia potenziale, la lagrangiana  $L = T - U$  si scrive allora nella forma (3.8) con

$$L_2(q, \xi, t) = T_2(q, \xi, t), \quad L_1(q, \xi, t) = T_1(q, \xi, t), \quad L_0(q, t) = T_0(q, t) - U(q, t).$$

Si osservi che nel caso in cui sono presenti i termini  $T_0$  e  $T_1$ , l'energia generalizzata  $L_2 - L_0 = T_2 - T_0 + U$ , e quindi l'hamiltoniana, non coincidono con l'energia meccanica totale del sistema  $T + U = T_2 + T_1 + T_0 + U$ .

**ESEMPIO 3.7.** Un classico esempio di sistema hamiltoniano di origine non meccanica è fornito dal *modello predatore-preda di Volterra-Lotka*. Si tratta di un sistema descrivente due specie in simbiosi, l'una,  $x$ , le "prede", l'altra,  $y$ , i "predatori". Le equazioni del sistema sono:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - By)x \\ \dot{y} = (Cx - D)y \end{cases}$$

con  $A, B, C, D > 0$ . Si suppone quindi che in assenza di predatori le prede crescono con un tasso costante  $A$  mentre in assenza di prede i predatori muoiono con un tasso costante  $D$ . Quando sono presenti entrambi, il tasso di crescita delle prede è diminuito ad ogni incontro con un predatore (per un termine  $-By$ ), mentre quello dei predatori è aumentato ad ogni incontro con una preda (per un termine  $Cx$ ). Introducendo le variabili  $p = \log x$ ,  $q = \log y$  nel dominio  $x, y > 0$ , si ha il sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{q} = Ce^p - D \\ \dot{p} = A - Be^q \end{cases}$$

che sono le equazioni di Hamilton di hamiltoniana  $H(q, p) = Ce^p + Be^q - Aq - Dp$ .

**ESEMPIO 3.8.** Consideriamo infine un esempio di sistema hamiltoniano che non è associato ad alcun sistema lagrangiano. Precisamente, nel dominio  $q, p > 0$ , sia  $H(q, p) = \log \sqrt{q^2 + p^2}$ . Poiché  $\partial_p^2 H(q, p) = (q^2 - p^2)(q^2 + p^2)^{-2}$  si annulla lungo la semiretta  $p = q$ , l'esplicitazione di  $p$  in funzione di  $(q, \xi)$  attraverso l'equazione  $\xi = \partial_p H(q, p) = p(q^2 + p^2)^{-1}$  non è univocamente determinata.

### 3.2. Leggi di conservazione e parentesi di Poisson

Iniziamo a studiare le proprietà dei sistemi hamiltoniani. Sia  $U$  un dominio di  $\mathbb{R}^{2n}$  munito delle coordinate

$$(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$$

ed  $H : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione regolare. Le *equazioni di Hamilton* di hamiltoniana  $H$  sono dunque date dal sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t) \end{cases} \quad (3.9)$$

Motivati dalla derivazione lagrangiana esposta nella sezione precedente, le variabili  $p$  sono dette *momenti coniugati* alle coordinate  $q$ ,  $n$  è detto il numero di gradi di libertà del sistema (da non confondere con la dimensione  $2n$  dello spazio delle fasi  $U$ ). Quando non altrimenti specificato, assumeremo nel seguito che il sistema è *completo*, ovvero che la soluzione  $\Phi_H^{t, t_0}(q, p)$  del sistema (3.9) esiste globale nel tempo per ogni dato iniziale  $(q, p, t_0) \in U \times \mathbb{R}$ . In particolare, se l'hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, si ha  $\Phi_H^{t, t_0}(q, p) = \Phi_H^{t-t_0, 0}(q, p) \doteq \Phi_H^{t-t_0}(q, p)$ , con  $(U, \{\Phi_H^t\})$  un flusso di fase, detto *flusso hamiltoniano* associato alla hamiltoniana  $H$ .

Una scrittura più compatta che si rivela spesso utile è la seguente. Poniamo

$$x = (x_1, \dots, x_{2n}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n),$$

ovvero  $x_i = q_i$ ,  $x_{i+n} = p_i$  per  $i = 1, \dots, n$ , ed introduciamo la *matrice simplettica fondamentale*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix},$$

essendo  $\mathbb{I}$  la matrice identità  $n \times n$ . Posto  $H(x, t) = H(q, p, t)$  vediamo subito che il sistema di Hamilton (3.9) nelle variabili  $x$  assume la forma

$$\dot{x} = J \nabla_x H(x, t). \quad (3.10)$$

La funzione di Hamilton  $H(q, p, t)$  viene anche detta *energia generalizzata* del sistema. Dalle equazioni (3.10) segue che per ogni soluzione  $\phi(t)$  si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\phi(t), t) &= \langle \nabla_x H(\phi(t), t), \dot{\phi}(t) \rangle + \frac{\partial H}{\partial t}(\phi(t), t) \\ &= \langle \nabla_x H(\phi(t), t), J \nabla_x H(\phi(t), t) \rangle + \frac{\partial H}{\partial t}(\phi(t), t) \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}(\phi(t), t), \end{aligned} \quad (3.11)$$

dove nell'ultima uguaglianza si è utilizzato il fatto che la matrice  $J$  è antisimmetrica.

Un sistema hamiltoniano è detto *conservativo* se l'hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo. Essendo in tal caso  $\partial H / \partial t = 0$ , dalla (3.11) segue che

$$\frac{d}{dt} H(\Phi_H^t(q, p)) = 0.$$

In altri termini, nel caso conservativo l'energia generalizzata  $H(q, p)$  è un integrale primo del sistema.

Più in generale, assegnata una qualsiasi funzione regolare  $F(x, t) = F(q, p, t)$ , la sua variazione nel tempo lungo ogni soluzione  $\phi(t)$  del sistema (3.10) si scrive:

$$\frac{d}{dt}F(\phi(t), t) = \langle \nabla_x F(\phi(t), t), J\nabla_x H(\phi(t), t) \rangle + \frac{\partial F}{\partial t}(\phi(t), t). \quad (3.12)$$

È utile ora introdurre la nozione di *parentesi di Poisson*  $\{F, G\}$  tra due funzioni regolari  $F, G: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Precisamente  $\{F, G\}$  è la nuova funzione

$$\{F, G\} = L_{J\nabla_x G}F = \langle \nabla_x F, J\nabla_x G \rangle = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right], \quad (3.13)$$

dove  $L_{J\nabla_x G}$  è la derivata di Lie rispetto al campo vettoriale  $J\nabla_x G$ . Utilizzando questa definizione l'equazione (3.12) si scrive:

$$\frac{d}{dt}F(\phi(t), t) = \{F, H\}(\phi(t), t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\phi(t), t). \quad (3.14)$$

In particolare, la funzione  $F(q, p, t)$  è integrale primo se e solo, identicamente su  $U \times \mathbb{R}$ ,

$$\{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (3.15)$$

Le parentesi di Poisson godono delle seguenti proprietà:

- 1)  $\{F, G\} = -\{G, F\}$ ;
- 2)  $\{\alpha F + \beta G, H\} = \alpha\{F, H\} + \beta\{G, H\}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;
- 3)  $\{FG, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\}$ ;
- 4)  $\partial_t \{F, G\} = \{\partial_t F, G\} + \{F, \partial_t G\}$ ;
- 5)  $\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0$ .

Le prime quattro proprietà seguono immediatamente dalla definizione di parentesi di Poisson. La quinta proprietà, detta *identità di Jacobi*, si dimostra nel seguente modo. Osserviamo che l'espressione a sinistra è una combinazione lineare di derivate seconde delle funzioni  $F, G, H$ . Consideriamo ora i termini dove appaiono le derivate seconde di  $F$ . Questi sono:

$$\begin{aligned} \{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} &= \{\{F, G\}, H\} - \{\{F, H\}, G\} \\ &= L_{J\nabla_x H}L_{J\nabla_x G}F - L_{J\nabla_x G}L_{J\nabla_x H}F \\ &= [L_{J\nabla_x H}, L_{J\nabla_x G}]F. \end{aligned}$$

Poiché il commutatore di due derivate di Lie è ancora un operatore differenziale del primo ordine, precisamente  $[L_{J\nabla_x H}, L_{J\nabla_x G}] = L_{[J\nabla_x H, J\nabla_x G]}$ , concludiamo che sono assenti termini con derivate seconde di  $F$ . Ma lo stesso argomento si ripete per le funzioni  $G$  ed  $H$ , da cui l'identità richiesta. Osserviamo inoltre che il conto precedente ci permette di riscrivere l'identità di Jacobi nella forma

$$L_{[J\nabla_x H, J\nabla_x G]}F = -\{F, \{H, G\}\} = -L_{J\nabla\{H, G\}}F,$$

da cui, vista l'arbitrarietà di  $F$ ,

$$[J\nabla_x H, J\nabla_x G] = -J\nabla_x \{H, G\}.$$

In altri termini: *Il commutatore di due campi hamiltoniani con funzioni di Hamilton  $H, G$  è ancora un campo hamiltoniano, precisamente quello la cui funzione di Hamilton è  $\{G, H\}$ .* Dunque, se dotiamo lo spazio lineare dei campi vettoriali infinitamente derivabili su  $U$  della struttura di algebra di Lie mediante l'operazione di commutazione, l'insieme dei campi hamiltoniani su  $U$  ne è una sottoalgebra.

Un'importante conseguenza dell'identità di Jacobi è il seguente risultato.

**TEOREMA 3.3.** *Se  $F_1$  ed  $F_2$  sono integrali primi di un campo hamiltoniano di hamiltoniana  $H$ , allora anche la parentesi di Poisson  $\{F_1, F_2\}$  possiede tale proprietà.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per ipotesi le funzioni  $F_1$  ed  $F_2$  soddisfano l'equazione (3.14), ovvero

$$\{F_1, H\} + \partial_t F_1 = 0, \quad \{F_2, H\} + \partial_t F_2 = 0. \quad (3.16)$$

Dobbiamo da questo dedurre che la stessa equazione rimane soddisfatta da  $\{F_1, F_2\}$ , ovvero che

$$\{\{F_1, F_2\}, H\} + \partial_t \{F_1, F_2\} = 0.$$

In effetti, utilizzando la proprietà 4) delle parentesi di Poisson, le relazioni (3.16) ed infine l'identità di Jacobi si ha:

$$\begin{aligned} \partial_t \{F_1, F_2\} &= \{\partial_t F_1, F_2\} + \{F_1, \partial_t F_2\} = -\{\{F_1, H\}, F_2\} - \{F_1, \{F_2, H\}\} \\ &= \{\{H, F_1\}, F_2\} + \{\{F_2, H\}, F_1\} = -\{\{F_1, F_2\}, H\}, \end{aligned}$$

dunque l'identità cercata.  $\square$

Questo teorema fornisce un metodo per costruire nuovi integrali del moto a partire da due integrali noti attraverso un'operazione di differenziazione (cioè il calcolo della parentesi di Poisson). Infatti se  $F_1$  ed  $F_2$  sono due integrali primi, allora lo è  $F_3 = \{F_1, F_2\}$  e quindi  $F_4 = \{F_1, F_3\}, F_5 = \{F_2, F_3\}$ , etc. In generale i nuovi integrali possono essere non indipendenti dai precedenti, ad esempio  $F_3(x, t) = f(F_1(x, t), F_2(x, t))$  per qualche funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , o addirittura essere delle costanti. In effetti un sistema ammette al più  $2n$  integrali primi indipendenti. In quest'ultimo caso, cioè quando il sistema è integrabile, solo particolari scelte di  $m < 2n$  integrali primi indipendenti permette di ottenere, attraverso le parentesi di Poisson, i rimanenti  $2n - m$  integrali indipendenti.

**ESEMPIO 3.9.** Consideriamo una particella di massa  $m$ . Siano  $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  la posizione e  $p = (p_x, p_y, p_z) = (m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}) \in \mathbb{R}^3$  la quantità di moto del punto. Sia infine  $\ell = q \wedge p$  il momento della quantità di moto della particella, dunque  $\ell = (\ell_x, \ell_y, \ell_z)$  con

$$\ell_x = yp_z - zp_y, \quad \ell_y = zp_x - xp_z, \quad \ell_z = xp_y - yp_x.$$

Si ha allora, dalla definizione (3.13),

$$\{p_x, p_y\} = 0, \quad \{p_x, \ell_y\} = -\frac{\partial p_x}{\partial p_x} \frac{\partial \ell_y}{\partial x} = p_z, \quad \{\ell_x, \ell_y\} = \frac{\partial \ell_x}{\partial z} \frac{\partial \ell_y}{\partial p_z} - \frac{\partial \ell_x}{\partial p_z} \frac{\partial \ell_y}{\partial z} = \ell_z,$$

da cui, per permutazione ciclica di  $x, y, z$ ,

$$\begin{cases} \{p_x, p_y\} = 0, & \{p_y, p_z\} = 0, & \{p_z, p_x\} = 0, \\ \{p_x, \ell_y\} = p_z, & \{p_y, \ell_z\} = p_x, & \{p_z, \ell_x\} = p_y, \\ \{\ell_x, \ell_y\} = \ell_z, & \{\ell_y, \ell_z\} = \ell_x, & \{\ell_z, \ell_x\} = \ell_y. \end{cases} \quad (3.17)$$

Prendiamo ora in esame un sistema di  $N$  punti materiali identici, di massa  $m$ , non soggetti a forze esterne ma unicamente a forze di interazione che soddisfanno il terzo principio della dinamica. Quindi, se indichiamo con  $q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  le coordinate cartesiane dei punti e  $p = (m\dot{q}_1, \dots, m\dot{q}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  le corrispondenti quantità di moto, l'hamiltoniana del sistema è

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^N \frac{|p_i|^2}{2m} + \sum_{i \neq j} U(|q_i - q_j|),$$

dove  $U: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  è l'energia potenziale della forza di interazione tra i punti materiali. Le equazioni cardinali della meccanica forniscono in questo caso sei integrali primi, precisamente le componenti delle quantità di moto e momento angolare totali del sistema, ovvero

$$P = (P_x, P_y, P_z) = \sum_{i=1}^N p_i, \quad L = (L_x, L_y, L_z) = \sum_{i=1}^N q_i \wedge p_i.$$

Poiché la parentesi di Poisson tra impulsi o momenti angolari di particelle differenti è nulla, dalle relazioni (3.17), valide per ciascuna particella, otteniamo:

$$\begin{cases} \{P_x, P_y\} = 0, & \{P_y, P_z\} = 0, & \{P_z, P_x\} = 0, \\ \{P_x, L_y\} = P_z, & \{P_y, L_z\} = P_x, & \{P_z, L_x\} = P_y, \\ \{L_x, L_y\} = L_z, & \{L_y, L_z\} = L_x, & \{L_z, L_x\} = L_y. \end{cases}$$

Quindi le sei leggi di conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto non sono indipendenti. Ad esempio, noti  $P_x, L_x$  e  $L_y$ , i restanti tre si ottengono come parentesi di Poisson dei precedenti.

Una variabile  $q_k$  viene detta *ciclica* o *ignorabile* se essa non appare esplicitamente nell'hamiltoniana. Si osservi che se  $H$  è la trasformata di Legendre di una lagrangiana  $L$ , essendo  $\partial_{q_k} H(q, p, t) = -\partial_{q_k} L(q, \xi, t)$ , la variabile  $q_k$  è ciclica per  $H$  se e solo se  $q_k$  è ciclica per  $L$ .

Supponiamo che  $q_n$  è ciclica, cosicché, per le equazioni di Hamilton,

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}(q, p, t), \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}(q, p, t) = 0.$$

Dalla seconda equazione discende che il momento associato è un integrale primo del sistema, dunque  $p_n(t) = p_n(t_0)$ . Se consideriamo ora le rimanenti  $2n - 2$  equazioni, in esse la coordinata  $q_n$  non appare (essendo ciclica), mentre il momento  $p_n$  interviene come un parametro (essendo conservato). In altri termini, esse sono le equazioni di Hamilton per un sistema con  $n - 1$  coordinate  $(q_1, \dots, q_{n-1})$  di hamiltoniana

$$H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, c_n, t),$$

dove  $c_n = p_n(t_0)$  è un parametro da fissare mediante i dati iniziali. Infine, risolto tale sistema, il moto di  $q_n$  si determina per integrazione:

$$q_n(t) = q_n(t_0) + \int_{t_0}^t ds \frac{\partial H}{\partial c_n}(q_1(s), \dots, q_{n-1}(s), p_1(s), \dots, p_{n-1}(s), c_n, s).$$

### 3.3. Teorema di Liouville e misure invarianti

In questa sezione dimostriamo una proprietà geometrica notevole comune a tutti i campi hamiltoniani. In effetti si tratta una proprietà comune a tutti i campi vettoriali la cui divergenza è nulla, tra i quali vi sono i campi hamiltoniani poiché, essendo  $J$  antisimmetrica, qualunque sia la funzione di Hamilton  $H$  si ha:

$$\operatorname{div} J\nabla_x H(x, t) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial (J\nabla_x H)_i}{\partial x_i}(x, t) = \sum_{i,j=1}^{2n} J_{i,j} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) = 0.$$

Affrontiamo il problema nel caso di un sistema differenziale qualsiasi  $\dot{x} = v(t, x)$ , definito per  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}$ , con  $\mathcal{D}$  un dominio di  $\mathbb{R}^n$ . Indichiamo con  $\varphi^{t, t_0}(x_0)$  la soluzione del problema di Cauchy di dati iniziali  $\varphi^{t_0, t_0}(x_0) = x_0$ , che assumiamo definita globalmente nel tempo per ogni dato iniziale  $(t_0, x_0)$ . Dunque per ogni coppia di tempi  $t, t_0 \in \mathbb{R}$  l'applicazione  $\varphi^{t, t_0} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  definisce un diffeomorfismo di  $\mathcal{D}$ . Fissata una regione limitata e misurabile  $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ , indichiamo con  $\mathcal{B}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , l'evolva di  $\mathcal{B}$  al tempo  $t$ :

$$\mathcal{B}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \varphi^{t, t_0}(x_0), x_0 \in \mathcal{B}\},$$

Vogliamo ora dimostrare la seguente formula (dovuta a Liouville):

$$\frac{d}{dt} v(\mathcal{B}(t)) = \int_{\mathcal{B}(t)} dx \operatorname{div} v(t, x), \quad \operatorname{div} v(t, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x). \quad (3.18)$$

dove  $v(\mathcal{B}(t)) = |\mathcal{B}(t)|$  è il volume (o *misura di Liouville*) della regione  $\mathcal{B}(t)$ . Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(\mathcal{B}(t)) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}(t)} dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} dx_0 \det D\varphi^{t, t_0}(x_0) = \int_{\mathcal{B}} dx_0 \frac{d}{dt} \det D\varphi^{t, t_0}(x_0) \\ &= \int_{\mathcal{B}} dx_0 \frac{d}{d\varepsilon} \det D\varphi^{t+\varepsilon, t_0}(x_0) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{\mathcal{B}} dx_0 \frac{d}{d\varepsilon} \det D[\varphi^{t+\varepsilon, t} \circ \varphi^{t, t_0}](x_0) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{\mathcal{B}} dx_0 \frac{d}{d\varepsilon} \det \{D\varphi^{t+\varepsilon, t}(\varphi^{t, t_0}(x_0)) D\varphi^{t, t_0}(x_0)\} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{\mathcal{B}} dx_0 \det D\varphi^{t, t_0}(x_0) \frac{d}{d\varepsilon} \det D\varphi^{t+\varepsilon, t}(\varphi^{t, t_0}(x_0)) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{\mathcal{B}(t)} dx \frac{d}{d\varepsilon} \det D\varphi^{t+\varepsilon, t}(x) \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (3.19)$$

dove nella seconda [risp. ultima] uguaglianza si è fatto il cambiamento di variabili di integrazione  $x \mapsto x_0$  [risp.  $x_0 \mapsto x$ ]. Si osservi che  $\det D\varphi^{t, t_0}(x_0) > 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Infatti la funzione  $t \mapsto \det D\varphi^{t, t_0}(x_0)$  è continua, positiva in  $t = t_0$

( $D\varphi^{t_0, t_0}(x_0) = \mathbb{I}$ ), e non può annullarsi essendo  $\varphi^{t, t_0}$  un diffeomorfismo e dunque  $D\varphi^{t, t_0}(x_0)$  una matrice invertibile. Per calcolare la derivata nell'ultimo integrale osserviamo che, supponendo come sempre che il campo vettoriale è una funzione regolare, si ha:

$$\varphi^{t+\varepsilon, t}(x) = x + \varepsilon v(t, x) + R(t, x, \varepsilon),$$

con  $R(t, x, \varepsilon)$ ,  $\partial_x R(t, x, \varepsilon)$  funzioni regolari ed infinitesime di ordine superiore al primo per  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Quindi

$$D\varphi^{t+\varepsilon, t}(x) = \mathbb{I} + \varepsilon Dv(t, x) + O(\varepsilon^2).$$

Ricordando la definizione di determinante è ora facile convincersi del fatto che, se  $A$  è un matrice assegnata,

$$\det(\mathbb{I} + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} A + O(\varepsilon^2),$$

da cui

$$\frac{d}{d\varepsilon} \det(\mathbb{I} + \varepsilon A) \Big|_{\varepsilon=0} = \operatorname{Tr} A.$$

Applicando tale risultato nella (3.19) ed osservando che  $\operatorname{Tr} Dv(t, x) = \operatorname{div} v(t, x)$  l'uguaglianza (3.18) è dimostrata.

**OSSERVAZIONE 3.4.** Si osservi che abbiamo dimostrato in maniera leggermente diversa il Teorema di Liouville (Teorema 2.4) per il wronskiano di un sistema lineare. Infatti la matrice jacobiana del diffeomorfismo  $\varphi^{t, t_0}$  soddisfa l'equazione delle variazioni (A.18), ovvero è la matrice principale dell'Eq. (2.9) con  $A(t) = Dv(t, \varphi^{t, t_0}(x_0))$ .

Dalla formula (3.18) discende immediatamente il seguente teorema.

**TEOREMA 3.4.** *Il flusso di fase associato ad un campo vettoriale a divergenza nulla conserva il volume nello spazio delle fasi. In particolare il flusso hamiltoniano conserva il volume nello spazio delle fasi.*

### 3.4. Il teorema del ritorno di Poincaré

Il risultato della precedente sezione permette di applicare ai sistemi meccanici idee e tecniche della teoria ergodica. Presentiamo qui uno tra i più semplici risultati, detto *teorema del ritorno* (o *della ricorrenza*) di Poincaré.

Iniziamo con una osservazione di carattere generale che utilizzeremo anche in seguito. Nello studio del comportamento asintotico di un flusso di fase  $\varphi^t$  può essere sufficiente osservare l'evoluzione del sistema solo lungo una determinata successione di tempi. Più precisamente, fissiamo un tempo  $T > 0$  e definiamo il diffeomorfismo  $g \doteq \varphi^T$ . Consideriamo la legge di evoluzione a tempo discreto  $\{g^k; k \in \mathbb{Z}\}$  definita dalle iterazioni della mappa  $g$ :

$$g^0(x) = x, \quad g^1(x) = g(x), \quad g^2(x) = g(g(x)), \quad \dots, \quad g^k(x) = g(g^{k-1}(x)),$$

$$g^{-k}(x) = (g^{-1})^k(x),$$

dove l'inversa  $g^{-1}$  è ben definita essendo  $g$  un diffeomorfismo. Per la proprietà di gruppo del flusso di fase si ha:

$$\varphi^{kT+s}(x) = \varphi^s(g^k(x)) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall s \in [0, T).$$

Quindi in particolare  $\varphi^{kT}(x) = g^k(x)$ , ovvero l'evoluzione del sistema discreto al tempo  $k$  coincide con quella del flusso di fase al tempo  $kT$ . Inoltre possiamo sperare di controllare l'evoluzione del sistema anche durante il tempo  $[kT, (k+1)T]$  scegliendo  $T$  sufficientemente piccolo. In effetti, per  $t \in [kT, (k+1)T]$ ,

$$|\varphi^t(x) - g^{kT}(x)| \leq \max_{s \in [0, T]} |\varphi^s(g^k(x)) - g^k(x)|,$$

ed il membro di destra è infinitesimo per  $T \rightarrow 0$ . Chiaramente la convergenza di tale infinitesimo dipende da  $g^k(x)$ , ma in taluni casi essa può essere controllata. Ad esempio, se  $v(x)$  è il campo vettoriale associato al flusso di fase e si possiede una stima su  $|v(g^k(x))|$  uniforme in  $k$ , allora per ogni  $\delta > 0$  è possibile scegliere un  $T$  tale che  $|\varphi^t(x) - g^k(x)| \leq \delta$  per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  e  $t \in [kT, (k+1)T]$  (dimostrarlo!).

**TEOREMA 3.5** (Teorema del ritorno di Poincaré). *Sia  $g$  un'applicazione biunivoca e misurabile che conserva il volume e che lascia invariata una regione limitata  $\mathcal{D}$  di  $\mathbb{R}^n$ :  $g(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ . Allora per ogni insieme misurabile  $A$  in  $\mathcal{D}$  quasi tutti i punti di  $A$  tornano infinite volte in  $A$ . In altri termini, posto*

$$B \doteq \left\{ x \in A : \text{esiste una success. diverg. } \{k_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ tale che } g^{k_j}(x) \in A \forall j \in \mathbb{N} \right\},$$

si ha  $v(B) = v(A)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Il punto  $x \in A$  è detto *ricorrente* in  $A$  se  $g^k(x) \in A$  per almeno un intero  $k > 0$ . Indichiamo con  $N$  l'insieme dei punti non ricorrenti di  $A$ , ovvero  $N = \{x \in A : g^k(x) \notin A \forall k \geq 1\}$ . In particolare  $g^k(x) \notin N$  per ogni  $x \in N$  e  $k \geq 1$ , cosicché  $N \cap g^k(N) = \emptyset$  per ogni  $k \geq 1$ . Allora, fissati due qualsiasi interi  $k_2 > k_1 \geq 1$  si ha

$$g^{k_1}(N) \cap g^{k_2}(N) = g^{k_1}(N \cap g^{k_2-k_1}(N)) = \emptyset.$$

Quindi gli insiemi  $g^k(N)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sono disgiunti e, poiché  $g$  conserva la misura, tutti di volume uguale a  $v(N)$ . Essendo inoltre tutti contenuti in  $\mathcal{D}$  ne segue che, per ogni intero  $k > 0$ ,

$$v(\mathcal{D}) \geq \sum_{\ell=0}^{k-1} v(g^\ell(N)) = k v(N).$$

Essendo  $v(\mathcal{D}) < +\infty$ , deve essere  $v(N) = 0$ .

Consideriamo ora l'insieme dei punti non ricorrenti infinite volte, ovvero l'insieme

$$N_\infty = \{x \in A : \text{esiste } k > 0 \text{ per cui } g^\ell(x) \notin A \text{ per ogni } \ell \geq k\}.$$

Chiaramente

$$\begin{aligned} N_\infty &\subset \{x \in A : \text{esiste } k > 0 \text{ per cui } g^{kj}(x) \notin A \text{ per ogni } j \geq 1\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in A : (g^k)^j(x) \notin A \text{ per ogni } j \geq 1\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k, \end{aligned}$$

essendo  $N_k$  l'insieme dei punti non ricorrenti di  $A$  per l'applicazione  $g^k$ . Poiché  $g^k$  è anch'essa un'applicazione biunivoca e misurabile che conserva il volume e che lascia invariata la regione limitata  $\mathcal{D}$ , per quanto sopra dimostrato si ha  $\nu(N_k) = 0$  per ogni  $k \geq 1$ . Ne segue, per la subaddittività della misura, che anche  $\nu(N_\infty) = 0$ . Poiché  $B = A \setminus N_\infty$ , concludiamo che  $\nu(B) = \nu(A)$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE 3.5.** Per chi ha conoscenza della teoria astratta della misura, è evidente che il teorema di Poincaré si generalizza al contesto di spazi di misura qualsiasi. Precisamente, sia  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio di misura finita, ovvero  $\mu$  è una misura  $\sigma$ -additiva definita sulla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  tale che  $\mu(\Omega) < \infty$ ; sia inoltre  $g : \Omega \rightarrow \Omega$  una trasformazione biunivoca e misurabile che conserva la misura, i.e.  $\mu(g(A)) = \mu(A)$  per ogni  $A \in \mathcal{A}$ . Allora, per ogni  $A \in \mathcal{A}$ , l'insieme dei punti di  $A$  non infinitamente ricorrenti in  $A$  ha misura nulla.

**COROLLARIO 3.6.** *Sia data l'equazione differenziale  $\dot{x} = v(x)$  in un dominio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  limitato ed invariante tale che il flusso di fase  $\varphi^t$  conservi il volume. Allora:*

1) Per ogni insieme misurabile  $A$  in  $\mathcal{D}$  l'insieme dei punti "vaganti" di  $A$ ,

$$V_A \doteq \{x \in A : \text{esiste } T > 0 \text{ per cui } \varphi^t(x) \notin A \text{ per ogni } t \geq T\}$$

ha misura nulla.

2) Per ogni  $\varepsilon > 0$ , l'insieme  $\mathcal{B}_\varepsilon \subset \mathcal{D}$  dei dati iniziali  $x$  tali che  $\varphi^t(x)$  ritorna infinite volte a distanza non superiore ad  $\varepsilon$  da  $x$  ha misura piena, ovvero  $\nu(\mathcal{B}_\varepsilon) = \nu(\mathcal{D})$ .

**DIMOSTRAZIONE.** 1) L'insieme  $V_A$  è contenuto nell'insieme

$$\tilde{V}_A \doteq \{x \in A : \text{esiste un intero } k > 0 \text{ per cui } \varphi^j(x) \notin A \text{ per ogni intero } j \geq k\},$$

che è l'insieme dei punti non ricorrenti infinite volte in  $A$  per l'applicazione  $g = \varphi^1$ . Poiché  $g$  soddisfa le ipotesi del Teorema 3.5, ne segue che  $\nu(\tilde{V}_A) = 0$  e dunque  $\nu(V_A) = 0$ .

2) Poiché  $\mathcal{D}$  è limitato può essere ricoperto con un numero finito di palle di raggio  $\varepsilon/2$ . È ora sufficiente applicare il punto 1) a ciascuna di esse.  $\square$

### 3.5. Misura microcanonica ed ipotesi ergodica

Possiamo applicare i risultati della sezione precedente al flusso di fase  $\Phi_H^t$  di un sistema hamiltoniano  $\dot{x} = J\nabla H(x)$  di hamiltoniana  $H(x)$  indipendente dal tempo e tale che i sottolivelli di energia  $D_E = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : H(x) \leq E\}$  siano degli insiemi limitati. Infatti la conservazione dell'energia implica in particolare che  $D_E$  sono insiemi invarianti sotto il flusso  $\Phi_H^t$ , ed il teorema del ritorno si applica

in questo caso. Un classico esempio è costituito da un sistema meccanico di energia potenziale  $U(q)$ ,  $q \in \mathbb{R}^n$ , che cresce all'infinito per  $|q| \rightarrow +\infty$ . Per le ipotesi su  $U(q)$  la regione  $D_E$  è un insieme limitato.

In verità, se è assegnata l'energia totale  $E$  del sistema, l'insieme dei moti possibili si svolge sull'insieme di livello  $E$  dell'energia,

$$\Sigma_E = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : H(x) = E\},$$

detta anche *superficie isoenergetica*. In generale,  $\Sigma_E$  è una superficie di codimensione uno, per cui ha misura di Liouville nulla. È allora naturale chiedersi se esiste una misura invariante definita sulla superficie isoenergetica. Effettivamente tale misura esiste.

**TEOREMA 3.7.** *Fissato  $E \in \mathbb{R}$ , sia  $\Sigma_E$  una superficie compatta di  $\mathbb{R}^{2n}$  tale che  $\nabla H(\xi) \neq 0$  per ogni  $\xi \in \Sigma_E$ . Indichiamo con  $d\sigma(\xi)$  l'elemento di superficie su  $\Sigma_E$ . Allora la misura di superficie*

$$\mu(A) = \int_A d\sigma(\xi) \frac{1}{|\nabla H(\xi)|}, \quad (3.20)$$

dove  $A \subset \Sigma_E$  è un insieme misurabile, è lasciata invariante dal flusso hamiltoniano:  $\mu(\Phi_H^t(A)) = \mu(A)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\Sigma_E$  è compatta ed ivi il gradiente di  $H$  è non nullo, se  $\delta E$  è sufficientemente piccolo possiamo "rettificare" l'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^{2n} : E \leq H(x) \leq E + \delta E\}$ , ovvero introdurre il cambiamento di coordinate  $x = f(\xi, \ell)$ ,  $\xi \in \Sigma_E$ ,  $\ell \in [0, \ell_\xi]$ , tale che  $f(\xi, \ell)$  è la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(\xi, \ell) = \frac{\nabla H}{|\nabla H|}(f(\xi, \ell)), \quad f(\xi, 0) = \xi, \quad f(\xi, \ell_\xi) \in \Sigma_{E+\delta E}.$$

Se  $A$  è un insieme misurabile in  $\Sigma_E$ , poniamo  $A \times \delta E \doteq \{f(\xi, \ell) : \xi \in A, \ell \in [0, \ell_\xi]\}$ . La misura *microcanonica* di  $A$ , definita in (3.20), può allora ottenersi mediante il seguente limite:

$$\mu(A) = \lim_{\delta E \rightarrow 0} \frac{1}{\delta E} \nu(A \times \delta E). \quad (3.21)$$

In effetti si ha:

$$\begin{aligned} \nu(A \times \delta E) &= \int_{A \times \delta E} dx = \int_A d\sigma(\xi) \int_0^{\ell_\xi} d\ell J(\xi, \ell) \\ &= \int_A d\sigma(\xi) \int_E^{E+\delta E} d\varepsilon \frac{1}{|\nabla H(\xi, \ell_\xi(\varepsilon))|} J(\xi, \ell_\xi(\varepsilon)) \\ &= \int_E^{E+\delta E} d\varepsilon \int_A d\sigma(\xi) \frac{1}{|\nabla H(\xi, \ell_\xi(\varepsilon))|} J(\xi, \ell_\xi(\varepsilon)), \end{aligned}$$

dove  $J(\xi, \ell)$  è il determinante jacobiano del cambiamento di coordinate  $x = f(\xi, \ell)$ , mentre  $\ell_\xi(\varepsilon)$  è il valore di  $\ell$  tale che  $f(\xi, \ell) \in \Sigma_\varepsilon$ ; inoltre, nel cambiamento della variabile di integrazione  $\ell \rightarrow \varepsilon = H(f(\xi, \ell))$  si è utilizzato il fatto che

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \ell}(\xi, \ell) = \left\langle \nabla H(f(\xi, \ell)), \frac{\partial f}{\partial \ell}(\xi, \ell) \right\rangle = |\nabla H(f(\xi, \ell))|.$$

Poiché  $J(\xi, \ell) \rightarrow 1$  se  $\ell \rightarrow 0$  e  $\ell_\xi(\varepsilon) \rightarrow 0$  se  $\varepsilon \rightarrow E$ , il limite (3.21) segue immediatamente. Osserviamo ora che, per il teorema di Liouville,

$$\nu(\Phi_H^t(A \times \delta E)) = \nu(A \times \delta E) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

L'invarianza di  $\mu(A)$  segue allora dal fatto che

$$\nu(\Phi_H^t(A \times \delta E)) = \nu(\Phi_H^t(A) \times \delta E) + O(\delta E^2),$$

la cui prova è lasciata al lettore.  $\square$

**ESEMPIO 3.10.** Calcoliamo la misura microcanonica nel caso di un oscillatore armonico di massa  $m$  e costante elastica  $k$ . L'hamiltoniana è

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2,$$

per cui, per ogni  $E > 0$ ,  $\Sigma_E$  è l'ellisse di assi  $a = \sqrt{2k^{-1}E}$  e  $b = \sqrt{2mE}$ :

$$\Sigma_E = \left\{ (q, p) : \frac{q^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Se utilizziamo la coordinata angolare  $\theta$  per parametrizzare il punto su  $\Sigma_E$ ,

$$\xi \in \Sigma_E \iff \xi = \xi(\theta) = (a \cos \theta, b \sin \theta),$$

l'elemento di superficie si scrive

$$d\sigma(\xi) = d\sigma(\theta) = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta$$

cosicché, essendo  $|\nabla H(q, p)| = 2E \sqrt{q^2/a^4 + p^2/b^4}$ , la misura microcanonica su  $\Sigma_E$  è

$$d\mu(\xi) = d\mu(\theta) = \frac{d\sigma(\theta)}{|\nabla H(\xi(\theta))|} = \frac{ab}{2E} d\theta = \frac{d\theta}{\omega},$$

dove  $\omega = \sqrt{k/m}$  è la pulsazione del moto armonico.

Il teorema del ritorno di Poincaré può portare a paradossi apparenti in meccanica statistica (*Paradosso di Zermelo*): se si apre un setto che divide una prima camera piena di gas da una seconda camera vuota, dopo un certo tempo il sistema ritorna in uno stato vicino a quello iniziale, ovvero con quasi tutto il gas nella prima camera. In realtà il tempo necessario per osservare questo fenomeno è enorme (si può stimare essere molto maggiore dell'età del sistema solare), per cui non vi è alcuna contraddizione con le leggi della termodinamica che descrivono fenomeni su scale di tempi molto più piccole.

Il punto cruciale risiede nel fatto che il numero di molecole (e quindi il numero di gradi di libertà del sistema) è estremamente elevato (dell'ordine del numero di Avogadro  $N \sim 10^{23}$ ). Per spiegare almeno euristicamente il meccanismo in atto, seguiamo il punto di vista di L. Boltzmann (tra i padri fondatori della meccanica statistica), ed introduciamo un'ipotesi fondamentale sulla dinamica, detta *ipotesi ergodica*: nella sua evoluzione temporale, il sistema spende in ogni regione  $W$  della superficie isoenergetica un tempo mediamente proporzionale alla misura  $\mu(W)$  della regione medesima. Se accettiamo tale ipotesi, possiamo stimare il tempo di ricorrenza in una regione  $W$  con l'inverso del rapporto tra la

misura  $\mu(W)$  di  $W$  e quella totale  $\mu(\Sigma_E)$ . Si osservi che tale rapporto rappresenta comunque una stima dall'alto del tempo di ritorno, come segue facilmente dalla dimostrazione del teorema di ricorrenza.

Nel caso del paradosso sopra descritto, rappresentiamo le camere dove sono racchiuse le particelle con i parallelepipedi

$$Q_- = \{(x, y, z) : -L \leq x \leq 0, |y| \leq L, |z| \leq L\},$$

$$Q_+ = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq L, |y| \leq L, |z| \leq L\},$$

e sia quindi  $Q = Q_- \cup Q_+ = [-L, L]^3$ . Consideriamo per semplicità il caso in cui sia trascurabile l'interazione tra le particelle. Assumiamo inoltre che il potenziale confinante le particelle nel cubo  $Q$  assuma valore nullo in  $Q$  tranne che al bordo dove è praticamente infinito (cioè la parete è rigida, impenetrabile). Sotto queste approssimazioni lo spazio accessibile al sistema è

$$\Sigma_E = \{(q, p) \in \mathbb{R}^{6N} : q \in Q^N, p^2 = 2mE\} = Q^N \times S_E,$$

dove  $S_E$  è la superficie sferica in  $\mathbb{R}^{3N}$  centrata nell'origine e di raggio  $\sqrt{2mE}$ . Poiché il gradiente di  $H(q, p) = p^2/(2m)$  è costante su  $S_E$ , la misura microcanonica è in questo caso proporzionale al prodotto del volume in  $Q^N$  per la misura di superficie in  $S_E$ . Valutiamo allora il volume della regione  $\Omega_k \subset \Sigma_E$  corrispondente a tutte le configurazioni in cui  $k$  particelle si trovano in  $Q_-$  e le rimanenti  $N - k$  in  $Q_+$ . Se indichiamo con  $q_i$  le coordinate delle particelle, poiché non distinguiamo quali particelle si trovano a sinistra e quali a destra, si ha:

$$\begin{aligned} |\Omega_k| &= |S_E| \binom{N}{k} \int_{Q_-} dq_1 \cdots \int_{Q_-} dq_k \int_{Q_+} dq_{k+1} \cdots \int_{Q_+} dq_N \\ &= |S_E| \frac{N!}{k!(N-k)!} \frac{(2L)^{3N}}{2^N}. \end{aligned}$$

D'altra parte il volume totale dello spazio delle fasi corrispondente alle particelle confinate in  $Q$  è  $|S_E|(2L)^{3N}$ , cosicché la frazione di volume è

$$R(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} \frac{1}{2^N}.$$

Se scegliamo  $k$  una frazione di  $N$ , diciamo  $k = \alpha N$  con  $\alpha \in [0, 1]$ , utilizzando la formula di Stirling  $n! \approx n^n e^{-n}$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log R(\alpha N) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \frac{N^N e^{-N}}{(\alpha N)^{\alpha N} ((1-\alpha)N)^{(1-\alpha)N} 2^N} \\ &= -\log 2 - \alpha \log \alpha - (1-\alpha) \log(1-\alpha). \end{aligned}$$

Quindi  $R(\alpha N) \approx e^{-NI(\alpha)}$  con la funzione  $I(\alpha) \doteq \log 2 + \alpha \log \alpha + (1-\alpha) \log(1-\alpha)$  positiva per ogni  $\alpha \neq 1/2$  e nulla in  $\alpha = 1/2$ . In particolare, essendo  $I(0) = I(1) = \log 2$ , lo stato iniziale in cui tutte le particelle sono in  $Q_-$  occupa una frazione dello spazio delle fasi dell'ordine di  $2^{-N}$ . Dunque il tempo di ricorrenza corrispondente per una mole di gas è dell'ordine di  $2^{10^{23}}$ !

In realtà il calcolo precedente ci dice qualcosa di più: solo una frazione di volume esponenzialmente piccolo in  $N$  di  $\Sigma_E$  corrisponde a regioni ove  $\alpha \neq 1/2$ .

Quindi, qualsiasi siano i dati iniziali, è ragionevole aspettarsi (sotto un minimo di proprietà di ergodicità della dinamica) che il sistema spenda quasi tutto il suo tempo in regioni ove  $\alpha = 1/2$ . Nella stessa maniera si può mostrare che è esponenzialmente piccolo in  $N$  il volume relativo delle configurazioni per cui in una qualunque sottoregione  $\tilde{Q}$  di  $Q$  il numero di particelle devia dal valore medio  $N|\tilde{Q}|/|Q|$ . Altrimenti detto, la possibilità che il sistema raggiunga configurazioni microscopiche a cui corrispondono disomogeneità macroscopiche di densità è estremamente rara; inoltre, quando anche questo avvenisse, il tempo di permanenza in tali stati sarebbe estremamente breve. In definitiva, tali fluttuazioni non sono di fatto osservabili, ed il sistema appare (macroscopicamente) in equilibrio termodinamico.

Come già accennato, la misura microcanonica appare nelle lezioni di Boltzmann sulla teoria cinetica dei gas (1871), dove egli formula l'ipotesi ergodica, secondo la quale ogni moto  $\Phi_H^t(x)$  su  $\Sigma_E$  visita tutti i punti di  $\Sigma_E$  con una frequenza statistica tale che

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\Phi_H^t(x)) = \frac{1}{Z} \int_{\Sigma_E} d\sigma(\xi) \frac{1}{|\nabla H(\xi)|} f(\xi), \quad (3.22)$$

dove

$$Z = \int_{\Sigma_E} d\sigma(\xi) \frac{1}{|\nabla H(\xi)|}$$

è una costante di normalizzazione, in modo tale che le medie temporali dell'osservabile  $f$  possano essere calcolate senza dover integrare le equazioni del moto. Si è dimostrato che tale ipotesi è in generale falsa se il numero di gradi di libertà è maggiore di uno. In particolare, se il sistema ammette altri integrali primi indipendenti oltre l'energia, è evidente che la relazione (3.22) non può essere soddisfatta per qualsiasi funzione integrabile  $f$ . Infatti ciascuna orbita non visita i punti che non giacciono sugli insiemi di livello degli ulteriori integrali primi. Possiamo però, analogamente a quanto fatto nel caso della misura microcanonica, costruire una misura invariante per il flusso ristretto all'intersezione delle superfici di livello di tutti gli integrali primi ed affrontare il problema dell'ergodicità per tale moto ristretto. Nella prossima sezione studiamo una classe particolare di sistemi in cui questo programma si porta a termine completamente. Sebbene possa sembrare un caso molto particolare, nel prossimo capitolo vedremo che una vasta classe di sistemi hamiltoniani, detti *completamente integrabili*, possono ricondursi a tale caso mediante un'opportuna trasformazione di coordinate nello spazio delle fasi.

### 3.6. Moto condizionatamente periodico

Consideriamo un sistema hamiltoniano  $\dot{x} = J\nabla H(x)$  tale che  $x = (\theta, I) \in \mathbb{T}^n \times U$ , con  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{T}^n$  il toro  $n$ -dimensionale, ovvero le variabili  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$  sono degli angoli:

$$\mathbb{T}^n \doteq \{\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \bmod 2\pi\} = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n.$$

Possiamo anche identificare  $\mathbb{T}^n$  con il prodotto cartesiano di  $n$  cerchi, ovvero con la superficie

$$S_1 \times \dots \times S_1 = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i| = 1 \ \forall i = 1, \dots, n\}$$

dello spazio euclideo complesso  $\mathbb{C}^n$ . Tale identificazione si ottiene mediante l'applicazione

$$(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \rightarrow (\theta_1, \dots, \theta_n) \bmod 2\pi.$$

Supponiamo ora che le variabili  $\theta$  siano tutte cicliche, ovvero che la funzione di Hamilton dipenda unicamente dalle variabili  $I$ , dunque  $H(x) = H(I)$ . Le variabili  $I$  sono dette *variabili di azione* e la coppia  $(\theta, I)$  *variabili azione-angolo*. Ovviamente il sistema di Hamilton è

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I}(I), \\ \dot{I} = 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

la cui soluzione di dati iniziali  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $I(0) = I_0$  è

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{\partial H}{\partial I}(I_0) t, \quad I(t) = I_0.$$

Quindi le variabili  $I_1, \dots, I_n$  sono integrali primi, mentre le variabili angolari evolvono linearmente. Come già accennato, mostreremo in seguito che una classe importante di sistemi hamiltoniani può ridursi alla forma (3.23).

La descrizione del moto si riduce allo studio della semplice equazione  $\dot{\theta} = \omega$  sul toro. Il flusso ad essa associato,

$$\varphi_\omega^t(\theta) = \theta + \omega t,$$

viene detto *moto condizionatamente periodico* (o *moto quasi periodico*). I numeri  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  sono detti *frequenze* del moto (più correttamente si dovrebbe indicare con il nome di frequenze le grandezze  $\nu_i = \omega_i / 2\pi$ ). Nel caso del sistema (3.23) il moto degli angoli su ciascun insieme di livello delle azioni  $I$  ha frequenze

$$\omega = \omega(I) = \frac{\partial H}{\partial I}(I),$$

dipendenti, in generale, dal livello considerato.

Il flusso  $\varphi_\omega^t$  conserva ovviamente i volumi in  $\mathbb{T}^n$  (la divergenza del campo costante  $\nu(\theta) = \omega$  è nulla), cosicché possiamo chiederci se esso possiede proprietà ergodiche rispetto a tale misura. Nel seguito indichiamo con  $\lambda$  la misura normalizzata in modo tale che il volume del toro  $\mathbb{T}^n$  sia uguale ad uno:

$$d\lambda(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n} d\theta = \frac{1}{(2\pi)^n} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n.$$

Se  $f$  è una funzione integrabile, indichiamo con  $\lambda(f)$  la sua media rispetto a  $\lambda$ ,

$$\lambda(f) \doteq \int_{\mathbb{T}^n} d\lambda(\theta) f(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} d\theta f(\theta).$$

Infine, se  $A$  è un insieme misurabile in  $\mathbb{T}^n$ , indichiamo con  $\mathbb{I}_A$  la funzione indicatrice di  $A$ ,

$$\mathbb{I}_A(\theta) \doteq \begin{cases} 1 & \text{se } \theta \in A, \\ 0 & \text{se } \theta \notin A, \end{cases}$$

cosicché  $\lambda(A) = \lambda(\mathbb{I}_A)$  è la misura dell'insieme  $A$ , ovvero la frazione di volume occupata da  $A$  rispetto al volume totale del toro:

$$\lambda(A) = \int_{\mathbb{T}^n} d\lambda(\theta) \mathbb{I}_A(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_A d\theta = \frac{\int_A d\theta}{\int_{\mathbb{T}^n} d\theta}.$$

Il risultato principale sul moto quasi periodico è il contenuto del seguente teorema, noto come *teorema della media*.

**TEOREMA 3.8.** *Supponiamo che le frequenze  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  siano razionalmente indipendenti, ovvero che*

$$\langle k, \omega \rangle \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n : k \neq 0. \quad (3.24)$$

(Altrimenti detto, la combinazione lineare  $k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n$  delle frequenze a coefficienti interi  $k_1, \dots, k_n$  è nulla se e solo se  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ ).

Allora, per ogni funzione  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile secondo Riemann e per ogni dato iniziale  $\theta \in \mathbb{T}^n$ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\varphi_\omega^t(\theta)) = \lambda(f). \quad (3.25)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo dapprima il risultato per i polinomi trigonometrici, ovvero per funzioni del tipo

$$P_N(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n : |k| \leq N} [a_k \cos \langle k, \theta \rangle + b_k \sin \langle k, \theta \rangle], \quad (3.26)$$

dove  $a_k, b_k$  sono coefficienti reali arbitrari. Consideriamo a tal scopo la funzione

$$e^{i \langle k, \theta \rangle} = \cos \langle k, \theta \rangle + i \sin \langle k, \theta \rangle.$$

Chiaramente

$$\int_{\mathbb{T}^n} d\lambda(\theta) e^{i \langle k, \theta \rangle} = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^n \int_0^{2\pi} d\theta_j e^{i k_j \theta_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, \\ 0 & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Quindi, separatamente per le parti reale ed immaginaria,

$$\int_{\mathbb{T}^n} d\lambda(\theta) \sin \langle k, \theta \rangle = 0, \quad \int_{\mathbb{T}^n} d\lambda(\theta) \cos \langle k, \theta \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, \\ 0 & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Essendo la media spaziale un'operazione lineare sulle funzioni, concludiamo che, se  $P_N$  è definito come in (3.26),

$$\lambda(P_N) = a_0. \quad (3.27)$$

Sappiamo ora per ipotesi che se  $k \neq 0$  allora  $\langle k, \omega \rangle \neq 0$ . Quindi, per ogni  $\theta \in \mathbb{T}^n$  e  $k \neq 0$ ,

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i \langle k, \varphi_\omega^t(\theta) \rangle} = \frac{e^{i \langle k, \theta \rangle}}{T} \int_0^T dt e^{i \langle k, \omega \rangle t} = \frac{e^{i \langle k, \theta \rangle}}{i \langle k, \omega \rangle} \frac{e^{i \langle k, \omega \rangle T} - 1}{T}.$$

Poiché  $|e^{i\langle k, \omega \rangle T} - 1| \leq 2$ , ne segue che

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i\langle k, \varphi_\omega^t(\theta) \rangle} = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^n \quad \forall k \neq 0.$$

Questo significa che, separatamente le parti reale ed immaginaria della media temporale sono nulle:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \cos \langle k, \varphi_\omega^t(\theta) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \sin \langle k, \varphi_\omega^t(\theta) \rangle = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^n \quad \forall k \neq 0.$$

Analogamente a sopra, per la linearità della media temporale, concludiamo che se  $P_N$  è definito come in (3.26),

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt P_N(\varphi_\omega^t(\theta)) = a_0. \quad (3.28)$$

Dalle (3.27), (3.28), vista l'arbitrarietà nella scelta di  $P_N$  (ed  $N$ ), concludiamo che il limite (3.25) è dimostrata per l'insieme dei polinomi trigonometrici.

Per estendere il risultato all'insieme delle funzioni continue sul toro, utilizziamo un teorema classico dell'analisi, il *teorema di Stone-Weierstrass*, di cui non daremo la dimostrazione. Nel presente contesto esso stabilisce che l'insieme dei polinomi trigonometrici è denso nello spazio lineare  $C(\mathbb{T}^n)$  delle funzioni reali continue sul toro, dotato della struttura di spazio di Banach rispetto alla norma uniforme:

$$\|f\|_\infty \doteq \sup_{\theta \in \mathbb{T}^n} |f(\theta)|, \quad f \in C(\mathbb{T}^n).$$

Questo significa che, fissata una qualsiasi funzione  $f \in C(\mathbb{T}^n)$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un polinomio  $P_N$  (per un qualche  $N$ ) tale che  $\|f - P_N\|_\infty < \varepsilon$ .

Dimostriamo dunque il limite (3.25) per una funzione  $f \in C(\mathbb{T}^n)$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste un polinomio trigonometrico  $P_N$  tale che  $\|f - P_N\|_\infty < \varepsilon/3$ . Stimiamo allora:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\varphi_\omega^t(\theta)) - \lambda(f) \right| &\leq \frac{1}{T} \int_0^T dt |f(\varphi_\omega^t(\theta)) - P_N(\varphi_\omega^t(\theta))| \\ &\quad + \left| \frac{1}{T} \int_0^T dt P_N(\varphi_\omega^t(\theta)) - \lambda(P_N) \right| + |\lambda(P_N) - \lambda(f)|. \end{aligned}$$

Ovviamente, per ogni  $\theta \in \mathbb{T}^n$  e  $T > 0$ ,

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt |f(\varphi_\omega^t(\theta)) - P_N(\varphi_\omega^t(\theta))| \leq \|f - P_N\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3},$$

e, analogamente,

$$|\lambda(P_N) - \lambda(f)| \leq \int_{\mathbb{T}^n} d\lambda(\theta) |f(\theta) - P_N(\theta)| \leq \|f - P_N\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'altra parte, avendo dimostrato la (3.25) per i polinomi trigonometrici, sappiamo esistere  $T_\varepsilon > 0$  tale che

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T dt P_N(\varphi_\omega^t(\theta)) - \lambda(P_N) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall T > T_\varepsilon.$$

Quindi, in definitiva,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\varphi_\omega^t(\theta)) - \lambda(f) \right| < \varepsilon \quad \forall T > T_\varepsilon,$$

che, vista l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , dimostra il limite (3.25) per  $f$  continua.

Consideriamo infine il caso in cui  $f$  è integrabile secondo Riemann. È noto che in tal caso  $f$  è approssimabile con funzioni continue nel seguente senso. Per ogni fissato  $\varepsilon > 0$ , esistono due funzioni continue  $f_1$  ed  $f_2$  tali che

$$f_1 < f < f_2, \quad \lambda(f_2 - f_1) < \varepsilon.$$

Possiamo allora stimare, per ogni  $T > 0$  e  $\theta \in \mathbb{T}^n$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T dt f_1(\varphi_\omega^t(\theta)) - \lambda(f_2) &\leq \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\varphi_\omega^t(\theta)) - \lambda(f) \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T dt f_2(\varphi_\omega^t(\theta)) - \lambda(f_1). \end{aligned}$$

Applicando la (3.25) alle funzioni continue  $f_1$  ed  $f_2$ , nel limite  $T \rightarrow \infty$  troviamo

$$\begin{aligned} -\lambda(f_2 - f_1) &\leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\varphi_\omega^t(\theta)) - \lambda(f) \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\varphi_\omega^t(\theta)) - \lambda(f) \\ &\leq \lambda(f_2 - f_1), \end{aligned}$$

da cui

$$\lambda(f) - \varepsilon < \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\varphi_\omega^t(\theta)) \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\varphi_\omega^t(\theta)) < \lambda(f) + \varepsilon$$

che, vista l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , dimostra la (3.25) per  $f$  integrabile secondo Riemann.  $\square$

**OSSERVAZIONE 3.6.** È evidente che il teorema della media si può enunciare in modo simmetrico rispetto all'evoluzione nel futuro e nel passato, ovvero:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt f(\varphi_\omega^t(\theta)) = \lambda(f). \quad (3.29)$$

Per dimostrare la (3.29) è infatti sufficiente osservare che

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt f(\varphi_\omega^t(\theta)) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\varphi_\omega^t(\theta)) + \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\varphi_{-\omega}^t(\theta)) \right]$$

ed applicare separatamente la (3.25) ai flussi  $\varphi_{\pm\omega}^t$ .

**COROLLARIO 3.9.** *Se le frequenze sono razionalmente indipendenti ogni traiettoria del flusso  $\varphi_\omega^t$  è uniformemente distribuita sul toro  $\mathbb{T}^n$ .*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un insieme  $A \subset \mathbb{T}^n$  che sia misurabile secondo Jordan. Indichiamo con  $\tau_A(\theta, T)$  il tempo che la traiettoria  $\varphi_\omega^t(\theta)$  spende in  $A$  nel tempo  $[0, T]$ . Per definizione si ha

$$\tau_A(\theta, T) = \int_0^T dt \mathbb{1}_A(\varphi_\omega^t(\theta)),$$

da cui, per il teorema della media,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_A(\theta, T)}{T} = \lambda(A).$$

Quindi il tempo medio di soggiorno nell'insieme  $A$  della traiettoria  $\varphi_\omega^t(\theta)$  è pari alla misura  $\lambda(A)$  di  $A$ , il che dimostra l'asserto.  $\square$

COROLLARIO 3.10. *Se le frequenze sono razionalmente indipendenti ogni orbita del flusso  $\varphi_\omega^t$  è densa nel toro  $\mathbb{T}^n$ .*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che l'orbita  $\gamma(\theta) = \{\varphi_\omega^t(\theta) : t \in \mathbb{R}\}$  non sia densa. Quindi esistono  $\theta_1 \in \mathbb{T}^n$  ed  $\varepsilon > 0$  tali che  $|\varphi_\omega^t(\theta) - \theta_1| > \varepsilon$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Indicando con  $B$  la palla di raggio  $\varepsilon/2$  e centro  $\theta_1$ , si ha ovviamente  $\tau_B(\theta, T) = 0$  per ogni  $T > 0$ , cosicché è nullo il tempo medio di soggiorno:  $\lim_{T \rightarrow \infty} \tau_B(\theta, T)/T = 0$ . D'altra parte  $\lambda(B) > 0$ , in contraddizione con il corollario precedente.  $\square$

Consideriamo ora il caso in cui le frequenze non sono razionalmente indipendenti. Esistono allora vettori non nulli  $k \in \mathbb{Z}^n$  tali che  $\langle k, \omega \rangle = 0$ . La relazione  $\langle k, \omega \rangle = 0$  è detta *relazione di risonanza* per  $\omega$  ed il corrispondente vettore  $k$  è detto *vettore risonante* per  $\omega$ . In questo caso le orbite non possono essere distribuite uniformemente sul toro, anzi nemmeno densamente. Esistono infatti integrali primi del moto non costanti su  $\mathbb{T}^n$ , precisamente ogni funzione  $F: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$  della forma  $F(\theta) = f(\langle k, \theta \rangle)$  con  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $k \in \mathbb{Z}^n$  risonante con  $\omega$ . In effetti, essendo in tal caso  $\langle k, \omega \rangle = 0$ ,

$$F(\varphi_\omega^t(\theta)) = f(\langle k, \theta + \omega t \rangle) = f(\langle k, \theta \rangle + \langle k, \omega \rangle t) = f(\langle k, \theta \rangle) = F(\theta).$$

Studiamo più in dettaglio il caso del toro bidimensionale. Se le frequenze sono razionalmente dipendenti, esistono due interi  $k_1, k_2$  non entrambi nulli tali che  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$ . Senza perdita di generalità assumiamo che  $k_2 \neq 0$ , cosicché  $\omega_2 = -k_1\omega_1/k_2$ . Vi sono ora due possibilità. Se  $\omega_1 = 0$  allora necessariamente  $\omega_2 = 0$  e quindi ogni punto sul toro è una posizione di equilibrio. Se invece  $\omega_1 \neq 0$ , sia  $\tau = 2\pi k_2/\omega_1$ . Allora, per ogni  $\theta \in \mathbb{T}^2$  e  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_\omega^{t+\tau}(\theta) &= \varphi_\omega^t(\theta) + \omega\tau = \varphi_\omega^t(\theta) + \frac{2\pi k_2}{\omega_1} \left( \omega_1, -\frac{k_1\omega_1}{k_2} \right) \\ &= \varphi_\omega^t(\theta) + 2\pi(k_2, -k_1) \\ &= \varphi_\omega^t(\theta) \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

ovvero ogni orbita è chiusa e corrisponde ad un moto periodico sul toro.

Nel caso generale del toro  $\mathbb{T}^n$  con  $n > 2$  la situazione è la seguente. L'insieme dei vettori risonanti per  $\omega$ , detto *reticolo risonante*, che indichiamo con  $\mathcal{R}_\omega$ , forma un sottogruppo di  $\mathbb{Z}^n$ . Essendo un sottogruppo discreto di  $\mathbb{R}^n$ , esso ammette  $r$  vettori linearmente indipendenti (per qualche  $r \leq n$ ), tali che  $\mathcal{R}_\omega$  è costituito dall'insieme di tutte le combinazioni lineari a coefficienti interi di tali vettori. Si dice in tal caso che  $\omega$  possiede  $r$  risonanze indipendenti, ed il numero  $r$  è detto *molteplicità della risonanza*. Sussiste allora il seguente risultato, di cui non diamo la dimostrazione.

**TEOREMA 3.11.** *Se le frequenze  $\omega$  possiedono  $r$  vettori risonanti indipendenti, la chiusura delle traiettorie del flusso  $\varphi_\omega^t$  su  $\mathbb{T}^n$  è una superficie di dimensione  $(n - r)$ , diffeomorfa al toro  $\mathbb{T}^{n-r}$ .*

L'idea della prova consiste nel costruire una matrice intera  $D$  (quindi  $D_{i,j} \in \mathbb{Z}$ ) con  $\det D = 1$ , tale che

$$\bar{\omega} \doteq D\omega = (0, \dots, 0, \bar{\omega}_{r+1}, \dots, \bar{\omega}_n) \text{ con } (\bar{\omega}_{r+1}, \dots, \bar{\omega}_n) \text{ razionalmente indipendenti.}$$

La matrice  $D$  definisce allora un diffeomorfismo sul toro. Infatti sia  $D$  che  $D^{-1}$  sono matrici intere, per cui se  $x, y \in \mathbb{R}^n$  sono tali che  $x = y \pmod{2\pi}$  (ovvero definiscono lo stesso punto del toro  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z}^n)$ ), allora si ha anche  $Dx = Dy \pmod{2\pi}$ ,  $D^{-1}x = D^{-1}y \pmod{2\pi}$ .

Ora, nelle coordinate  $\bar{\theta} = D\theta$ , il moto  $\bar{\theta}(t) = \bar{\theta}(0) + \bar{\omega}t$  si svolge sulla superficie  $\{\bar{\theta} \in \mathbb{T}^n : \bar{\theta}_i = \bar{\theta}_i(0) \ \forall i = 1, \dots, r\}$ , isomorfa al toro  $\mathbb{T}^{n-r}$ , con distribuzione uniforme per il teorema della media ivi applicato alle frequenze  $(\bar{\omega}_{r+1}, \dots, \bar{\omega}_n)$ . Il toro  $\mathbb{T}^n$  risulta quindi "foliato" in superfici invarianti (i tori  $\mathbb{T}^{n-r}$  ottenuti variando i dati iniziali  $\bar{\theta}_1(0), \dots, \bar{\theta}_r(0)$ ), dove il moto è ergodico.

**OSSERVAZIONE 3.7.** Il teorema della media vale anche nel caso delle traslazioni sul toro. Precisamente, assegnato  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{T}^n$ , consideriamo la mappa

$$g_\alpha : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n \quad : \quad g(\theta) = \theta + \alpha \pmod{2\pi}.$$

Supponiamo che i numeri  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 2\pi)$  siano razionalmente indipendenti, ovvero che

$$\langle k, \alpha \rangle \neq 2\pi q \quad \forall (k, q) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z} : k \neq 0. \quad (3.30)$$

Allora, per ogni funzione  $f$  integrabile secondo Riemann e per ogni  $\theta \in \mathbb{T}^n$ , si ha:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{s=0}^N f(g_\alpha^s(\theta)) = \lambda(f). \quad (3.31)$$

Osserviamo infatti che, per l'ipotesi di indipendenza,  $e^{i\langle k, \alpha \rangle} \neq 1$  per ogni vettore non nullo  $k \in \mathbb{Z}^n$ . Allora, se  $k \neq 0$ ,

$$\frac{1}{N} \sum_{s=0}^N e^{i\langle k, g_\alpha^s(\theta) \rangle} = \frac{e^{i\langle k, \theta \rangle}}{N} \sum_{s=0}^N e^{i\langle k, \alpha \rangle s} = \frac{e^{i\langle k, \theta \rangle}}{N} \frac{1 - e^{i\langle k, \alpha \rangle(N+1)}}{1 - e^{i\langle k, \alpha \rangle}},$$

da cui

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{s=0}^N e^{i\langle k, g_\alpha^s(\theta) \rangle} = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^n \ \forall k \neq 0.$$

Ne segue la validità del limite (3.31) per i polinomi trigonometrici, da cui, ragionando per approssimazioni come nella dimostrazione del Teorema 3.8, si ottiene il risultato per ogni  $f$  integrabile.

ESEMPIO 3.11. Il seguente problema, che si trova proposto in vari libri di Arnold, è un esempio di una applicazione del teorema della media in un contesto non hamiltoniano. Consideriamo la successione dei numeri  $2^n$ ,

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots$$

e costruiamo quella delle prime cifre di tali numeri,

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, \dots$$

Ci chiediamo quali sono le cifre che appaiono più frequentemente. In effetti possiamo fornire una risposta molto precisa. Indicando con  $\tau(k, N)$ ,  $k = 1, \dots, 9$ , il numero di volte che la cifra  $k$  appare nei primi  $N$  termini, dimostriamo che esiste il limite

$$p_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tau(k, N)}{N} = \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{k} \right).$$

Osserviamo a tal scopo che un intero  $n$  per il quale il numero  $2^n$  ha come prima cifra  $k$  deve soddisfare la condizione

$$\exists r \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad k 10^r \leq 2^n < (k+1) 10^r,$$

ovvero

$$\exists r \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad 2\pi \log_{10} k + 2\pi r \leq n 2\pi \log_{10} 2 < 2\pi \log_{10} (k+1) + 2\pi r,$$

che, posto  $\theta_k = 2\pi \log_{10} k$ , possiamo riscrivere nella forma

$$n 2\pi \log_{10} 2 \in [\theta_k, \theta_{k+1}) \pmod{2\pi}.$$

In altri termini, considerata la traslazione  $g_\alpha : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$  con  $\alpha = 2\pi \log_{10} 2$ , deve aversi  $g_\alpha^n(0) \in [\theta_k, \theta_{k+1})$ . Quindi  $\tau(k, N)$  è il numero di volte che la traiettoria  $g_\alpha^j(0) = \alpha j$  visita l'intervallo  $[\theta_k, \theta_{k+1})$  nei primi  $N$  passi. Dall'equazione (3.31) applicata alla funzione indicatrice dell'intervallo  $[\theta_k, \theta_{k+1})$  segue allora che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tau(k, N)}{N} = \lambda([\theta_k, \theta_{k+1})) = \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{2\pi} = \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{k} \right).$$

### 3.7. Nota bibliografica

Per gli argomenti trattati in questo capitolo si può fare riferimento al seguente testo.

- 1) V.I. Arnold. *Metodi matematici della meccanica classica*. Roma: Editori Riuniti, 1979.

## Trasformazioni canoniche ed integrabilità

### 4.1. Trasformazioni simplettiche

Consideriamo un cambiamento di coordinate nello spazio delle fasi. Indichiamo con  $x$  le vecchie coordinate, definite in un dominio  $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  e con  $y$  le nuove, definite in un dominio  $W \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ . Sia quindi  $\psi : W \rightarrow U$  la legge di trasformazione che fornisce le vecchie coordinate in funzione delle nuove,  $x = \psi(y)$ . La struttura delle equazioni di Hamilton non è intrinseca, ovvero esse non sono invarianti in forma rispetto ad una qualsiasi trasformazione  $\psi$ . Si pone quindi il problema di caratterizzare le trasformazioni con tale proprietà. In altri termini, se  $\Phi_H^{t,t_0}$  è il gruppo a due parametri associato al campo  $J\nabla_x H(x, t)$ , quali sono le trasformazioni di coordinate  $\psi$  per le quali  $\psi^{-1} \circ \Phi_H^{t,t_0} \circ \psi$  è ancora una dinamica hamiltoniana in  $W$ ? Più in particolare, cerchiamo le trasformazioni  $\psi$  tali che  $\psi^{-1} \circ \Phi_H^{t,t_0} \circ \psi = \Phi_{\tilde{H}}^{t,t_0}$  con  $\tilde{H}(y, t) = H(\psi(y), t)$ , ovvero la nuova hamiltoniana  $\tilde{H}$  coincide con la vecchia hamiltoniana espressa nelle nuove coordinate.

**DEFINIZIONE 4.1.** *La trasformazione  $\psi : W \rightarrow U$  è detta “simplettica” o “strettamente canonica” se per ogni funzione di Hamilton  $H : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le equazioni  $\dot{x} = J\nabla_x H(x, t)$ ,  $x \in U$ , sono equivalenti alle equazioni  $\dot{y} = J\nabla_y \tilde{H}(y, t)$ ,  $y \in W$ , dove  $\tilde{H}(y, t) = H(\psi(y), t)$ , ovvero  $\Phi_H^{t,t_0} \circ \psi = \psi \circ \Phi_{\tilde{H}}^{t,t_0}$ .*

Più in generale, una trasformazione  $\psi$  viene detta *canonica* se per ogni hamiltoniana  $H$  si ha  $\Phi_H^{t,t_0} \circ \psi = \psi \circ \Phi_K^{t,t_0}$  con  $K$  non necessariamente uguale ad  $\tilde{H} = H \circ \psi$ . Un risultato notevole, di cui non daremo la dimostrazione, è che per ogni trasformazione canonica  $\psi$  esiste un numero reale  $c$ , detto *valenza* di  $\psi$  e dipendente unicamente da  $\psi$ , tale che  $K = c\tilde{H}$  per ogni hamiltoniana  $H$ . Le trasformazioni simplettiche rappresentano quindi la sottoclasse delle trasformazioni canoniche di valenza  $c = 1$  (per tale motivo esse sono anche dette trasformazioni *univalenti*). Il risultato sopra citato mostra che considerare unicamente queste ultime non muta in modo profondo la nozione di trasformazione canonica. In particolare, si osservi che se  $H$  non dipende esplicitamente dal tempo, la sua moltiplicazione per un fattore costante  $c$  si compensa con un semplice riscaldamento dei tempi:  $\Phi_{cH}^t = \Phi_H^{ct}$ .

Cerchiamo ora una prima condizione equivalente di simpletticità. Ricordando la legge di trasformazione dei campi vettoriali, perché  $\psi$  sia simplettica è necessario e sufficiente che

$$D\psi(y)J\nabla_y \tilde{H}(y, t) = J\nabla_x H(\psi(y), t) \quad \forall H \quad \forall y \in W,$$

dove  $\nabla_x H(\psi(y), t)$  significa che il gradiente  $\nabla_x H(x, t)$  è calcolato in  $x = \psi(y)$ . Poiché  $\tilde{H}(y, t) = H(\psi(y), t)$  si ha

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y_i}(y, t) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial H}{\partial x_k}(\psi(y), t) \frac{\partial \psi_k}{\partial y_i}(y) = [D\psi(y)^T \nabla_x H(\psi(y), t)]_i,$$

per cui occorre richiedere

$$D\psi(y)JD\psi(y)^T \nabla_x H(\psi(y), t) = J \nabla_x H(\psi(y), t) \quad \forall H \quad \forall y \in W.$$

Vista l'arbitrarietà di  $H$  concludiamo che *condizione necessaria e sufficiente perché la trasformazione  $\psi$  sia simplettica è che si abbia*

$$D\psi(y)JD\psi(y)^T = J \quad \forall y \in W. \quad (4.1)$$

Osserviamo che la (4.1) è una condizione algebrica che deve essere soddisfatta dalla matrice jacobiana della trasformazione  $\psi$ . In generale, diciamo che  $A$ , matrice di ordine  $2n$ , è *simplettica* se  $AJA^T = J$ . Chiaramente, essendo  $\det J = 1$ , se  $A$  è simplettica allora  $(\det A)^2 = 1$  e quindi  $A$  è non singolare. Inoltre anche  $A^{-1}$  è simplettica essendo  $A^{-1}JA^{-T} = A^{-1}AJA^T A^{-T} = J$ . Analogamente si dimostra che il prodotto di matrici simplettiche è una matrice simplettica, cosicché l'insieme  $\text{Sp}(2n)$  delle matrici simplettiche forma un sottogruppo del gruppo  $GL(2n)$  delle matrici  $2n \times 2n$  non singolari. Osserviamo infine che, essendo  $J^2 = -\mathbb{I}$  e  $J^T = -J = J^{-1}$ , invertendo la relazione  $A^{-1}JA^{-T} = J$  otteniamo  $A^TJA = J$ . Dunque anche la trasposta di una matrice simplettica è simplettica. In particolare, la condizione di simpletticità per la matrice  $A$  può equivalentemente scriversi nella forma  $A^TJA = J$ .

Dunque condizione necessaria e sufficiente perché la trasformazione  $\psi$  sia simplettica è che  $D\psi(y)$  sia una matrice simplettica per ogni  $y \in W$ . Un'indagine più accurata mostra che in realtà  $\det A = 1$  per ogni  $A \in \text{Sp}(2n)$ . In particolare le trasformazioni simplettiche conservano il volume e l'orientamento dello spazio delle fasi.

Se  $n = 1$  si verifica immediatamente che

$$AJA^T = \begin{pmatrix} 0 & \det A \\ -\det A & 0 \end{pmatrix},$$

cosicché la condizione di simpletticità è in tal caso equivalente a richiedere che  $\det A = 1$ . Ne segue che nello spazio delle fasi  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ , la conservazione dell'area e dell'orientamento è condizione necessaria e sufficiente perché una trasformazione sia simplettica.

Cambiamo ora punto di vista e vediamo cosa significa la condizione di simpletticità in termini di parentesi di Poisson. Nel seguito indichiamo con  $x = (q, p)$  le coordinate nello spazio delle fasi  $U$  e scriviamo  $y = (Q, P)$  per le nuove coordinate in  $W$ . Per non appesantire la notazione non introduciamo nuove lettere per indicare la dipendenza delle  $(q, p)$  dalle  $(Q, P)$  (e viceversa), scrivendo

semplicemente:

$$(q, p) = \psi(Q, P) \iff \begin{cases} q = q(Q, P) \\ p = p(Q, P) \end{cases} \quad (Q, P) = \psi^{-1}(q, p) \iff \begin{cases} Q = Q(q, p) \\ P = P(q, p) \end{cases}$$

Per ogni  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  sia  $\tilde{F} = F \circ \psi$  la sua espressione nelle nuove coordinate, dunque  $\tilde{F}(y) = \tilde{F}(Q, P) = F(\psi(y)) = F(q(Q, P), p(Q, P))$ .

Assegnate due funzioni  $F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$  ed una trasformazione  $\psi$ , rimangono definite le parentesi di Poisson

$$\{F, G\} = \{F, G\}_{q,p} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right],$$

e le corrispondenti nelle nuove coordinate

$$\{\tilde{F}, \tilde{G}\} = \{\tilde{F}, \tilde{G}\}_{Q,P} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q_i} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial P_i} - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P_i} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial Q_i} \right],$$

(utilizzeremo talvolta la notazione  $\{\cdot, \cdot\}_{q,p}$  per mettere in evidenza il sistema di coordinate rispetto al quale si calcolano le derivate).

Mostriamo ora che *condizione necessaria e sufficiente perché la trasformazione  $\psi$  sia simplettica è che le parentesi di Poisson siano conservate:*

$$\{\tilde{F}, \tilde{G}\} = \{F, G\} \circ \psi \quad \forall F, G, \quad (4.2)$$

ovvero  $\{\tilde{F}, \tilde{G}\}(Q, P) = \{F, G\}(\psi(Q, P))$ .

Per dimostrare tale affermazione osserviamo che

$$\begin{aligned} \{\tilde{F}, \tilde{G}\}(y) &= L_{J\nabla_y \tilde{G}} \tilde{F}(y) = \langle \nabla_y \tilde{F}(y), J\nabla_y \tilde{G}(y) \rangle \\ &= \langle D\psi(y)^T \nabla_x F(\psi(y)), JD\psi(y)^T \nabla_x G(\psi(y)) \rangle \\ &= \langle \nabla_x F(\psi(y)), D\psi(y) JD\psi(y)^T \nabla_x G(\psi(y)) \rangle. \end{aligned}$$

D'altra parte  $\{F, G\} \circ \psi(y) = \langle \nabla_x F(\psi(y)), J\nabla_x G(\psi(y)) \rangle$ , cosicché, vista l'arbitrarietà nella scelta delle funzioni  $F, G$ , l'identità (4.2) è equivalente alla (4.1).

In particolare sono conservate le *parentesi di Poisson fondamentali*, ovvero le relazioni

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{i,j} \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

La validità di tali relazioni è evidente qualora le parentesi di Poisson siano calcolate rispetto alle coordinate  $(q, p)$  medesime, ovvero se  $\{\cdot, \cdot\} = \{\cdot, \cdot\}_{q,p}$ . La simpletticità della trasformazione  $(q, p) = (q(Q, P), p(Q, P))$  implica invece che tali relazioni sussistono anche se  $\{\cdot, \cdot\} = \{\cdot, \cdot\}_{Q,P}$  (ovvero calcolando  $\{q_i, q_j\}$ ,  $\{p_i, p_j\}$ ,  $\{q_i, p_j\}$  con  $q_i = q_i(Q, P)$ ,  $p_i = p_i(Q, P)$ ).

In effetti la conservazione delle parentesi di Poisson fondamentali è condizione anche sufficiente per la simpletticità di una trasformazione. Osserviamo a tal scopo che, per ogni  $F, G$  ed ogni trasformazione di coordinate  $\psi(Q, P) = (q, p)$

si ha:

$$\begin{aligned} \{\tilde{F}, \tilde{G}\}(Q, P) &= \sum_{i,j=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right]_{\psi(Q,P)} \{q_i, q_j\}_{Q,P} + \left[ \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_j} \right]_{\psi(Q,P)} \{q_i, p_j\}_{Q,P} \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right]_{\psi(Q,P)} \{p_i, q_j\}_{Q,P} + \left[ \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial p_j} \right]_{\psi(Q,P)} \{p_i, p_j\}_{Q,P}. \end{aligned}$$

Ne segue che se la trasformazione  $\psi$  conserva le parentesi di Poisson fondamentali allora  $\{\tilde{F}, \tilde{G}\}(Q, P) = \{F, G\}(\psi(Q, P))$  per ogni  $F, G$ , dunque  $\psi$  è simplettica. Equivalentemente, essendo

$$D\psi(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix},$$

sviluppando la condizione di simpletticità (4.1) si verifica che essa equivale alle condizioni (4.3).

Vediamo ora alcuni esempi.

**ESEMPIO 4.1.** Consideriamo una trasformazione affine  $\psi(y) = \Lambda y + a$  con  $a \in \mathbb{R}^{2n}$  e  $\Lambda$  matrice di ordine  $2n$  che assumiamo a blocchi di ordine  $n$  della forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & A^{-T} \end{pmatrix}.$$

Essendo  $D\psi(y) = \Lambda$ , la condizione di simpletticità diventa

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & A^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & CA^{-1} - A^{-T}C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che  $\psi$  è simplettica se la matrice  $CA^{-1}$  è simmetrica (ad esempio se  $C = 0$ ).

Un caso particolare delle precedenti trasformazioni è dato dal *riscaldamento* delle variabili  $q_i = \lambda_i Q_i$ ,  $p_i = \lambda_i^{-1} P_i$  con  $\lambda_i \neq 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

**ESEMPIO 4.2.** Vogliamo estendere le trasformazioni di coordinate puntuali  $q = f(Q)$  (nello spazio delle configurazioni) a trasformazioni simplettiche nello spazio delle fasi. Una possibile estensione canonica si ottiene ponendo  $p = Df(Q)^{-T}P$ . Dunque  $\psi(Q, P) = (f(Q), Df(Q)^{-T}P)$ , da cui

$$D\psi(Q, P) = \begin{pmatrix} Df(Q) & 0 \\ \partial_Q[Df(Q)^{-T}P] & Df(Q)^{-T} \end{pmatrix}.$$

Dall'Esempio 4.1 la simpletticità di  $\psi$  rimane verificata se dimostriamo che la matrice  $\partial_Q[Df(Q)^{-T}P]Df(Q)^{-1}$  è simmetrica. A tal scopo osserviamo che

$$\begin{aligned} (\partial_Q[Df(Q)^{-T}P])_{i,j} &= \frac{\partial}{\partial Q_j}[Df^{-1}(f(Q))^T P]_i = \frac{\partial}{\partial Q_j} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k^{-1}}{\partial q_i}(f(Q))P_k \\ &= \sum_{k,h=1}^n \frac{\partial^2 f_k^{-1}}{\partial q_i \partial q_h}(f(Q))P_k \frac{\partial f_h}{\partial Q_j}(Q) \\ &= \left( D_{qq} \langle f^{-1}(q), P \rangle \Big|_{q=f(Q)} Df(Q) \right)_{i,j}, \end{aligned}$$

dove  $D_{qq} \langle f^{-1}(q), P \rangle$  è la matrice hessiana della funzione  $\langle f^{-1}(q), P \rangle$ . Ne segue che  $\partial_Q[Df(Q)^{-T}P]Df(Q)^{-1} = D_{qq} \langle f^{-1}(q), P \rangle \Big|_{q=f(Q)}$ , matrice simmetrica.

Questa estensione canonica delle trasformazioni puntuali è coerente con la definizione dei momenti cinetici in meccanica lagrangiana. Infatti, per la proprietà di invarianza in forma delle equazioni di Lagrange, le equazioni del moto corrispondenti ad una lagrangiana  $L(q, \dot{q})$  scritte nelle nuove variabili  $Q = f^{-1}(q)$  sono le equazioni di Lagrange corrispondenti alla lagrangiana  $\tilde{L}(Q, \dot{Q}) = L(f(Q), Df(Q)\dot{Q})$ . Dunque i corrispondenti momenti cinetici sono legati dalla relazione

$$P = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}}(Q, \dot{Q}) = Df(Q)^T \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(f(Q), Df(Q)\dot{Q}) = Df(Q)^T p$$

ovvero  $p = Df(Q)^{-T}P$ .

D'altra parte questo non è l'unico possibile completamento. Si può ad esempio verificare che la trasformazione

$$\begin{cases} q = f(Q) \\ p = Df(Q)^{-T} [P + v(Q)] \end{cases} \quad \text{con } v(Q) \text{ tale che } \frac{\partial v_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial v_j}{\partial Q_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

è simplettica.

**ESEMPIO 4.3.** Un esempio di trasformazione canonica che sicuramente non estende alcuna trasformazione puntuale è  $\psi(Q, P) = (P, -Q)$ , che è simplettica poiché  $D\psi(Q, P) = J$  e  $J$  è simplettica ( $JJ^T = -J^3 = J$ ).

**ESEMPIO 4.4.** Fissato  $\omega > 0$  consideriamo la trasformazione  $(q, p) = \psi(\theta, I)$  tale che

$$\psi : S^1 \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad : \quad \begin{cases} q = \sqrt{2I/\omega} \cos \theta \\ p = -\sqrt{2\omega I} \sin \theta \end{cases}$$

Per verificarne la simpletticità calcoliamo le parentesi di Poisson fondamentali. Dobbiamo verificare che

$$\{q, q\}_{\theta, I} = 0, \quad \{p, p\}_{\theta, I} = 0, \quad \{q, p\}_{\theta, I} = 1.$$

Le prime due sono ovvie per l'antisimmetria delle parentesi di Poisson. Infine

$$\begin{aligned}\{q, p\}_{\theta, I} &= \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial p}{\partial I} - \frac{\partial q}{\partial I} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \theta \sqrt{\frac{\omega}{2I}} \sin \theta \\ &+ \sqrt{\frac{1}{2I\omega}} \cos \theta \sqrt{2\omega I} \cos \theta = 1.\end{aligned}$$

Le variabili  $(\theta, I)$  sono dette *variabili angolo-azione* per l'oscillatore armonico di frequenza  $\omega$ . In effetti, se

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

riscalando canonicamente  $(q, p) = (Q/\sqrt{m}, \sqrt{m}P)$  si ottiene

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{P^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} Q^2,$$

da cui, ponendo  $(Q, P) = (\sqrt{2I/\omega} \cos \theta, -\sqrt{2\omega I} \sin \theta)$ , si ottiene infine l'hamiltoniana

$$\tilde{\tilde{H}}(\theta, I) = \omega I$$

cui è associata l'evoluzione

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{I} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + \omega t \\ I(t) = I_0 \end{cases}$$

La variabile di azione  $I$  ha un significato geometrico preciso. Osserviamo infatti che, detta  $A(E)$  l'area della regione limitata del piano delle fasi  $(q, p)$  racchiusa dall'ellisse di equazione  $H(q, p) = E$ , si ha  $A(E) = 2\pi E/\omega$ , cosicché  $I = E/\omega = A(E)/2\pi$  (vedi più avanti l'Esempio 4.6).

**ESEMPIO 4.5.** Consideriamo ora un sistema di  $n$  oscillatori armonici accoppiati, ovvero una sistema lagrangiano di lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A\dot{q} \rangle - \frac{1}{2} \langle q, Bq \rangle,$$

con  $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$  ed  $A, B$  matrici simmetriche definite positive. I momenti cinetici associati sono  $p = A\dot{q}$  da cui ricaviamo l'hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \langle p, A^{-1}p \rangle + \frac{1}{2} \langle q, Bq \rangle.$$

Come noto la coppia di forme quadratiche può essere posta in forma diagonale simultaneamente. Brevemente: sia  $U$  la matrice ortogonale che diagonalizza la matrice simmetrica  $\Lambda = A^{-1/2}BA^{-1/2}$ . Gli autovalori di  $\Lambda$ , radici dell'equazione  $\det(B - \lambda A) = 0$ , sono positivi e li denotiamo con  $\omega_i^2$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dunque  $\Lambda = U^T D U$  con  $D_{i,j} = \omega_i^2 \delta_{i,j}$ . Introduciamo ora le nuove coordinate  $(Q, P)$  tali che:

$$\begin{cases} q = (UA^{1/2})^{-1}Q = A^{-1/2}U^T Q \\ p = (UA^{1/2})^T P = A^{1/2}U^T P \end{cases}$$

La trasformazione  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  è simplettica (vedi Esempio 4.1) e l'hamiltoniana nelle nuove variabili diventa

$$\tilde{H}(Q, P) = H(A^{-1/2}U^T Q, A^{1/2}U^T P) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{P_i^2}{2} + \frac{\omega_i^2}{2} Q_i^2 \right).$$

Introduciamo infine le variabili angolo-azione attraverso la trasformazione simplettica  $(Q, P) = \psi(\theta, I)$  con

$$\psi : \mathbb{T}^n \times (0, \infty)^n \rightarrow W \quad : \quad \begin{cases} Q_i = \sqrt{2I_i/\omega_i} \cos \theta_i \\ P_i = -\sqrt{2\omega_i I_i} \sin \theta_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

con  $W = \{(Q, P) \in \mathbb{R}^{2n} : P_i^2 + Q_i^2 > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n\}$ . In tali variabili l'hamiltoniana assume la forma

$$\tilde{H}(\theta, I) = \langle \omega, I \rangle = \sum_{i=1}^n \omega_i I_i.$$

Quindi su ciascun insieme di livello delle azioni  $I$  il moto degli angoli è quasi periodico con frequenze  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  indipendenti dal livello (*oscillazioni isocrone*).

**ESEMPIO 4.6.** Costruiamo infine le variabili angolo-azione per un sistema unidimensionale conservativo di energia potenziale  $U(q)$  che, senza perdere di generalità, assumiamo definita su tutto l'asse reale. Dunque:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} + U(q), \quad (q, p) \in \mathbb{R}^2.$$

Supponiamo che  $q_0 \in \mathbb{R}$  sia un punto di minimo dell'energia potenziale con  $U''(q_0) > 0$ . In particolare  $q_0$  è un punto critico isolato di  $U$ , cosicché, posto  $E_0 = U(q_0)$ , esistono un intorno  $K$  di  $q_0$  ed un valore  $E_1 > 0$  dell'energia tali che le curve

$$\Gamma_E = \{(q, p) : q \in K, H(q, p) = E\}, \quad E_0 < E < E_1,$$

sono chiuse, diffeomorfe a circonferenze e simmetriche rispetto all'asse  $p = 0$ . Inoltre la regione dello spazio delle fasi

$$D = \{(q, p) : q \in K, E_0 < H(q, p) < E_1\} = \bigcup_{E_0 < E < E_1} \Gamma_E$$

è un dominio invariante rispetto alla dinamica, dove hanno luogo moti periodici attorno a  $q_0$ , le cui orbite sono esattamente le curve  $\Gamma_E$ .

Analogamente a quanto fatto per l'oscillatore armonico, vogliamo ora determinare delle variabili angolo-azione  $(\theta, I)$  per descrivere i moti periodici in  $D$ . Siano  $q_-(E) < q_0 < q_+(E)$ ,  $E_0 < E < E_1$ , le intersezioni di  $\Gamma_E$  con l'asse  $p = 0$ , quindi  $U(q_{\pm}(E)) = E$ . Indichiamo con  $T(E)$  il periodo del moto sulla curva  $\Gamma_E$ ,

$$T(E) = 2 \int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}}.$$

Consideriamo la semiretta  $S = \{(q_0, p) : p > 0\}$  che interseca  $\Gamma_E$  nel punto  $x_E = (q_0, \sqrt{2(E - E_0)})$ . Sia quindi  $\tau : D \rightarrow \mathbb{R}$  la variabile così definita: se  $H(q, p) = E$

allora

$$\tau(q, p) = \begin{cases} \int_{q_0}^q \frac{d\xi}{\sqrt{2(E-U(\xi))}} & \text{se } p \geq 0, \quad q \geq q_0, \\ \int_{q_0}^{q_+(E)} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E-U(\xi))}} + \int_q^{q_+(E)} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E-U(\xi))}} & \text{se } p < 0, \\ T(E) - \int_q^{q_0} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E-U(\xi))}} & \text{se } p \geq 0, \quad q < q_0. \end{cases}$$

In altri termini  $\tau(q, p)$  è il minor tempo positivo necessario per spostarsi dal punto  $x_E$  sulla semiretta  $S$  al punto  $(q, p)$ ; in particolare  $0 \leq \tau(q, p) < T(H(q, p))$ . Rimane in tal modo definita la trasformazione di coordinate

$$(q, p) \rightarrow (\tau, E) \quad : \quad \begin{cases} \tau = \tau(q, p) \\ E = H(q, p) \end{cases}$$

del dominio  $D$  su  $\{(\tau, E) : 0 \leq \tau < T(E), E_0 < E < E_1\}$ . Sia  $(q, p) = \psi(\tau, E)$  la trasformazione inversa. Ovviamente  $\psi(T(E), E) = \psi(0, E)$ , cosicché è possibile prolungare la trasformazione per periodicità (di periodo  $T(E)$ ) a tutti i valori  $\tau \in \mathbb{R}$ . Corrispondentemente il tempo  $\tau$  diventa una funzione multivoca di  $(q, p)$ , definita a meno di multipli del periodo  $T(E)$ . La trasformazione  $\psi$  è simplettica. Per mostrarlo conviene verificare equivalentemente che  $\psi^{-1}$  è simplettica, calcolando le parentesi di Poisson fondamentali. Le uguaglianze  $\{E, E\}_{q,p} = \{\tau, \tau\}_{q,p} = 0$  sono evidenti. D'altra parte  $\{\tau, E\}_{q,p} = \{\tau, H\}_{q,p} = \dot{\tau}$  per la definizione stessa di parentesi di Poisson; ma  $\dot{\tau} = 1$  essendo  $\tau(q, p)$  il tempo di percorrenza sull'orbita passante per  $(q, p)$ .

Nelle variabili  $(\tau, E)$  l'hamiltoniana assume la forma semplicissima  $\tilde{H}(\tau, E) = E$ , ma non sono ancora le variabili angolo-azione cercate poiché  $\tau$  non è un angolo ed il suo periodo dipende da  $E$ . Per ottenere un angolo definiamo

$$\theta(\tau, E) = 2\pi \frac{\tau}{T(E)}.$$

Dobbiamo ora determinare una variabile  $I = I(E)$  in modo tale che la trasformazione  $(\tau, E) \rightarrow (\theta, I)$  sia canonica. Infatti in tal caso la trasformazione composta  $(q, p) \rightarrow (\tau, E) \rightarrow (\theta, I)$  è canonica e l'hamiltoniana diventa  $\tilde{\tilde{H}}(\theta, I) = h(I)$  con  $h(I)$  la funzione inversa di  $I(E)$ :  $h(I(E)) = E$ . Ne segue che il sistema hamiltoniano nelle variabili  $(\theta, I)$  si scrive

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega(I), \\ \dot{I} = 0, \end{cases} \quad \omega(I) = h'(I),$$

dunque  $(\theta, I)$  sono le variabili angolo-azione cercate. Per determinare  $I$  dobbiamo richiedere che  $\{\theta, I\}_{\tau, E} = 1$ . Poiché richiediamo  $I$  indipendente da  $\tau$ , questa condizione diventa

$$\{\theta, I\}_{\tau, E} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} I'(E) = \frac{2\pi}{T(E)} I'(E) = 1 \quad \iff \quad I'(E) = \frac{T(E)}{2\pi}.$$

È ora facile verificare che  $T(E) = A'(E)$  essendo  $A(E)$  l'area della regione limitata del piano delle fasi  $(q, p)$  racchiusa dalla curva  $\Gamma_E$ . Dunque possiamo scegliere

$$I(E) = \frac{A(E)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_E} p dq = \frac{1}{\pi} \int_{q_-(E)}^{q_+(E)} dq \sqrt{2(E - U(q))}.$$

La funzione  $I(E)$  è monotona crescente con  $I(0) = 0$ . In definitiva, la trasformazione cercata  $(q, p) \rightarrow (\theta, I)$  è

$$\theta(q, p) = 2\pi \frac{\tau(q, p)}{T(H(q, p))}, \quad I(q, p) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_{H(q, p)}} \tilde{p} d\tilde{q}.$$

#### 4.2. Conservazione della 1-forma di Liouville e funzioni generatrici

Esiste un'ulteriore caratterizzazione delle trasformazioni simplettiche, basata sul comportamento, sotto l'azione di quest'ultime, di una particolare forma differenziale. Precisamente, consideriamo la forma

$$p dq = \sum_{i=1}^n p_i dq_i,$$

detta *1-forma di Liouville*.

**TEOREMA 4.2.** *Condizione necessaria e sufficiente perché la trasformazione di coordinate  $(q, p) = (q(Q, P), p(Q, P))$  sia simplettica è che la 1-forma di Liouville sia preservata a meno di un differenziale totale, ovvero che esista, almeno localmente, una funzione  $F(Q, P)$  tale che*

$$p dq - P dQ = dF \quad (4.4)$$

ovvero, più esplicitamente,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} p_k - P_i = \frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial P_i} p_k = \frac{\partial F}{\partial P_i} \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Utilizziamo nel seguito la notazione  $x = (q, p)$ ,  $y = (Q, P)$  per le vecchie e nuove coordinate e

$$\langle A(z), dz \rangle = \sum_{i=1}^{2n} A_i(z) dz_i, \quad z = x, y,$$

per le forme differenziali. Sia infine  $x = \psi(y)$  la trasformazione di coordinate. Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} \langle Jx, dx \rangle - \langle Jy, dy \rangle &= p dq - q dp - P dQ + Q dP \\ &= 2(p dq - P dQ) - d \left[ \sum_{k=1}^n (q_k p_k - Q_k P_k) \right], \end{aligned}$$

da cui

$$p dq - P dQ = \frac{1}{2} (\langle Jx, dx \rangle - \langle Jy, dy \rangle) + \frac{1}{2} d \left[ \sum_{k=1}^n (q_k p_k - Q_k P_k) \right].$$

Ne segue che la forma  $p dq - P dQ$  è esatta se e soltanto se la forma  $\langle Jx, dx \rangle - \langle Jy, dy \rangle$  è esatta. D'altra parte

$$\langle Jx, dx \rangle - \langle Jy, dy \rangle = \langle J\psi(y), D\psi(y)dy \rangle - \langle Jy, dy \rangle = \langle D\psi(y)^T J\psi(y) - Jy, dy \rangle.$$

Dunque  $\langle Jx, dx \rangle - \langle Jy, dy \rangle = \langle v(y), dy \rangle$  con  $v(y) = D\psi(y)^T J\psi(y) - Jy$ . Come noto, condizione necessaria e sufficiente perché  $\langle v(y), dy \rangle$  sia localmente esatta è che il campo vettoriale  $v(y)$  abbia rotore nullo:

$$\text{rot } v(y) = 0 \iff \frac{\partial v_i}{\partial y_j}(y) = \frac{\partial v_j}{\partial y_i}(y),$$

ovvero che la matrice jacobiana di  $v$  sia simmetrica,  $Dv(y) = Dv(y)^T$ . Si ha ora

$$Dv(y) = D(D\psi(y)^T)J\psi(y) + D\psi(y)^T JD\psi(y) - J$$

con

$$(D(D\psi(y)^T)J\psi(y))_{i,j} = \sum_{k,h=1}^{2n} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y_i \partial y_j}(y) J_{k,h} \psi_h(y)$$

matrice simmetrica. Viceversa la matrice  $D\psi(y)^T JD\psi(y) - J$  è antisimmetrica poiché, essendo  $J^T = -J$ ,

$$[D\psi(y)^T JD\psi(y) - J]^T = D\psi(y)^T J^T D\psi(y) - J^T = -[D\psi(y)^T JD\psi(y) - J].$$

Concludiamo che condizione necessaria e sufficiente perché la forma  $\langle Jx, dx \rangle - \langle Jy, dy \rangle$  sia esatta è che  $D\psi(y)^T JD\psi(y) - J = 0$ , ovvero che  $\psi$  sia *simplettica*.  $\square$

Abbiamo quindi dimostrato che la *simpletticità* della trasformazione equivale alla condizione (4.4), detta *condizione di Lie*. La funzione  $F$  che vi appare dipende dalla trasformazione ed è definita localmente. Ovviamente, se ci restringiamo a domini semplicemente connessi, allora  $F$  rimane definita globalmente.

Il Teorema 4.2 permette di sviluppare un metodo, detto delle *funzioni generatrici*, per produrre trasformazioni canoniche. Il punto di partenza è la semplice osservazione che la condizione (4.4), essendo un'identità differenziale, non dipende dalla particolare scelta delle  $2n$  variabili indipendenti. Quindi, accanto alle (4.5), possiamo potenzialmente sviluppare la (4.4) rispetto a *variabili miste*, ovvero parte delle vecchie e parte delle nuove, purché la trasformazione in esame ammetta la scelta di tali variabili come coordinate indipendenti.

Iniziamo con il considerare la classe delle trasformazioni *simplettiche* tali che

$$\det \frac{\partial q}{\partial P}(Q, P) \neq 0,$$

dette trasformazioni *libere* o di *prima specie*. La condizione di non singularità richiesta permette di esplicitare, almeno localmente, la variabile  $P$  nella relazione  $q = q(Q, P)$ , ottenendo  $P = \hat{P}(q, Q)$  e quindi  $p = p(Q, \hat{P}(q, Q)) = \hat{p}(q, Q)$ . In definitiva possiamo utilizzare localmente come variabili indipendenti la coppia  $(q, Q)$ . Posto ora  $S_1(q, Q) = F(Q, \hat{P}(q, Q))$ , la relazione (4.4) diventa

$$\hat{p}(q, Q) dq - \hat{P}(q, Q) dQ = dS_1(q, Q)$$

e dunque

$$\frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q) = \hat{p}(q, Q), \quad \frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q) = -\hat{P}(q, Q).$$

Questo suggerisce che possiamo generare trasformazioni libere mediante opportune funzioni reali di  $2n$  variabili:

PROPOSIZIONE 4.3. *Sia  $S_1 = S_1(q, Q)$  una funzione reale regolare delle  $2n$  variabili  $(q, Q)$  tale che*

$$\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial q \partial Q}(q, Q) \neq 0.$$

Allora le posizioni

$$p = \frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q), \quad P = -\frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q),$$

generano localmente una trasformazione libera che verifica la condizione di Lie (4.4) con  $F(Q, P) = S_1(q(Q, P), Q)$ .

DIMOSTRAZIONE. L'ipotesi di non singolarità permette di esplicitare localmente  $q = q(Q, P)$  dalla relazione che definisce le variabili  $P$ . Sostituendo nella definizione delle variabili  $p$  troviamo inoltre  $p = p(Q, P)$ . La trasformazione  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  così ottenuta ha le proprietà asserite essendo, per costruzione,

$$p(Q, P) dq(Q, P) - P dQ = dS_1(q(Q, P), Q) = dF(Q, P).$$

□

Le trasformazioni libere non includono trasformazioni importanti, quali le trasformazioni puntuali estese ai momenti discusse nell'Esempio 4.2. Infatti in tal caso  $q = q(Q, P) = f(Q)$ , cosicché l'esplicitazione  $P = \hat{P}(q, Q)$  è impossibile. Introduciamo allora una diversa classe di trasformazioni simplettiche, dette di *seconda specie*, definite dalla condizione

$$\det \frac{\partial q}{\partial Q}(Q, P) \neq 0.$$

Questo permette di esplicitare la variabile  $Q$  nella relazione  $q = q(Q, P)$ , ottenendo  $Q = \tilde{Q}(q, P)$  e quindi  $p = p(\tilde{Q}(q, P), P) = \tilde{p}(q, P)$ . Possiamo ora utilizzare localmente come variabili indipendenti la coppia  $(q, P)$ . Riscrivendo la condizione (4.4) nella forma

$$p dq + Q dP = d\left(F + \sum_{k=1}^n Q_k P_k\right)$$

e ponendo

$$S_2(q, P) = F(\tilde{Q}(q, P), P) + \sum_{k=1}^n \tilde{Q}_k(q, P) P_k,$$

otteniamo

$$\tilde{p}(q, P) dq + \tilde{Q}(q, P) dP = dS_2(q, P)$$

e dunque

$$\frac{\partial S_2}{\partial q}(q, P) = \tilde{p}(q, P), \quad \frac{\partial S_2}{\partial P}(q, P) = \tilde{Q}(q, P).$$

In analogia al caso delle trasformazioni libere abbiamo ora il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 4.4. Sia  $S_2 = S_2(q, P)$  una funzione reale regolare delle  $2n$  variabili  $(q, P)$  tale che

$$\det \frac{\partial^2 S_2}{\partial q \partial P}(q, P) \neq 0.$$

Allora le posizioni

$$p = \frac{\partial S_2}{\partial q}(q, P), \quad Q = \frac{\partial S_2}{\partial P}(q, P),$$

generano localmente una trasformazione di seconda specie che verifica la condizione di Lie (4.4) con  $F(Q, P) = S_2(q(Q, P), P) - \sum_{k=1}^n Q_k P_k$ .

DIMOSTRAZIONE. Per le ipotesi su  $S_2$  le posizioni che definiscono  $p$  e  $Q$  definiscono una trasformazione  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  che ha le proprietà asserite, essendo, per costruzione,

$$p(Q, P) dq - P dQ = d \left[ S_2(q(Q, P), P) - \sum_{k=1}^n Q_k P_k \right] = dF(Q, P).$$

□

ESEMPIO 4.7. Le trasformazioni puntuali estese ai momenti sono generate dalla funzione

$$S_2(q, P) = \sum_{k=1}^n f_k^{-1}(q) P_k.$$

Infatti si ottiene in tal caso

$$p = \frac{\partial S_2}{\partial q}(q, P) = Df^{-1}(q)^T P, \quad Q = \frac{\partial S_2}{\partial P}(q, P) = f^{-1}(q),$$

che sono proprio le trasformazioni discusse nell'Esempio 4.2. In questo caso la condizione di Lie rimane soddisfatta con  $F(Q, P) = 0$ , ovvero assume la forma  $p dq - P dQ = 0$ . Si osservi infine che  $S_2(q, P) = \sum_{k=1}^n q_k P_k$  è la funzione generatrice della trasformazione identica  $(q, p) = (Q, P)$ .

OSSERVAZIONE 4.1. Per i nostri scopi non introdurremo ulteriori trasformazioni. D'altra parte esistono trasformazioni che non sono né di prima né di seconda specie. Ricordiamo, senza dimostrazione, il seguente risultato generale. Assegnata una qualsiasi trasformazioni simplettica è sempre possibile determinare (localmente) una partizione  $(i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_{n-k})$  di  $(1, \dots, n)$  tale che la collezione di  $2n$  variabili

$$(q_1, \dots, q_n, Q_{i_1}, \dots, Q_{i_k}, P_{j_1}, \dots, P_{j_{n-k}})$$

forniscano un sistema di coordinate indipendente. La trasformazione è quindi ricavata da un'opportuna funzione generatrice

$$S = S(q_1, \dots, q_n, Q_{i_1}, \dots, Q_{i_k}, P_{j_1}, \dots, P_{j_{n-k}})$$

ponendo

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q_{j_\ell} = \frac{\partial S}{\partial P_{j_\ell}} \quad (\ell = 1, \dots, n-k) \quad P_{i_s} = -\frac{\partial S}{\partial Q_{i_s}} \quad (s = 1, \dots, k).$$

Per ulteriori dettagli si può consultare il libro di Arnold citato nella nota bibliografica al capitolo.

OSSERVAZIONE 4.2. Concludiamo la sezione con una osservazione importante. Supponiamo che l'hamiltoniana  $H: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ , determina un flusso hamiltoniano  $\Phi_H^t$ . Dunque  $\{\Phi_H^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  è un gruppo ad un parametro di trasformazioni dello spazio delle fasi  $U$ . Asseriamo che per ogni  $t \in \mathbb{R}$  la trasformazione  $\Phi_H^t: U \rightarrow U$  è simplettica. A tal scopo mostriamo che la matrice  $D\Phi_H^t(x)^T$  è simplettica, ovvero che  $D\Phi_H^t(x)^T J D\Phi_H^t(x) = J$ . Poiché  $\Phi_H^0 = \mathbb{I}$ , tale condizione è vera per  $t = 0$ , dunque è sufficiente dimostrare che

$$\frac{d}{dt} D\Phi_H^t(x)^T J D\Phi_H^t(x) = 0 \quad \forall x \in U, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Per la proprietà di gruppo si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D\Phi_H^t(x)^T J D\Phi_H^t(x) &= \frac{d}{d\varepsilon} D\Phi_H^{t+\varepsilon}(x)^T J D\Phi_H^{t+\varepsilon}(x) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= D\Phi_H^t(x)^T \frac{d}{d\varepsilon} D\Phi_H^\varepsilon(\Phi_H^t(x))^T J D\Phi_H^\varepsilon(\Phi_H^t(x)) \Big|_{\varepsilon=0} D\Phi_H^t(x), \end{aligned}$$

dunque è sufficiente dimostrare che

$$\frac{d}{d\varepsilon} D\Phi_H^\varepsilon(x)^T J D\Phi_H^\varepsilon(x) \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \forall x \in U.$$

Essendo  $D\Phi_H^t(x)$  soluzione dell'equazione alle variazioni, sviluppando intorno a  $\varepsilon = 0$  si ha

$$D\Phi_H^\varepsilon(x) = \mathbb{I} + \varepsilon DJ\nabla H(x) + O(\varepsilon^2) = \mathbb{I} + \varepsilon JD^2 H(x) + O(\varepsilon^2)$$

con  $D^2 H(x)$  la matrice hessiana (dunque simmetrica) di  $H$ . Ricordando ora che  $J^T = -J$  e  $J^2 = -\mathbb{I}$  otteniamo infine

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} D\Phi_H^\varepsilon(x)^T J D\Phi_H^\varepsilon(x) \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} [\mathbb{I} - \varepsilon D^2 H(x) J] J [\mathbb{I} + \varepsilon JD^2 H(x)] \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= D^2 H(x) - D^2 H(x) = 0. \end{aligned}$$

In effetti si può dimostrare anche il viceversa, ovvero un gruppo ad un parametro di trasformazioni simplettiche  $\{\psi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  è soluzione di un opportuno sistema di equazioni di Hamilton. Infatti esso è il flusso di fase generato dal campo vettoriale

$$v_\psi(y) = \frac{d}{d\varepsilon} \psi^\varepsilon(y) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

D'altra parte, per  $\varepsilon$  piccolo  $\psi^\varepsilon$  è una trasformazione simplettica vicina all'identità, dunque

$$(q, p) = \psi^\varepsilon(Q, P) \iff \begin{cases} q = Q + \varepsilon f(Q, P, \varepsilon) \\ p = P + \varepsilon g(Q, P, \varepsilon) \end{cases}$$

con  $f, g$  funzioni regolari di  $(Q, P, \varepsilon)$ . Per il teorema della funzione implicita, per  $\varepsilon$  piccolo è possibile esplicitare  $Q = Q(q, P, \varepsilon)$  dall'equazione  $q = Q + \varepsilon f(Q, P, \varepsilon)$ .

Esiste quindi una funzione generatrice di seconda specie  $S(q, P, \varepsilon)$  per cui

$$S(q, P, \varepsilon) = \sum_{k=1}^n q_k P_k + \varepsilon A(q, P, \varepsilon), \quad p = P + \varepsilon \frac{\partial A}{\partial q}(q, P, \varepsilon), \quad Q = q + \varepsilon \frac{\partial A}{\partial P}(q, P, \varepsilon),$$

con  $A$  funzione regolare di  $(q, P, \varepsilon)$ . Si ha allora:

$$\psi^\varepsilon(Q, P) = \begin{cases} q(Q, P, \varepsilon) = Q - \varepsilon \frac{\partial A}{\partial P}(q(Q, P, \varepsilon), P, \varepsilon) \\ p(Q, P, \varepsilon) = P + \varepsilon \frac{\partial A}{\partial q}(q(Q, P, \varepsilon), P, \varepsilon) \end{cases}$$

Derivando rispetto ad  $\varepsilon$  e valutando in  $\varepsilon = 0$  si ricava che  $v_\psi(y) = J\nabla_y H(y)$  con  $H(y) = H(Q, P) = -A(Q, P, 0)$ .

### 4.3. L'equazione di Hamilton-Jacobi

Consideriamo un sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \end{cases} \quad (q, p) \in U \subseteq \mathbb{R}^{2n}, \quad H : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Se determiniamo una trasformazione canonica  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  tale che  $\tilde{H}(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P)) = K(P)$  per qualche funzione  $K$ , allora le equazioni del moto sono integrabili, essendo la soluzione generale nelle nuove coordinate della forma

$$Q(t) = Q_0 + \frac{\partial K}{\partial P}(P_0) t, \quad P(t) = P_0.$$

Supponiamo ora che la suddetta trasformazione sia di seconda specie, e dunque generata da una funzione  $S(q, P)$  attraverso le posizioni

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, P), \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P}(q, P).$$

Si ha allora

$$H\left(q(Q, P), \frac{\partial S}{\partial q}(q(Q, P), P)\right) = K(P).$$

Scrivendo questa relazione nelle variabili indipendenti  $(q, P)$ , concludiamo che la funzione generatrice  $S$  soddisfa la relazione

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, P)\right) = K(P).$$

Questo ci porta alla seguente definizione

**DEFINIZIONE 4.5.** *Assegnata una funzione hamiltoniana  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ , l'equazione alle derivate parziali del primo ordine*

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = h,$$

nella quale sia la funzione  $W(q)$  che la costante  $h$  sono incognite, è detta equazione ridotta di Hamilton-Jacobi associata ad  $H$ .

Così ad esempio, se

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2} + V(q_1, \dots, q_n),$$

allora l'equazione di Hamilton-Jacobi associata si scrive

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial q_i} \right)^2 + V(q_1, \dots, q_n) = h.$$

DEFINIZIONE 4.6. Viene definita integrale completo dell'equazione ridotta di Hamilton-Jacobi ogni famiglia di soluzioni  $\{W(q, \alpha), h(\alpha)\}$  dipendente da  $n$  parametri reali  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , tale che

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial \alpha} \neq 0. \quad (4.6)$$

La nozione di integrale completo sopra data non deve confondersi con quella di *integrale generale*, che fornisce l'insieme di tutte le possibili soluzioni. Quest'ultimo dipende in generale, nel caso di un'equazione del primo ordine, da una funzione arbitraria. Ad esempio l'equazione  $\partial_x W - \partial_y W = 0$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , ha soluzione  $W(x, y) = f(x + y)$  con  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione regolare qualsiasi.

La conoscenza di un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi permette di integrare le equazioni del moto. Precisamente abbiamo il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 4.7. Sia  $\{W(q, \alpha), h(\alpha)\}$  un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi di hamiltoniana  $H$ . Allora la funzione  $S(q, P) = W(q, P)$  genera una trasformazione canonica di seconda specie  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  tale che  $\tilde{H}(Q, P) = h(P)$ .

DIMOSTRAZIONE. La condizione (4.6) garantisce che  $S(q, P) = W(q, P)$  può utilizzarsi come funzione generatrice di una trasformazione canonica di seconda specie. Inoltre

$$\tilde{H}(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P)) = H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) \Big|_{q=q(Q, P)} = h(P),$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è utilizzato che  $S = W$  soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q, \alpha)\right) = h(\alpha).$$

□

ESEMPIO 4.8. Nel caso di un sistema unidimensionale la cui hamiltoniana sia  $H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + U(q)$ ,  $(q, p) \in \mathbb{R}^2$ , l'equazione di Hamilton-Jacobi prende la forma

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dW}{dq} \right)^2 + U(q) = h.$$

Scegliendo  $\alpha = h$  l'equazione può essere risolta localmente, ottenendo

$$W_{\pm}(q, \alpha) = \pm \int_{q_0}^q d\xi \sqrt{2(\alpha - U(\xi))},$$

dove  $q_0$  è un punto fissato (tale ovviamente che  $U(q_0) < \alpha$  per i valori di  $\alpha$  considerati). Per fissare le idee scegliamo la determinazione positiva ed indichiamo con  $(\tau, h)$  le nuove coordinate. Dunque la trasformazione è generata da  $S(q, h) = W_+(q, h)$ , cosicché

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2(\alpha - U(q))}, \quad \tau = \frac{\partial S}{\partial h} = \int_{q_0}^q \frac{d\xi}{\sqrt{2(\alpha - U(\xi))}}.$$

Chiaramente  $\tilde{H}(\tau, h) = h$  e le equazioni del moto diventano  $\dot{\tau} = 1$ ,  $\dot{h} = 0$ . Abbiamo riottenuto le variabili tempo-energia precedentemente introdotte nell'Esempio 4.6, qui corrispondenti alle fasi di moto progressivo (per descrivere i moti nel semipiano  $p < 0$  occorre utilizzare  $W_-(q, h)$  quale funzione generatrice).

Anche le coordinate angolo-azione possono essere ricavate in modo diretto dall'equazione di Hamilton-Jacobi. Supponiamo che l'energia potenziale  $U(q)$  possieda un minimo isolato in un punto  $q_0$ , cosicché nell'intorno della posizione di equilibrio  $(q_0, 0)$  lo spazio delle fasi è riempito da orbite periodiche  $\Gamma_h$ , essendo  $h$  il livello di energia. Se  $A(h)$  è l'area della regione limitata racchiusa dalla curva  $\Gamma_h$ , la variabile d'azione è  $I = A(h)/2\pi$  (vedi l'Esempio 4.6). Sia infine  $h(I)$  l'esplicitazione dell'energia in funzione di  $I$ , in particolare  $h'(I) = 2\pi/T(h(I))$  con  $T(h)$  periodo del moto su  $\Gamma_h$ . Per generare la trasformazione  $(q, p) \rightarrow (\theta, I)$  fissiamo  $\alpha = I$  come parametro nell'integrale completo ed integriamo dal punto di inversione del moto  $q_-(h)$ , ottenendo

$$S_{\pm}(q, I) = \pm \int_{q_-(h(I))}^q d\xi \sqrt{2(h(I) - U(\xi))}.$$

Essendo  $U(q_-(h)) = h$ , la dipendenza da  $I$  nell'estremo di integrazione non contribuisce alla derivata cosicché:

$$p = \frac{\partial S_{\pm}}{\partial q} = \pm \sqrt{2(h(I) - U(q))},$$

$$\theta_{\pm} = \frac{\partial S_{\pm}}{\partial I} = \pm \frac{2\pi}{T(h(I))} \int_{q_-(h(I))}^q \frac{d\xi}{\sqrt{2(h(I) - U(\xi))}}.$$

Le variabili  $\theta_{\pm}$  sono definite solo localmente; precisamente la coppia  $(\theta_+, I)$  [risp.  $(\theta_-, I)$ ] definisce una trasformazione di coordinate nel semipiano superiore  $p > 0$  [risp. inferiore  $p < 0$ ] del piano delle fasi. D'altra parte la variabile angolare

$$\theta = \begin{cases} \theta_+ \bmod(2\pi) & \text{se } p \geq 0 \\ \theta_- \bmod(2\pi) & \text{se } p < 0 \end{cases}$$

è definita globalmente e la coppia  $(\theta, I)$  fornisce le variabili angolo-azione cercate.

La maggior parte dei problemi integrabili della meccanica si basa sul metodo della *separazione delle variabili*, che permette di determinare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi. Illustriamo brevemente tale metodo.

Assegnata l'hamiltoniana  $H(q, p) = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ , la variabile  $q_1$  è detta *separabile* per l'equazione di Hamilton-Jacobi associata se  $H$  ha la forma

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = H_1(\varphi_1(q_1, p_1), q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n),$$

per opportune funzioni  $\varphi_1$  e  $H_1$  di, rispettivamente, 2 e  $2n - 1$  variabili. Cerchiamo in tal caso la soluzione  $W$  nella forma  $W(q) = W_1(q_1) + \bar{W}(q_2, \dots, q_n)$ . Sostituendo otteniamo

$$H_1\left(\varphi_1\left(q_1, \frac{dW_1}{dq_1}\right), q_2, \dots, q_n, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_n}\right) = h.$$

Poniamo ora

$$\varphi_1\left(q_1, \frac{dW_1}{dq_1}\right) = \alpha_1,$$

da cui, per separazione delle variabili, determiniamo  $W_1(q_1, \alpha_1)$ . La funzione  $\bar{W}$  è allora soluzione di

$$H_1\left(\alpha_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \bar{W}}{\partial q_n}\right) = h,$$

che è ancora un'equazione di Hamilton-Jacobi (dove appare il parametro reale  $\alpha_1$ ), in cui si è ridotto di un'unità il numero di variabili da cui dipende la funzione incognita. Chiaramente se, nuovamente,

$$H_1(\alpha_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n) = H_2(\varphi_2(q_2, p_2), q_3, \dots, q_n, p_3, \dots, p_n),$$

per opportune funzioni  $\varphi_2$  e  $H_2$  (dipendenti in generale entrambe dal parametro  $\alpha_1$ ), possiamo ripetere l'argomento cercando la funzione incognita  $\bar{W}(q_2, \dots, q_n)$  nella forma  $W_2(q_2) + \bar{W}(q_3, \dots, q_n)$ . Se tale situazione si ripete per tutte le  $n$  variabili otteniamo infine un integrale completo della forma

$$W(q, \alpha) = \sum_{k=1}^n W_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k).$$

Vediamo alcuni esempi.

ESEMPIO 4.9. Nel caso particolare in cui l'hamiltoniana assume la forma

$$H(q, p) = f(H_1(q_1, p_1), \dots, H_n(q_n, p_n))$$

possiamo cercare l'integrale completo nella forma  $S(q) = \sum_k S_k(q_k)$ , da cui, sostituendo nell'equazione di Hamilton-Jacobi, si ottiene

$$H_k\left(q_k, \frac{dS_k}{dq_k}\right) = \alpha_k, \quad h(\alpha) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

e quindi  $S(q, \alpha) = \sum_k S_k(q_k, \alpha_k)$ .

ESEMPIO 4.10. Consideriamo il moto di un punto materiale di massa unitaria che si muove su un piano ed è soggetto ad una forza centrale. Nelle coordinate polari  $(r, \theta)$ , indicando con  $U(r)$  l'energia potenziale, si ha:

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r), \quad H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} + U(r),$$

essendo  $p_r = \dot{r}$  e  $p_\theta = r^2\dot{\theta}$  i momenti cinetici associati alle variabili  $r$  e  $\theta$  rispettivamente. L'equazione di Hamilton-Jacobi diventa in questo caso:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + U(r) = h.$$

La coordinata  $\theta$  è ciclica e quindi, in particolare, separabile. Cerchiamo pertanto  $S$  nella forma  $S(r, \theta) = S_1(\theta) + S_2(r)$ . Sostituendo si ha

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dS_2}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{dS_1}{d\theta}\right)^2 + U(r) = h.$$

Ponendo

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dS_1}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha^2,$$

otteniamo  $S_1(\theta, \alpha) = \alpha\theta$  e

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dS_2}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{2r^2} + U(r) = h.$$

Nel seguito supponiamo  $\alpha \neq 0$ . Sia quindi

$$r_{\min}(\alpha, h) = \min\left\{r > 0 : \frac{\alpha^2}{2r^2} + U(r) < h\right\}.$$

Una possibile scelta per  $S_2$  è allora:

$$S_2(r) = \pm \int_{r_{\min}(\alpha, h)}^r dx \sqrt{2\left[h - U(x) - \frac{\alpha^2}{2x^2}\right]}.$$

Per fissare le idee scegliamo la determinazione positiva. Otteniamo in tal modo la funzione generatrice

$$S(r, \theta, h, \alpha) = \alpha\theta + \int_{r_{\min}(\alpha, h)}^r dx \sqrt{2\left[h - U(x) - \frac{\alpha^2}{2x^2}\right]}$$

che da luogo alla trasformazione canonica  $(r, \theta, p_r, p_\theta) \rightarrow (\tau, \psi, h, \alpha)$  definita dalle relazioni

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{2\left[h - U(r) - \frac{\alpha^2}{2r^2}\right]}, & p_\theta &= \frac{\partial S}{\partial \theta} = \alpha, \\ \tau &= \frac{\partial S}{\partial h} = \int_{r_{\min}(\alpha, h)}^r dx \left\{2\left[h - U(x) - \frac{\alpha^2}{2x^2}\right]\right\}^{-1/2}, \\ \psi &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \theta - \int_{r_{\min}(\alpha, h)}^r dx \frac{\alpha}{x^2} \left\{2\left[h - U(x) - \frac{\alpha^2}{2x^2}\right]\right\}^{-1/2}. \end{aligned}$$

Chiaramente  $\tilde{H}(\tau, \psi, h, \alpha) = h$  cosicché le equazioni del moto sono  $\dot{\tau} = 1, \dot{\psi} = 0, \dot{h} = 0, \dot{\alpha} = 0$ . Le variabili  $h$  ed  $\alpha$  sono, rispettivamente, l'energia ed il momento

angolare del punto, dunque sono correttamente conservate. Anche la conservazione della variabile  $\psi$  non deve sorprendere. In effetti, se indichiamo con  $\theta_0$  il valore dell'angolo  $\theta$  quando  $r = r_{\min}(\alpha, h)$ , nella successiva fase di moto progressivo  $t \rightarrow r(t)$  della variabile radiale, la corrispondente variazione della variabile angolare è:

$$\theta(t) - \theta_0 = \int_{r_{\min}(\alpha, h)}^{r(t)} dr(s) \frac{\dot{\theta}(s)}{\dot{r}(s)} = \int_{r_{\min}(\alpha, h)}^{r(t)} dx \frac{\alpha}{x^2} \left\{ 2 \left[ h - U(x) - \frac{\alpha^2}{2x^2} \right] \right\}^{-1/2},$$

poiché  $\dot{\theta} = p_\theta / r^2 = \alpha^2 / r^2$  ed  $\dot{r} = p_r$ . Quindi  $\psi = \theta - (\theta - \theta_0) = \theta_0$ , costante del moto.

Osserviamo infine che il caso  $\alpha = p_\theta = 0$ , non coperto dalla precedente trattazione, corrisponde ai moti unidimensionali di caduta nel centro e va analizzato separatamente.

#### 4.4. Il Teorema di Liouville-Arnold

Consideriamo un sistema integrabile nel senso di Hamilton-Jacobi, dunque esiste una trasformazione canonica  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  tale che  $\tilde{H}(Q, P) = K(P)$  per qualche funzione  $K$ . In particolare le funzioni  $P_j = P_j(q, p)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , costituiscono un sistema di  $n$  integrali primi del moto. Inoltre, per la conservazione delle parentesi di Poisson fondamentali, essi sono in *involuzione* tra loro, ovvero:

$$\{P_i, P_j\}_{q, p} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Quindi tutti i sistemi integrabili nel senso sopra descritto possiedono almeno  $n$  integrali primi indipendenti in involuzione. Ad esempio:

- Il moto unidimensionale ( $n = 1$ ): l'energia  $H$ .
- Il moto centrale piano ( $n = 2$ ): l'energia  $H$  ed il momento  $p_\theta$ .
- Il moto centrale nello spazio ( $n = 3$ ): l'energia  $H$ , il quadrato del momento angolare  $M^2$ , la terza componente del momento angolare  $M_z$ .
- Il sistema di  $n$  oscillatori armonici accoppiati: Le energie  $H_j(Q_j, P_j) = \frac{1}{2}P_j^2 + \frac{1}{2}\omega_j^2 Q_j^2$  dei modi normali.
- Il moto di Eulero-Poinsot, ovvero il moto di un corpo rigido con un punto fisso in assenza di forze ( $n = 3$ ): l'energia cinetica  $T$ , il quadrato del momento angolare  $M^2$ , la terza componente del momento angolare  $M_z$ .

(verificare per esercizio che in ciascun esempio gli integrali primi citati sono effettivamente in involuzione).

Un risultato notevole della teoria dei sistemi hamiltoniani asserisce che l'esistenza di  $n$  integrali primi indipendenti ed in involuzione è condizione anche sufficiente per la completa integrabilità di un sistema. In altri termini, è possibile in tal caso integrare le equazioni del moto a meno di operazioni "elementari" (inversione di funzioni e quadrature). Inoltre, analogamente a quanto visto

nel caso di forze elastiche (vedi Esempio 4.5), è possibile introdurre coordinate angolo-azione per descrivere i moti limitati sui livelli non critici degli integrali primi. Più precisamente vale il seguente teorema, di cui non daremo la dimostrazione.

TEOREMA 4.8 (Liouville-Arnold). *Consideriamo un sistema hamiltoniano*

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \end{cases} \quad (q, p) \in U \subseteq \mathbb{R}^{2n}, \quad H : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Supponiamo che esistano  $n$  integrali primi del moto,  $F_1 = H, F_2, \dots, F_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $\{F_i, F_j\} = 0$  per ogni  $i, j = 1, \dots, n$ . Per ogni  $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$  sia  $M_f = \{(q, p) \in U : F_i(q, p) = f_i \quad \forall i = 1, \dots, n\}$ . Supponiamo che per un certo  $f_0 \in \mathbb{R}^n$  l'insieme  $M_{f_0}$  è compatto, connesso ed inoltre

$$\text{rango} \frac{\partial (F_1, \dots, F_n)}{\partial (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} = n \quad \text{su } M_{f_0}.$$

Allora

- (1)  $M_{f_0}$  è una superficie regolare, diffeomorfa al toro  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$ , ed invariante sotto il flusso  $\Phi_H^t$ .
- (2) Il flusso di fase su  $M_{f_0}$  è quasi periodico, ovvero se  $\theta$  sono coordinate angolari sul  $M_{f_0}$  allora  $\dot{\theta} = \omega(f_0)$ .
- (3) Le equazioni del moto si integrano per quadratura.
- (4) In un intorno  $\mathcal{F}$  di  $f_0$  l'insieme

$$M_{\mathcal{F}} = \cup_{f \in \mathcal{F}} M_f$$

è diffeomorfo al prodotto cartesiano  $\mathcal{F} \times M_{f_0}$ . Inoltre esiste una trasformazione canonica,

$$M_{\mathcal{F}} \approx \mathcal{F} \times M_{f_0} \ni (q, p) \rightarrow (\theta, I) \in \mathbb{T}^n \times \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

tale che le variabili  $I$  sono funzioni invertibili delle  $f$ ,  $I = I(f)$ , per cui  $\tilde{F}_j(\theta, I) = f_j(I)$ . In particolare  $\tilde{H}(\theta, I) = f_1(I) = h(I)$ , cosicché le equazioni del moto nelle nuove coordinate si scrivono

$$\dot{\theta} = \frac{\partial h}{\partial I}(I) = \omega(f(I)), \quad \dot{I} = 0.$$

L'idea della dimostrazione è quella di utilizzare come coordinate su  $M_{f_0}$  i tempi associati ai flussi hamiltoniani  $\Phi_{F_j}^t$ . A tal scopo osserviamo che si può dimostrare che la condizione  $\{F_i, F_j\} = 0$  implica la commutatività dei corrispondenti flussi hamiltoniani:  $\Phi_{F_i}^t \circ \Phi_{F_j}^s = \Phi_{F_j}^s \circ \Phi_{F_i}^t$  per ogni  $s, t \in \mathbb{R}$ . Questo permette di definire l'azione del gruppo commutativo di  $\mathbb{R}^n$  sullo spazio delle fasi ponendo

$$\Phi_F^\tau : U \rightarrow U, \quad \Phi_F^\tau = \Phi_{F_1}^{\tau_1} \circ \dots \circ \Phi_{F_n}^{\tau_n}, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$$

(essendo, per la commutatività dei flussi,  $\Phi_F^{\tau_1+\tau_2} = \Phi_F^{\tau_1} \circ \Phi_F^{\tau_2}$  per ogni  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}^n$ ). La superficie  $M_{f_0}$  è invariante sotto l'azione di  $\Phi_F^\tau$  e le variabili  $\tau$  definiscono delle coordinate su  $M_{f_0}$ . A partire da queste si costruiscono quindi delle variabili angolari su  $M_{f_0}$  che danno luogo ad un moto quasi periodico.

#### 4.5. Nota bibliografica

Per gli argomenti trattati in questo capitolo si può fare riferimento al testo di Arnold sotto riportato.

- 1) V.I. Arnold. *Metodi matematici della meccanica classica*. Roma: Editori Riuniti, 1979.



## Dinamica iperbolica

### 5.1. Teorema delle varietà stabile ed instabile

Consideriamo un'equazione differenziale autonoma,

$$\dot{x} = \nu(x), \quad x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n, \quad \nu \in C^\ell(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n), \quad \ell \geq 1.$$

Supponiamo che il campo vettoriale abbia un punto singolare iperbolico  $x_0 \in \mathcal{D}$ . Senza perdere di generalità possiamo assumere  $x_0 = 0$ . Dunque:

$$\nu(x) = Lx + \hat{\nu}(x), \tag{5.1}$$

dove  $L \doteq D\nu(0)$  non possiede autovalori immaginari puri. Il resto  $\hat{\nu}$  è un infinitesimo di ordine superiore:  $\hat{\nu}(0) = 0$  e  $D\hat{\nu}(0) = 0$ . Indichiamo con  $E^+$  [risp.  $E^-$ ] il sottospazio stabile [risp. instabile] del flusso iperbolico lineare  $\dot{x} = Lx$ , vedi Sezione 2.6. Assumiamo che le coordinate siano adattate alla decomposizione  $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$  in modo tale che:

$$E^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \begin{pmatrix} x^+ \\ 0 \end{pmatrix}, x^+ \in \mathbb{R}^{n_+} \right\},$$

$$E^- = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \begin{pmatrix} 0 \\ x^- \end{pmatrix}, x^- \in \mathbb{R}^{n_-} \right\},$$

essendo  $n_\pm = \dim E^\pm$  (mediante una trasformazione lineare possiamo sempre ridurci a tale situazione, vedi Sezione 2.6). In particolare, la matrice  $L$  ha la forma a blocchi:

$$L = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

con  $A \in \mathcal{M}_{n_+}$  una contrazione in  $E^+$  e  $B \in \mathcal{M}_{n_-}$  una espansione in  $E^-$ . Definiti i proiettori:

$$\pi_\pm : \mathbb{R}^n \rightarrow E^\pm \quad : \quad \pi_+ x = \begin{pmatrix} x^+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_- x = \begin{pmatrix} 0 \\ x^- \end{pmatrix} \quad \forall x = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

si ha perciò:

$$Lx = \pi_+ Lx + \pi_- Lx = L\pi_+ x + L\pi_- x = \begin{pmatrix} Ax^+ \\ Bx^- \end{pmatrix},$$

$$e^{Lt} x = \pi_+ e^{Lt} x + \pi_- e^{Lt} x = e^{Lt} \pi_+ x + e^{Lt} \pi_- x = \begin{pmatrix} e^{At} x^+ \\ e^{Bt} x^- \end{pmatrix}.$$

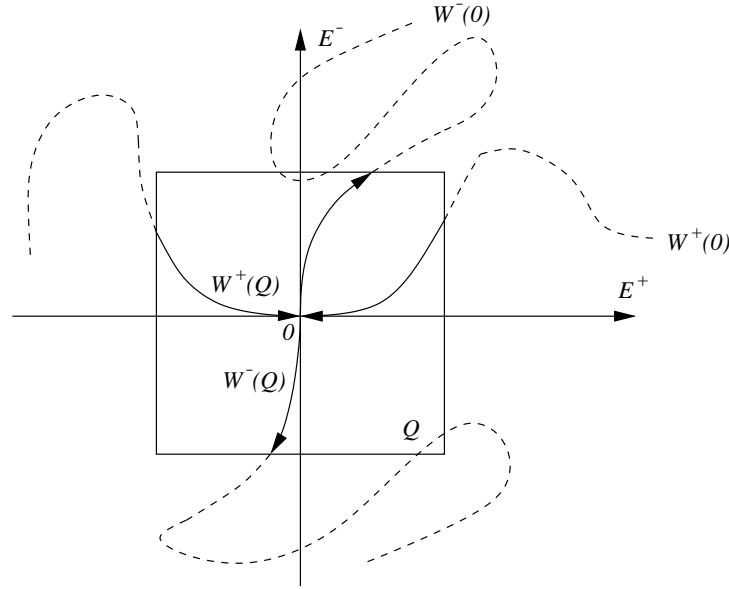


FIGURA 5.1. Varietà stabile ed instabile.

Assumiamo inoltre che le coordinate siano adattate, quando ristrette al sotto-spazio  $E^+$  [risp.  $E^-$ ], alla contrazione  $A$  [risp. all'espansione  $B$ ]. In altri termini, per opportune costanti  $\alpha, \beta > 0$ ,

$$\begin{cases} \langle \pi_+ x, L\pi_+ x \rangle = \langle x^+, Ax^+ \rangle \leq -\alpha |x^+|^2 = -\alpha |\pi_+ x|^2, \\ \langle \pi_- x, L\pi_- x \rangle = \langle x^-, Bx^- \rangle \geq \beta |x^-|^2 = \beta |\pi_- x|^2, \end{cases} \quad (5.3)$$

(vedi Teorema 2.9). In particolare, vedi Teorema 2.10, per ogni  $t \geq 0$ ,

$$\begin{cases} |e^{Lt} \pi_+ x| = |e^{At} x^+| \leq e^{-\alpha t} |x^+| = e^{-\alpha t} |\pi_+ x|, \\ |e^{-Lt} \pi_- x| = |e^{-Bt} x^-| \leq e^{-\beta t} |x^-| = e^{-\beta t} |\pi_- x|. \end{cases} \quad (5.4)$$

Vogliamo ora mostrare che in un intorno di  $x = 0$  il flusso non lineare possiede una struttura simile. Fissiamo  $\rho > 0$  piccolo abbastanza in modo tale che, posto

$$Q \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |\pi_+ x| < \rho, |\pi_- x| < \rho\}, \quad (5.5)$$

sia  $Q \subset \mathcal{D}$ . Definiamo *varietà stabile locale* del punto iperbolico  $x = 0$  l'insieme:

$$W^+(Q) \doteq \left\{ x \in Q : \varphi^t(x) \in Q \ \forall t \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = 0 \right\}$$

e, analogamente, *varietà instabile locale* del punto iperbolico  $x = 0$  l'insieme:

$$W^-(Q) \doteq \left\{ x \in Q : \varphi^{-t}(x) \in Q \ \forall t \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^{-t}(x) = 0 \right\}.$$

**TEOREMA 5.1.** *Se  $\rho$  è sufficientemente piccolo le varietà  $W^\pm(Q)$  sono non vuote. Inoltre:*

$$W^+(Q) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \in Q : x^- = h(x^+) \right\},$$

con  $h$  di classe  $C^\ell$  tale che  $h(0) = 0$  e  $Dh(0) = 0$ . Analogamente per  $W^-(Q)$ .

Quindi  $W^\pm(Q)$  sono effettivamente delle varietà differenziabili (in particolare grafici di funzioni), il cui spazio tangente nell'origine coincide con i sottospazi  $E^\pm$ :  $T_0W^\pm(Q) = E^\pm$ . Qualora  $\varphi^t$  è un flusso di fase su  $\mathcal{D}$  (ovvero tutte le soluzioni di  $\dot{x} = v(x)$  esistono globali), definiamo le *varietà stabile ed instabile globali* del punto iperbolico  $x = 0$  gli insiemi:

$$W^+(0) \doteq \left\{ x \in \mathcal{D} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = 0 \right\} = \bigcup_{t \geq 0} \varphi^{-t}(W^+(Q)), \quad (5.6)$$

$$W^-(0) \doteq \left\{ x \in \mathcal{D} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^{-t}(x) = 0 \right\} = \bigcup_{t \geq 0} \varphi^t(W^-(Q)). \quad (5.7)$$

Si osservi che le varietà  $W^\pm(0)$  sono insiemi invarianti per il flusso  $\varphi^t$ , mentre  $W^+(Q)$  [risp.  $W^-(Q)$ ] è positivamente [risp. negativamente] invariante.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  una funzione infinitamente derivabile, a supporto compatto e tale che  $\eta(s) = 1$  se  $s \leq 1$ ,  $\eta(s) = 0$  se  $s \geq 2$  e  $|\eta'(s)| \leq 2$  per ogni  $s \in \mathbb{R}_+$ . Poniamo:

$$g(x) \doteq \hat{v}(x)\eta(\varepsilon^{-1}|x|),$$

con  $\hat{v}(x)$  come in (5.1) ed  $\varepsilon > 0$  un parametro da fissare in seguito. Chiaramente:

$$\|g\|_\infty \leq \sup_{|x| \leq 2\varepsilon} |\hat{v}(x)|.$$

Inoltre, poiché  $Dg(x) = \eta(\varepsilon^{-1}|x|)D\hat{v}(x) + (\varepsilon|x|)^{-1}\eta'(\varepsilon^{-1}|x|)x \otimes \hat{v}(x)$ ,

$$\|Dg\|_\infty \leq \sup_{|x| \leq 2\varepsilon} \|D\hat{v}(x)\| + 2\varepsilon^{-1} \sup_{|x| \leq 2\varepsilon} |\hat{v}(x)|.$$

Essendo  $\hat{v}(0) = 0$  e  $D\hat{v}(0) = 0$  concludiamo che:

$$\|g\|_\infty + \|Dg\|_\infty < \delta,$$

con  $\delta \rightarrow 0$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ . D'altra parte è evidente che nella palla  $B_\varepsilon(0)$  le soluzioni di  $\dot{x} = v(x)$  e  $\dot{x} = Lx + g(x)$  coincidono (essendo  $g(x) = \hat{v}(x)$  in tale regione). Il Teorema 5.1 è allora un corollario immediato della proposizione seguente.  $\square$

**PROPOSIZIONE 5.2.** *Sia  $t \mapsto \varphi^t(\cdot)$  il flusso di fase generato dalla legge:*

$$\dot{x} = Lx + g(x), \quad (5.8)$$

con  $L$  come in (5.2) e  $g \in C^\ell(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ,  $\ell \geq 1$ , tale che  $g(0) = 0$ ,  $Dg(0) = 0$ ,  $\|g\|_\infty + \|Dg\|_\infty < \delta$ . Siano infine  $\alpha, \beta > 0$  come nell'Eq. (5.4). Fissato  $\lambda_0 \in (0, \alpha)$  esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $\lambda \in [0, \lambda_0]$ ,

$$\begin{aligned} W^+(0) &\doteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sup_{t \geq 0} |\varphi^t(x)| < +\infty \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \pi_- x = h(\pi_+ x) \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |\pi_\pm \varphi^t(x)| \leq e^{-\lambda t} |\pi_\pm x| \quad \forall t \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = 0 \right\}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

con  $h \in C^\ell(E^+; E^-)$  tale che  $h(0) = 0$ ,  $Dh(0) = 0$  e  $|h(a)| \leq |a|$  per ogni  $a \in E^+$ . In particolare, per ogni  $\rho > 0$  e  $Q$  come in (5.5), la varietà stabile locale è:

$$W^+(Q) = \left\{ x \in W^+(0) : |\pi_+ x| < \rho \right\}.$$

Analoghe affermazioni sono valide per  $\varphi^{-t}(\cdot)$  con  $\lambda_0 \in (0, \beta)$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $t \mapsto x(t)$  una soluzione dell'Eq. (5.8) che rimane limitata nel futuro. Allora essa è soluzione della seguente equazione integrale:

$$x(t) = e^{Lt} \pi_+ x(0) + \int_0^t ds e^{L(t-s)} \pi_+ g(x(s)) - \int_t^{+\infty} ds e^{L(t-s)} \pi_- g(x(s)). \quad (5.10)$$

In effetti, se  $t \mapsto x(t)$  risolve (5.8) allora:

$$x(t) = e^{Lt} x(0) + \int_0^t ds e^{L(t-s)} g(x(s)),$$

da cui, proiettando,

$$\pi_+ x(t) = e^{Lt} \pi_+ x(0) + \int_0^t ds e^{L(t-s)} \pi_+ g(x(s)), \quad (5.11)$$

$$\pi_- x(t) = e^{Lt} \pi_- x(0) + \int_0^t ds e^{L(t-s)} \pi_- g(x(s)). \quad (5.12)$$

Moltiplicando ambo i membri della (5.12) per  $e^{-Lt}$  si ha:

$$\pi_- x(0) = e^{-Lt} \pi_- x(t) - \int_0^t ds e^{-Ls} \pi_- g(x(s)). \quad (5.13)$$

Ma, per le stime (5.4),

$$|e^{-Lt} \pi_- x(t)| \leq e^{-\beta t} |\pi_- x(t)| \leq e^{-\beta t} \sup_{s \geq 0} |x(s)|,$$

cosicché, se  $x(t)$  è limitata nel futuro, nel limite  $t \rightarrow +\infty$  l'uguaglianza (5.13) diventa:

$$\pi_- x(0) = - \int_0^{+\infty} ds e^{-Ls} \pi_- g(x(s)). \quad (5.14)$$

Essendo  $x(t) = \pi_+ x(t) + \pi_- x(t)$ , dalle uguaglianze (5.11), (5.12) e (5.14) otteniamo l'identità (5.10).

Viceversa, ogni soluzione continua  $t \mapsto x(t)$  dell'Eq. (5.10) è una soluzione limitata nel futuro dell'Eq. (5.8). Infatti si verifica facilmente che  $x(t)$  è una funzione differenziabile tale che  $\dot{x}(t) = Lx(t) + g(x(t))$ . Inoltre, per le stime (5.4) ed essendo  $\|g\|_\infty < \delta$ ,

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq e^{-\alpha t} |\pi_+ x(0)| + \int_0^t ds \delta e^{-\alpha(t-s)} + \int_t^{+\infty} ds \delta e^{\beta(t-s)} \\ &\leq |x(0)| + \delta \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

In conclusione, l'insieme delle soluzioni limitate nel futuro dell'Eq. (5.8) coincide con l'insieme delle soluzioni continue dell'Eq. (5.10).

Sia  $\mathcal{C}_0$  lo spazio delle funzioni continue e limitate di  $\mathbb{R}_+$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ , dotato della norma uniforme:

$$\mathcal{C}_0 \doteq \{x \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n) : \|x\|_\infty < +\infty\}.$$

Definiamo  $F : E^+ \times \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$ ,  $(a, x) \mapsto F(a, x) = F_a(x)$ , come segue:

$$F_a(x)(t) \doteq e^{Lt} a + \int_0^t ds e^{L(t-s)} \pi_+ g(x(s)) - \int_t^{+\infty} ds e^{L(t-s)} \pi_- g(x(s)).$$

Osserviamo che la definizione è ben posta, ovvero  $F_a(x) \in \mathcal{C}_0$  per  $x \in \mathcal{C}_0$ . Infatti, analogamente a (5.15), stimiamo  $|F_a(x)(t)| \leq |a| + \delta(\alpha^{-1} + \beta^{-1})$  per ogni  $t \geq 0$ .

Chiaramente una soluzione dell'Eq. (5.10) è un punto fisso della mappa  $x \mapsto F_a(x)$  con  $a = \pi_+ x(0)$ . Viceversa, se  $t \mapsto x(t)$  è punto fisso di  $x \mapsto F_a(x)$  allora:

$$x(0) = a - \int_0^{+\infty} ds e^{-Ls} \pi_- g(x(s)),$$

da cui, proiettando,

$$\pi_+ x(0) = a, \quad \pi_- x(0) = - \int_0^{+\infty} ds e^{-Ls} \pi_- g(x(s)),$$

cosicché  $t \mapsto x(t)$  è soluzione dell'Eq. (5.10) con  $\pi_+ x(0) = a$ .

Si ha ora, nuovamente per le disuguaglianze (5.4),

$$\begin{aligned} |F_a(x) - F_b(y)|(t) &\leq |e^{Lt}(a-b)| + \int_0^t ds |e^{L(t-s)} \pi_+ [g(x(s)) - g(y(s))]| \\ &\quad + \int_t^{+\infty} ds |e^{L(t-s)} \pi_- [g(x(s)) - g(y(s))]| \\ &\leq e^{-\alpha t} |a-b| + \int_0^t ds e^{-\alpha(t-s)} |g(x(s)) - g(y(s))| \\ &\quad + \int_t^{+\infty} ds e^{\beta(t-s)} |g(x(s)) - g(y(s))| \\ &\leq e^{-\alpha t} |a-b| + \int_0^t ds \delta e^{-\alpha(t-s)} |x(s) - y(s)| \\ &\quad + \int_t^{+\infty} ds \delta e^{\beta(t-s)} |x(s) - y(s)| \end{aligned}$$

(nell'ultima stima si è utilizzato  $\|Dg\|_\infty < \delta$ ). D'altra parte:

$$\int_0^t ds e^{-\alpha(t-s)} |x(s) - y(s)| \leq \|x - y\|_\infty \int_0^t ds e^{-\alpha(t-s)} \leq \frac{1}{\alpha} \|x - y\|_\infty,$$

e, analogamente,

$$\int_t^{+\infty} ds e^{\beta(t-s)} |x(s) - y(s)| \leq \frac{1}{\beta} \|x - y\|_\infty.$$

In definitiva:

$$\|F_a(x) - F_b(y)\|_\infty \leq |a-b| + \delta \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \|x - y\|_\infty.$$

Fissiamo  $\delta$  tale che:

$$\delta \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \leq \frac{1}{2}, \quad (5.16)$$

cosicché:

$$\|F_a(x) - F_b(y)\|_\infty \leq |a - b| + \frac{1}{2} \|x - y\|_\infty. \quad (5.17)$$

Ponendo  $b = a$  segue in particolare che  $F_a : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$  è una contrazione per ogni  $a \in E^+$ , per cui esiste un'unica funzione  $t \mapsto x_a(t)$  tale che  $x_a = F_a(x_a)$ . Quindi  $x_a$  è l'unica soluzione limitata nel futuro dell'Eq. (5.8) tale che  $\pi_+ x_a(0) = a$ , ed al variare di  $a \in E^+$  otteniamo tutte tali soluzioni:  $W^+(0) = \{x_a(0) : a \in E^+\}$ . Inoltre, dalla stima (5.17) si ricava che  $\|x_a - x_b\|_\infty \leq 2|a - b|$ . Ma  $x_a = 0$  se  $a = 0$  poiché  $g(0) = 0$ , per cui:

$$\|x_a\|_\infty \leq 2|a|. \quad (5.18)$$

La prima identità dell'Eq. (5.9) si ottiene definendo  $h : E^+ \rightarrow E^-$  tale che  $h(a) \doteq \pi_- x_a(0)$ . Occorre dimostrare che  $h$  è di classe  $C^\ell$ , che  $Dh(0) = 0$  e che  $|h(a)| \leq |a|$ . Ci limitiamo qui al caso  $\ell = 1$ , la generalizzazione non è difficile. Ricordando la (5.14),

$$h(a) = - \int_0^{+\infty} ds e^{-Ls} \pi_- g(x_a(s)),$$

da cui:

$$Dh(a) = - \int_0^{+\infty} ds e^{-Ls} \pi_- Dg(x_a(s)) \frac{\partial x_a}{\partial a}(s), \quad (5.19)$$

provvisto che  $a \mapsto x_a$  è una mappa differenziabile di  $E^+$  in  $\mathcal{C}_0$ . Per dimostrare quest'ultima affermazione utilizziamo il teorema della funzione implicita su spazi di Banach. Sia  $G : E^+ \times \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$  tale che  $G(a, x) \doteq F(a, x) - x$ . Sappiamo che la funzione  $a \mapsto x_a$  fornisce l'unica esplicitazione dell'equazione  $G(a, x) = 0$ , ovvero  $G(a, x_a) = 0$  per ogni  $a \in E^+$ . Per il teorema della funzione implicita, se esistono continue le funzioni

$$(a, x) \mapsto D_x G \in L(\mathcal{C}_0; \mathcal{C}_0), \quad (a, x) \mapsto D_a G \in L(E^+; \mathcal{C}_0),$$

e l'operatore  $D_x G$  è invertibile, allora la mappa  $a \mapsto x_a$  di  $E^+$  in  $\mathcal{C}_0$  è differenziabile ed inoltre:

$$D_a x_a = \frac{\partial x_a}{\partial a}(\cdot) = -[D_x G(a, x_a)]^{-1} D_a G(a, x_a).$$

Ma le derivate di  $G$  le calcoliamo esplicitamente:

i) Si ha:

$$\begin{aligned} F(a, x + \xi) - F(a, x) &= \int_0^t ds e^{L(t-s)} \pi_+ Dg(x(s)) \xi(s) \\ &\quad - \int_t^{+\infty} ds e^{L(t-s)} \pi_- Dg(x(s)) \xi(s) + \mathcal{O}(\|\xi\|_\infty^2), \end{aligned}$$

per cui

$$D_x F(a, x) \xi(t) = \int_0^t ds e^{L(t-s)} \pi_+ Dg(x(s)) \xi(s) - \int_t^{+\infty} ds e^{L(t-s)} \pi_- Dg(x(s)) \xi(s).$$

Inoltre, procedendo come nella dimostrazione della stima (5.17), otteniamo che  $\|D_x F_a(x)\xi\|_\infty \leq \|\xi\|_\infty/2$ . Ne segue che  $D_x G(a, x) = D_x F(a, x) - \mathbb{I}$  è invertibile:

$$D_x G(a, x)^{-1} = -[\mathbb{I} - D_x F(a, x)]^{-1} = -\sum_{k \geq 0} [D_x F(a, x)]^k,$$

la serie essendo assolutamente convergente nella norma forte di  $L(\mathcal{C}_0; \mathcal{C}_0)$ .

ii) Poiché  $G(a+b, x) - G(a, x) = e^{Lt}b$ , si ha  $D_a G(a, x) = e^{Lt}$ , nel senso che ad ogni  $b \in E^+$  associamo la funzione  $t \mapsto [D_a G(a, x)b](t) = e^{Lt}b$ .

Concludiamo che la funzione jacobiana  $a \mapsto Dh(a)$  esiste continua ed è fornita dall'espressione (5.19). In particolare  $Dh(0) = 0$ . Infine, utilizzando  $\|g\|_\infty < \delta$  e la stime (5.16),

$$|h(a)| \leq \int_0^{+\infty} ds 2|a|\delta e^{-\beta s} \leq 2|a|\frac{\delta}{\beta} \leq |a|.$$

Rimane da dimostrare la seconda identità dell'Eq. (5.9) (dopodiché l'ultima è conseguenza delle precedenti). Fissato  $\lambda_0 \in (0, \alpha)$  assumiamo  $\delta$  tale che, oltre alla (5.16), sia  $\delta \leq (\alpha - \lambda_0)/2$ . Posto  $y(t) \doteq \pi_+ x_a(t)$ , si ha allora, per ogni  $\lambda \in [0, \lambda_0]$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|y(t)|^2 &= 2\langle y(t), Ly(t) \rangle + 2\langle y(t), \pi_+ g(y(t) + h(y(t))) \rangle \\ &\leq -2\alpha|y(t)|^2 + 2\delta|y(t)|(|y(t)| + |h(y(t))|) \\ &\leq -2(\alpha - 2\delta)|y(t)|^2 \leq -2\lambda|y(t)|^2, \end{aligned}$$

avendo utilizzato la stima (5.3),  $\|Dg\|_\infty < \delta$  e  $|h(y)| \leq |y|$ . Integrando la precedente disequazione differenziale troviamo, per ogni  $t \geq 0$ ,  $|y(t)| \leq e^{-\lambda t}|y(0)|$ , ovvero  $|\pi_+ x_a(t)| \leq e^{-\lambda t}|a|$ ; infine  $|\pi_- x_a(t)| = |h(\pi_+ x_a(t))| \leq |\pi_+ x_a(t)| \leq e^{-\lambda t}|a|$ .  $\square$

Le varietà stabile ed instabile globali definite in (5.6) e (5.7) non sono, in generale, grafici di funzioni  $h_\pm : E^\pm \rightarrow E^\mp$ , e possono avere una struttura molto complicata.

ESEMPIO 5.1. Consideriamo il sistema meccanico:

$$\ddot{x} = x - x^3 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = x - x^3 \end{cases}$$

Il punto singolare  $(x, v) = (0, 0)$  è iperbolico, essendo:

$$L = \frac{\partial(\dot{x}, \dot{v})}{\partial(x, v)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \sigma(L) = \{-1; 1\}.$$

Dal calcolo degli autovettori associati si ricava che  $E^\pm = \{(x, v) : v = \pm x\}$ . Le curve di fase del sistema giacciono sulle linee di livello dell'energia  $E(x, v) = v^2/2 + x^4/4 - x^2/2$ . In particolare le varietà stabile ed instabile globali coincidono:  $W^+(0) = W^-(0) = \{(x, v) : E(x, v) = 0\}$ . In effetti, il livello critico di energia  $E(x, v) = 0$  è costituito dall'unione dell'orbita stazionaria del punto singolare  $(0, 0)$  con le orbite dei due moti a meta asintotica verso quest'ultimo.

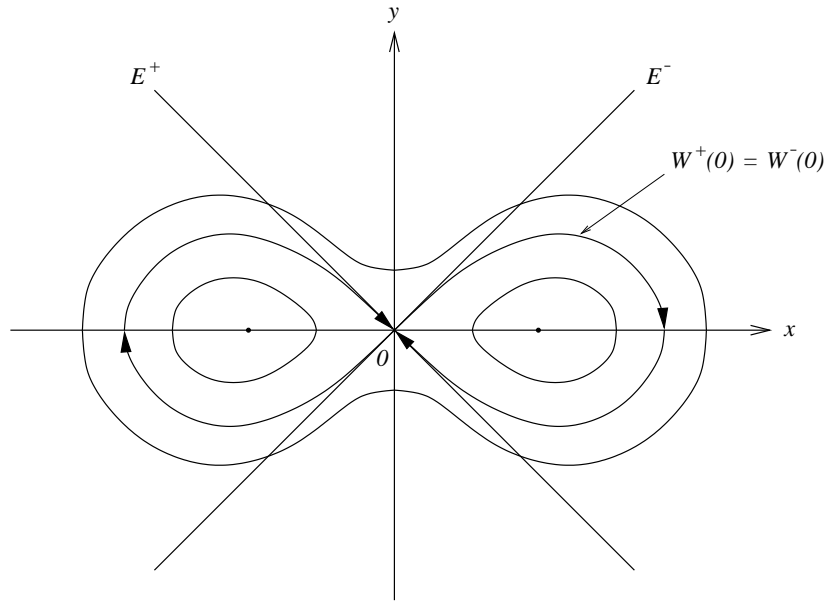


FIGURA 5.2. Varietà stabile ed instabile dell'Esempio 5.1.

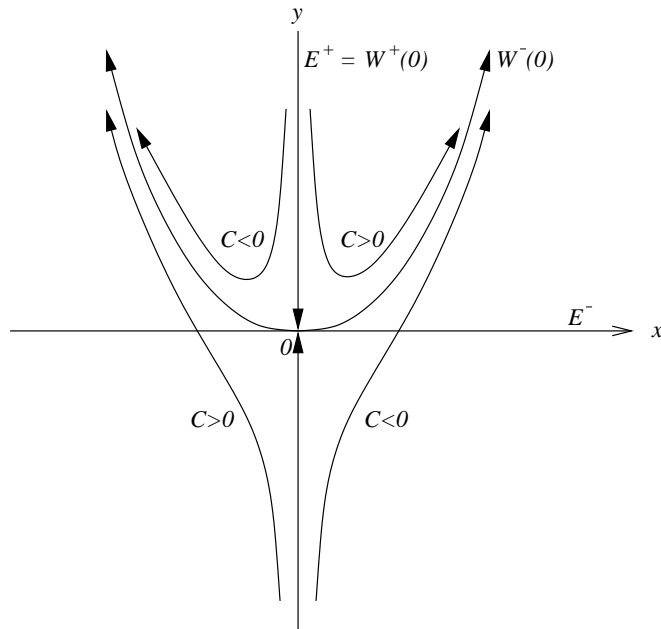


FIGURA 5.3. Varietà stabile ed instabile dell'Esempio 5.2.

ESEMPIO 5.2. Consideriamo il sistema piano:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

Il punto singolare  $(x, y) = (0, 0)$  è iperbolico, essendo:

$$L = \frac{\partial(\dot{x}, \dot{y})}{\partial(x, y)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \sigma(L) = \{-1; 1\}.$$

Ovviamente  $E^+ = \{(x, y) : x = 0\}$ ,  $E^- = \{(x, y) : y = 0\}$ . Cerchiamo le curve di fase del sistema. Notiamo che se  $x(0) = 0$  allora  $x(t) = 0$  ed  $y(t) = y(0)e^{-t}$ , cosicché  $E^+$  è invariante anche per la dinamica non lineare. Sull'insieme invariante  $\mathbb{R}^2 \setminus E^+$  le curve di fase sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x - \frac{y}{x}.$$

Questa si può risolvere esplicitamente ponendo  $y(x) = x^2\alpha(x)$  e determinando  $\alpha(x)$  per separazione delle variabili. Si trova in tal modo l'integrale generale:

$$y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Concludiamo che:

$$W^+(0) = E^+ = \{(x, y) : x = 0\}, \quad W^-(0) = \{(x, y) : y = \frac{x^2}{3}\}.$$

## 5.2. Punti fissi iperbolici

Invece di flussi di fase consideriamo ora evoluzioni con tempi discreti, più precisamente iterazione di un diffeomorfismo:

$$x_{k+1} = \psi(x_k), \quad \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad C^\ell\text{-diffeomorfismo}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Supponiamo che  $x = 0$  sia un punto fisso di  $\psi$ , quindi  $\psi(0) = 0$ . Analogamente al caso del flusso di fase, scriviamo:

$$x_{k+1} = Lx_k + \hat{\psi}(x_k), \quad L \doteq D\psi(0),$$

cosicché  $\hat{\psi}(0) = 0$  e  $D\hat{\psi}(0) = 0$ . Si osservi che, essendo  $\psi$  un diffeomorfismo, l'operatore  $L$  è invertibile, dunque  $0 \notin \sigma(L)$ , ed  $L^{-1} = D\psi^{-1}(0)$ . Il punto fisso  $x = 0$  è detto *iperbolico* se l'operatore  $L$  non possiede autovalori sulla circonferenza unitaria del piano complesso:  $\sigma(L) \cap S_1 = \emptyset$ , dove  $S_1 \doteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

Al pari dei flussi lineari iperbolici, il comportamento delle iterazioni di una mappa lineare iperbolica è piuttosto semplice. Caratterizziamo dapprima il caso in cui tutti gli autovalori hanno modulo minore di uno. Diciamo che la mappa lineare  $B$  è una *contrazione lineare* se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Vale allora il seguente risultato.

**TEOREMA 5.3.** *Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- a)  $B$  è una contrazione lineare;
- b)  $|\lambda| < 1$  per ogni  $\lambda \in \sigma(B)$ ;
- c) Esistono  $\mu \in (0, 1)$  ed una norma  $|\cdot|_*$  su  $\mathbb{R}^n$  tali che  $|Bx|_* \leq \mu|x|_* \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

DIMOSTRAZIONE. Si ha:

$c) \implies a)$ : Ovvio.

$a) \implies b)$ : Supponiamo per assurdo che esista  $\lambda \in \sigma(B)$  tale che  $|\lambda| \geq 1$ . Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  esiste  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ , tale che  $Bv = \lambda v$ , cosicché  $|B^k v| = |\lambda|^k |v| \geq |v|$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , contraddicendo  $a)$ . Se invece  $\lambda = \mu + i\omega \in \mathbb{C}$  esistono  $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^n$  tali che il sottospazio bidimensionale  $E$  da essi generato è invariante e la restrizione di  $B$  ad  $E$  nella base  $\{f_1; f_2\}$  è rappresentata dalla matrice  $\begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$ . Nella norma di  $E$ ,  $|\cdot|_E$ , canonica rispetto alla base  $\{f_1; f_2\}$ , si ha:

$$|Bv|_E^2 = \langle v, B^T Bv \rangle_E = (\mu^2 + \omega^2)|v|_E^2 = |\lambda|^2 |v|_E^2 \quad \forall v \in E,$$

cosicché, se  $v \in E$ ,  $v \neq 0$ , allora  $|B^k v|_E \geq |v|_E$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , nuovamente contraddicendo  $a)$ .

$b) \implies c)$ : Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  gli autovalori reali e  $\mu_1 \pm i\omega_1, \dots, \mu_r \pm i\omega_r$  gli autovalori complessi di  $B$ , ciascuno contato con la propria molteplicità algebrica, cosicché  $n = p + 2r$ . Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 2.9, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una trasformazione non singolare  $S_\varepsilon$  tale che

$$B_\varepsilon \doteq S_\varepsilon^{-1} B S_\varepsilon = B_0 + R_\varepsilon, \quad \|R_\varepsilon\| = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad B_0 = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix},$$

dove

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_{p-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

e

$$T = \begin{pmatrix} \mu_1 & -\omega_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \omega_1 & \mu_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \mu_2 & -\omega_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \omega_2 & \mu_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mu_{r-1} & -\omega_{r-1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \omega_{r-1} & \mu_{r-1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu_r & -\omega_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \omega_r & \mu_r \end{pmatrix}.$$

Nel prodotto scalare indotto dalla trasformazione  $x = S_\varepsilon y$ ,  $\langle x, x' \rangle_\varepsilon \doteq \langle y, y' \rangle$ , si ha:

$$\begin{aligned} |Bx|_\varepsilon^2 &= \langle Bx, Bx \rangle_\varepsilon = \langle B_\varepsilon y, B_\varepsilon y \rangle = \langle y, B_\varepsilon^T B_\varepsilon y \rangle \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 y_i^2 + \sum_{j=1}^r (\mu_j^2 + \omega_j^2) (y_{p+2j-1}^2 + y_{p+2j}^2) \\ &\quad + \langle y, (B_0^T R_\varepsilon + R_\varepsilon^T B_0 + R_\varepsilon^T R_\varepsilon) y \rangle \\ &\leq \left[ \max_{\lambda \in \sigma(B)} |\lambda|^2 + C\varepsilon \right] |y|^2 = \left[ \max_{\lambda \in \sigma(B)} |\lambda|^2 + C\varepsilon \right] |x|_\varepsilon^2, \end{aligned}$$

con  $C$  una costante opportuna. Se  $\varepsilon > 0$  è sufficientemente piccolo allora  $\mu = \sqrt{\max_{\lambda \in \sigma(B)} |\lambda|^2 + C\varepsilon} < 1$ , cosicché il punto c) segue con  $|\cdot|_* = |\cdot|_\varepsilon$ .  $\square$

Consideriamo ora il caso generale di una mappa lineare iperbolica.

**TEOREMA 5.4.** *Sia  $L \in \mathcal{M}_n$  tale che  $\sigma(L) \cap S_1 = \emptyset$ . Allora esiste una decomposizione dello spazio delle fasi:*

$$\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-, \quad E^\pm = \pi_\pm \mathbb{R}^n,$$

dove  $\pi_\pm$  sono operatori di proiezione,  $\pi_+ + \pi_- = \mathbb{I}$ ,  $E^\pm$  sono sottospazi invarianti rispetto ad  $L$ , tali che esistono costanti  $C > 0$ ,  $\theta_+ \in (0, 1)$  e  $\theta_- \in (0, 1)$  per cui:

$$\begin{cases} |L^k \pi_+ x| \leq C \theta_+^k |\pi_+ x| \\ |L^{-k} \pi_- x| \leq C \theta_-^k |\pi_- x| \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.20)$$

Inoltre  $C = 1$  per una scelta opportuna della norma su  $\mathbb{R}^n$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Procedendo come nella dimostrazione del Teorema 2.11 possiamo determinare due sottospazi invarianti  $E^\pm$  tali che, detta  $L_+$  [risp.  $L_-$ ] la restrizione  $L$  ad  $E^+$  [risp. ad  $E^-$ ], si ha  $\sigma(L_+) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  [risp.  $\sigma(L_-) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ ]. Inoltre, essendo allora  $L_+$  [risp.  $L_-^{-1}$ ] contrazioni lineari, le stime (5.20) sono conseguenza del Teorema 5.3 e dell'equivalenza delle norme.  $\square$

Affrontiamo finalmente il caso non lineare introdotto all'inizio della sezione. Analogamente al caso dei flussi di fase si dimostra l'esistenza delle *varietà stabile ed instabile locali* del punto fisso iperbolico  $x = 0$ : utilizzando la norma per cui  $C = 1$  nel Teorema 5.4 e definendo  $Q$  come in (5.5), per  $\rho$  sufficientemente piccolo si ha:

$$\begin{aligned} W^+(Q) &\doteq \left\{ x \in Q : \psi^k(x) \in Q \quad \forall k \geq 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi^k(x) = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in Q : \pi_- x = h^+(\pi_+ x) \right\}, \\ W^-(Q) &\doteq \left\{ x \in Q : \psi^{-k}(x) \in Q \quad \forall k \geq 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi^{-k}(x) = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in Q : \pi_+ x = h^-(\pi_- x) \right\}, \end{aligned}$$

dove  $h^\pm$  sono funzioni di classe  $C^\ell$  tali che  $h^\pm(0) = 0$  e  $Dh^\pm(0) = 0$ , per cui  $W^\pm(Q)$  sono varietà differenziabili (in particolare grafici di funzioni) tali che  $T_0W^\pm(Q) = E^\pm$ . Si definiscono quindi le *varietà stabile ed instabile globali* di  $x = 0$ :

$$W^+(0) \doteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi^k(x) = 0 \right\} = \bigcup_{k \geq 0} \psi^{-k}(W^+(Q)),$$

$$W^-(0) \doteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi^{-k}(x) = 0 \right\} = \bigcup_{k \geq 0} \psi^k(W^-(Q)).$$

La dimostrazione del teorema delle varietà stabile ed instabile nel caso di diffeomorfismi è identica a quella svolta nel caso di flussi. Per completezza forniamo la traccia dei passaggi principali:

1) Si modifica la non linearità e si studia il problema  $x_{k+1} = Lx_k + g(x_k)$  con  $g(0) = 0$ ,  $Dg(0) = 0$  e  $\|g\|_\infty + \|Dg\|_\infty < \delta$ .

2) Si mostra che ogni orbita  $\{x_k; k \in \mathbb{Z}\}$  limitata nel futuro, ovvero tale che  $\sup_{k \geq 0} |x_k| < +\infty$ , soddisfa:

$$x_k = L^k \pi_+ x_0 + \sum_{j=1}^k L^{k-j} \pi_+ g(x_{j-1}) - \sum_{j=k+1}^{+\infty} L^{k-j} \pi_- g(x_{j-1}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

A tal scopo si utilizza l'analogo discreto della formula della variazione delle costanti:

$$x_k = L^k x_0 + \sum_{j=1}^k L^{k-j} g(x_{j-1}) \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

che si ottiene iterando la relazione  $x_k = Lx_{k-1} + g(x_{k-1})$ .

3) Si definisce lo spazio di Banach:

$$\mathcal{C}_0 \doteq \{x = \{x_k; k \in \mathbb{N}\} : \|x\|_\infty < +\infty\}, \quad \|x\|_\infty \doteq \sup_{k \geq 0} |x_k|,$$

e si dimostra che esiste  $\delta > 0$  tale che la mappa  $F : E^+ \times \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$  definita da

$$F(a, x) = L^k a + \sum_{j=1}^k L^{k-j} \pi_+ g(x_{j-1}) - \sum_{j=k+1}^{+\infty} L^{k-j} \pi_- g(x_{j-1}),$$

è una contrazione su  $\mathcal{C}_0$  per ogni  $a \in E^+$  fissato.

4) Si dimostra che  $W^+(Q) = \{x \in W^+(0) : |\pi_+ x| < \rho\}$  è positivamente invariante.

**ESEMPIO 5.3.** Sia  $x = 0$  un punto singolare iperbolico di un campo vettoriale  $v \in C^\ell(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  che genera un flusso di fase  $t \mapsto \varphi^t$ . Fissato  $\tau > 0$  qualsiasi, l'applicazione al tempo  $\tau$ ,  $\psi \doteq \varphi^\tau$ , definisce un diffeomorfismo le cui orbite forniscono le evolute del flusso di fase ai tempi  $t_k = k\tau$ :  $\gamma(x) \doteq \{\psi^k(x); k \in \mathbb{Z}\} = \{\varphi^{t_k}(x); k \in \mathbb{Z}\}$ . Chiaramente  $x = 0$  è un punto fisso di  $\psi$ . Mostriamo che è iperbolico. Posto  $A = Dv(0)$ ,  $\hat{v}(x) = v(x) - Ax$  ed utilizzando la formula della variazione delle costanti, si ha:

$$\psi(x) = e^{A\tau} x + \int_0^\tau ds e^{A(\tau-s)} \hat{v}(\varphi^s(x)),$$

da cui:

$$D\psi(x) = e^{A\tau} + \int_0^\tau ds e^{A(\tau-s)} D\hat{v}(\varphi^s(x)) D\varphi^s(x)$$

e dunque  $L \doteq D\psi(0) = e^{A\tau}$ . Supponiamo per assurdo che esista  $\lambda \in \sigma(L)$  tale che  $|\lambda| = 1$ . Allora possiamo determinare un sottospazio invariante  $E$  (unidimensionale se  $\lambda \in \mathbb{R}$ , bidimensionale se  $\lambda \neq \bar{\lambda}$ ) ed una norma  $|\cdot|_*$  su  $E$  tale che  $|L^k v|_* = |v|_*$  per ogni  $v \in E$  e  $k \in \mathbb{N}$ . D'altra parte, essendo  $L^k = e^{Ak\tau}$  ed  $e^{At}$  un flusso iperbolico, la quantità  $|L^k v|_*$  deve convergere a 0 oppure divergere quando  $k \rightarrow +\infty$ . Giungiamo così ad una contraddizione. Concludiamo che  $\sigma(e^{A\tau}) \cap S_1 = \emptyset$ . Quindi  $x = 0$  è un punto fisso iperbolico di  $\psi = \varphi^\tau$ , le cui varietà stabile ed instabile indichiamo con  $W_\tau^\pm(0)$ . Verifichiamo infine che, per ogni  $\tau > 0$ ,  $W_\tau^\pm(0) = W^\pm(0)$ , essendo  $W^\pm(0)$  le varietà stabile ed instabile di  $x = 0$ , punto singolare iperbolico del flusso di fase  $t \mapsto \varphi^t$ . L'inclusione  $W^\pm(0) \subseteq W_\tau^\pm(0)$  è evidente. Viceversa, se  $x \in W_\tau^\pm(0)$  allora:

$$\limsup_{t \rightarrow \pm\infty} |\varphi^t(x)| \leq \limsup_{k \rightarrow \pm\infty} \max_{s \in [-\tau, \tau]} |\varphi^s(\varphi^{k\tau}(x))| = \max_{s \in [-\tau, \tau]} |\varphi^s(0)| = 0,$$

dunque  $x \in W^\pm(0)$ .

### 5.3. Sistemi periodicamente perturbati

Consideriamo un sistema periodico, perturbazione di un sistema autonomo:

$$\dot{x} = v(x) + \mu g(t, x), \quad (5.21)$$

con  $x = 0$  punto singolare iperbolico di  $\dot{x} = v(x)$ , cosicché  $v(x) = Ax + \hat{v}(x)$  con  $\hat{v}(0) = 0$ ,  $D\hat{v}(0) = 0$  e  $0 \notin \sigma(A) \cap \mathbb{R}$ . Sia  $T$  il periodo della perturbazione:  $g(t + T, x) = g(t, x)$  per ogni  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Il parametro  $\mu$  varia in un intorno dello zero. Assumiamo che tutte le soluzioni siano definite sull'intero asse dei tempi  $\mathbb{R}$  ed indichiamo  $\varphi^{t, t_0}(x)$  la soluzione di dati iniziali  $\varphi^{t_0, t_0}(x) = x$ . A tale sistema differenziale possiamo associare la mappa stroboscopica  $S_{t_0} \doteq \varphi^{t_0+T, t_0}$ , tale che:

$$S_{t_0}^k(x) = \varphi^{t_0+kT, t_0}(x) \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ricordiamo che se  $x_0$  è un punto fisso di  $S_{t_0}$  allora la soluzione  $t \mapsto \varphi^{t, t_0}(x_0)$  dell'equazione (5.21) è periodica di periodo  $T$  e viceversa. In particolare,  $x = 0$  è un punto fisso di  $S_{t_0}$  per ogni  $t_0 \in \mathbb{R}$  nel caso del sistema non perturbato  $\dot{x} = v(x)$ . Mostriamo ora che, se  $|\mu|$  è sufficientemente piccolo, allora  $S_{t_0}$  possiede un punto fisso iperbolico  $\bar{x}(\mu, t_0)$  vicino ad  $x = 0$ .

**PROPOSIZIONE 5.5.** *Esistono un intorno  $I$  di  $\mu = 0$ , un intorno  $U$  di  $x = 0$  ed una funzione differenziabile  $(\mu, t_0) \rightarrow \bar{x}(\mu, t_0) \in U$ ,  $(\mu, t_0) \in I \times [0, T]$ , tale che, per ogni  $\mu \in I$ ,  $\bar{x}(\mu, t_0)$  è l'unico punto fisso di  $S_{t_0}$  in  $U$ . Inoltre  $\bar{x}(\mu, t_0)$  è iperbolico e  $\bar{x}(0, t_0) = 0$ . Infine, tutte le soluzioni periodiche  $t \mapsto \varphi^{t, t_0}(\bar{x}(\mu, t_0))$  corrispondono ad un'unica orbita contenuta in  $U$ .*

DIMOSTRAZIONE. Dalla formula per la variazione delle costanti,

$$\varphi^{t,t_0}(x) = e^{A(t-t_0)}x + \int_{t_0}^t ds e^{A(t-s)} [\hat{v}(\varphi^{s,t_0}(x)) + \mu g(s, \varphi^{s,t_0}(x))],$$

segue che i punti fissi di  $S_{t_0}$  coincidono con gli zeri della funzione:

$$G(x, \mu, t_0) \doteq (e^{AT} - \mathbb{I})x + \int_{t_0}^{t_0+T} ds e^{A(t_0+T-s)} [\hat{v}(\varphi^{s,t_0}(x)) + \mu g(s, \varphi^{s,t_0}(x))].$$

Osserviamo ora che  $G(0, 0, t_0) = 0$  e  $D_x G(0, 0, t_0) = e^{AT} - \mathbb{I}$ , matrice invertibile essendo  $e^{AT}$  iperbolico (vedi l'Esempio 5.3). Allora, per il teorema della funzione implicita, esistono un intorno  $U$  di  $x = 0$  ed un intorno  $I$  di  $\mu = 0$  per cui si ha un'unica esplicitazione  $\bar{x}(\mu, t_0)$  dell'equazione  $G(x, \mu, t_0) = 0$  in  $U \times I \times [0, T]$ ; inoltre  $\bar{x}(0, t_0) = 0$ . La regolarità di  $\varphi^{t,t_0}(x)$  rispetto a  $\mu$  e  $t_0$  implica la regolarità di  $G(x, \cdot, \cdot)$  e quindi di  $\bar{x}(\cdot, \cdot)$ . Restringendo eventualmente l'intorno  $I$ , il punto fisso  $\bar{x}(\mu, t_0)$  è iperbolico, essendo  $\bar{x}(0, t_0) = 0$  iperbolico e  $\mu \mapsto D_x S_{t_0}(\bar{x}(\mu, t_0))$  una funzione continua.

Sia ora  $\gamma_{t_0}(\mu) \doteq \{\varphi^{t,t_0}(\bar{x}(\mu, t_0)) : t \in [t_0, t_0 + T]\}$  l'orbita della soluzione periodica corrispondente al punto fisso  $\bar{x}(\mu, t_0)$ . Poiché  $\gamma_0(0) = \{0\}$  e  $\varphi^{t,t_0}(x)$  è continua rispetto a  $\mu$ , restringendo eventualmente l'intorno  $I$ , l'orbita  $\gamma_0(\mu)$  giace nell'intorno  $U$  di  $x = 0$ . Osserviamo ora che, per ogni  $t_0 \in [0, T]$ ,

$$S_{t_0} \circ \varphi^{t_0,0} = \varphi^{t_0,0} \circ S_0 \quad (5.22)$$

(infatti  $\varphi^{t_0+T,t_0} \circ \varphi^{t_0,0} = \varphi^{t_0+T,0} = \varphi^{t_0+T,T} \circ \varphi^{T,0} = \varphi^{t_0,0} \circ \varphi^{T,0}$ ). Ma allora  $x_0 \doteq \varphi^{t_0,0}(\bar{x}(\mu, 0))$  è un punto fisso di  $S_{t_0}$  che è contenuto in  $U$ . Dunque  $x_0 = \bar{x}(\mu, t_0)$  necessariamente. Dunque le soluzioni  $T$ -periodiche  $\varphi^{t_0,0}(\bar{x}(\mu, 0))$  e  $\varphi^{t,t_0}(\bar{x}(\mu, t_0))$  coincidono, cosicché  $\gamma_{t_0}(\mu) = \gamma_0(\mu)$  per ogni  $t_0 \in [0, T]$ .  $\square$

In definitiva abbiamo provato che l'orbita corrispondente alla famiglia di soluzioni periodiche di dati iniziali  $\bar{x}(\mu, t_0)$ ,  $t_0 \in [0, T]$ , è unica, in particolare identificabile dal dato iniziale  $\bar{x}(\mu, 0)$ , punto fisso della mappa stroboscopica  $S_0 = \varphi^{T,0}$ . Nel seguito utilizzeremo la notazione abbreviata  $\psi = S_0$ ,  $\bar{x}(\mu) = \bar{x}(\mu, 0)$  e

$$\gamma(\mu) = \gamma_0(\mu) = \{\bar{x}(\mu, t_0) : t_0 \in [0, T]\},$$

omettendo la menzione del tempo iniziale.

OSSERVAZIONE 5.1. Se  $g(t, 0) \neq 0$  le soluzioni periodiche sono sicuramente distinte dal punto fisso  $x = 0$ . Nel caso opposto in cui  $g(t, 0) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  la funzione  $\bar{x}(\mu, t_0)$  è identicamente nulla. Come esempio di quest'ultimo caso si consideri il pendolo matematico con punto di sospensione variabile (cfr. Esercizio 2.2).

Indichiamo ora con  $W^\pm(\mu, t_0)$  le varietà stabile ed instabile del punto fisso  $\bar{x}(\mu, t_0)$  di  $S_{t_0}$ . Dalla (5.22) segue facilmente che  $W^\pm(\mu, t_0) = \varphi^{t_0+jT,0}(W^\pm(\mu, 0))$  per ogni  $t_0 \in [0, T]$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Definiamo allora *varietà stabile ed instabile dell'orbita iperbolica*  $\gamma(\mu)$  gli insiemi invarianti (nello spazio delle fasi ampliato):

$$W^\pm(\mu, \gamma) \doteq \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{t\} \times \varphi^{t,0}(W^\pm(\mu, 0)) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \bigcup_{t_0 \in [0, T]} \{t_0 + jT\} \times W^\pm(\mu, t_0). \quad (5.23)$$

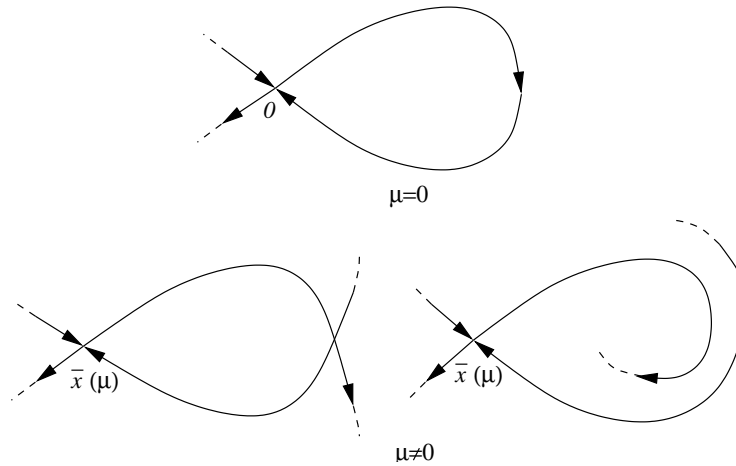


FIGURA 5.4. Se  $\mu \neq 0$  le varietà stabile ed instabile possono o meno intersecarsi.

In effetti (analogamente alla definizione di varietà stabile ed instabile di un punto fisso iperbolico) si ha:

$$(t_0, x) \in W^\pm(\mu, \gamma) \iff \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{dist}(\varphi^{t, t_0}(x), \gamma(\mu)) = 0,$$

la cui dimostrazione è lasciata al lettore.

#### 5.4. Punti omoclini ed insiemi iperbolici

La struttura delle varietà stabile ed instabile globali può essere molto complicata. In particolare esse possono intersecarsi.

**DEFINIZIONE 5.6.** *Un punto di intersezione  $v \in W^+(0) \cap W^-(0) \setminus \{0\}$  è detto punto omoclinico (del punto fisso  $x = 0$ ). Esso è detto non degenero o trasverso se  $T_v W^+(0) \oplus T_v W^-(0) = T_v \mathbb{R}^n$ .*

Nel caso particolare  $n = 2$  la trasversalità significa che le curve di fase  $W^+(0) \setminus \{0\}$  e  $W^-(0) \setminus \{0\}$  si intersecano trasversalmente. Per il teorema di esistenza ed unicità questo non è possibile in un sistema differenziale piano autonomo, e lo stesso vale quindi per i diffeomorfismi  $\varphi^T$ , introdotti nell'Esempio 5.3. In altri termini tutti gli eventuali punti omoclini sono degeneri, ovvero  $T_v W^+(0) = T_v W^-(0)$ . La situazione è differente se modifichiamo il sistema con perturbazioni dipendenti dal tempo. In particolare possiamo considerare sistemi meccanici unidimensionali, quali ad esempio:

$$\ddot{q} = q - q^3 + \mu f(t, q, \dot{q}), \quad \ddot{q} = -\sin q + \mu f(t, q, \dot{q}), \quad (5.24)$$

dove  $f(t, q, \dot{q}) = f(t + T, q, \dot{q})$  per qualche periodo  $T > 0$ . Indichiamo con  $x = (q, v)$  le coordinate nello spazio delle fasi  $\mathbb{R}^2$  e sia  $\varphi^{t, t_0}(x)$  la mappa soluzione. Per quanto stabilito nella Proposizione 5.5, per piccoli valori del parametro  $\mu$  la mappa stroboscopica  $\psi = \varphi^{T, 0}$  possiede un punto fisso iperbolico  $\bar{x}(\mu)$  vicino a

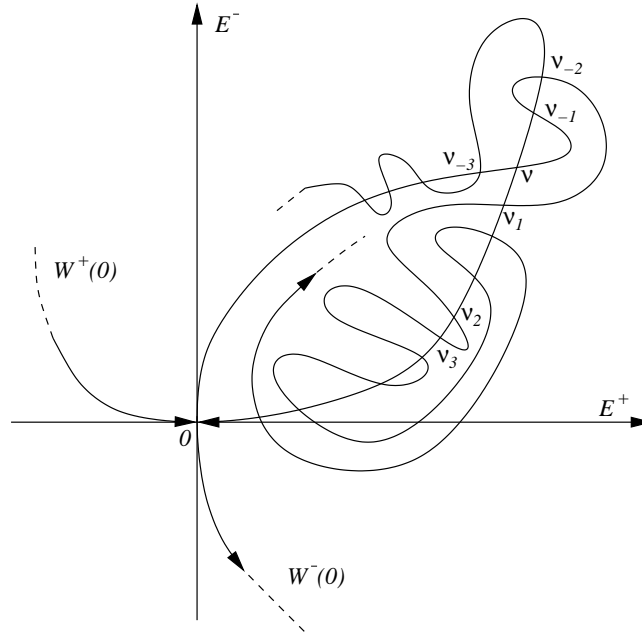


FIGURA 5.5. Struttura delle varietà stabile ed instabile in presenza di una intersezione omoclina trasversa ( $v_j \doteq \psi^j(v)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ).

$x = 0$ . Se  $\mu = 0$  sappiamo che  $W^+(0) = W^-(0)$  (vedi l'Esempio 5.1). Se  $\mu \neq 0$  le curve  $W^+(\bar{x}(\mu)) \setminus \{\bar{x}(\mu)\}$  e  $W^-(\bar{x}(\mu)) \setminus \{\bar{x}(\mu)\}$  possono o meno intersecarsi (vedi Figura 5.4). Mostreremo più avanti, mediante il metodo di Melnikov, che nel caso di perturbazioni del tipo  $f(t, q, v) = \sin(\omega t)$ ,  $\omega > 0$ , il punto fisso  $\bar{x}(\mu)$  possiede un punto omoclino trasverso.

L'esistenza di un punto omoclino trasverso complica molto la struttura delle varietà stabile ed instabile (vedi Figura 5.5). Osserviamo infatti che, essendo  $W^\pm(0)$  invarianti e  $\psi$  un diffeomorfismo, se  $v$  è un punto omoclino trasverso allora anche  $\psi^k(v)$  è un punto omoclino trasverso per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  ed inoltre:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \psi^{\pm k}(v) = 0. \quad (5.25)$$

La dinamica in prossimità dell'orbita  $\gamma(v) = \{\psi^k(v) : k \in \mathbb{Z}\}$  di un punto omoclino trasverso possiede delle proprietà notevoli, per analizzare le quali conviene introdurre dapprima la nozione generale di insieme iperbolico di un diffeomorfismo.

**DEFINIZIONE 5.7.** *Sia  $\psi$  un diffeomorfismo di  $\mathbb{R}^n$ . Il sottoinsieme  $\Lambda$  di  $\mathbb{R}^n$  è detto iperbolico se soddisfa le seguenti proprietà:*

- i)  $\Lambda$  è compatto;
- ii)  $\Lambda$  è invariante rispetto a  $\psi$ , i.e.  $\psi(\Lambda) = \Lambda$ ;

iii) Esiste una decomposizione continua  $x \mapsto E_x^\pm$  dello spazio tangente in  $x \in \Lambda$ ,

$$T_x \mathbb{R}^n = E_x^+ \oplus E_x^-,$$

per cui:

$$D\psi(x)E_x^\pm = E_{\psi(x)}^\pm \quad \forall x \in \Lambda,$$

$$|D\psi^{\pm k}(x)\xi| \leq K\mu^k|\xi| \quad \forall \xi \in E_x^\pm \quad \forall x \in \Lambda \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (5.26)$$

per qualche  $K > 0$  e  $\mu \in (0, 1)$ .

ESEMPPIO 5.4. Chiaramente un punto fisso iperbolico della mappa  $\psi$  è un insieme iperbolico, essendo  $E^\pm$  gli spazi stabile ed instabile della linearizzazione di  $\psi$ . Più in generale, supponiamo che  $p_0$  sia un punto fisso iperbolico della mappa  $\Psi \doteq \psi^N$  per qualche intero positivo  $N$ . In tal caso l'orbita del diffeomorfismo  $\psi$  per  $p_0$  è periodica:  $\gamma(p_0) = \{\psi^j(p_0) : j = 0, \dots, N-1\}$ . Dimostriamo che  $\Lambda \doteq \gamma(p_0)$  è un insieme iperbolico per  $\psi$ . Chiaramente  $\Lambda$  è compatto ed invariante. Costruiamo ora la decomposizione  $x \mapsto E_x^\pm$ ,  $x \in \Lambda$ . Essendo  $p_0$  un punto fisso iperbolico di  $\Psi$ , la matrice jacobiana  $D\Psi(p_0)$  non possiede autovalori sul cerchio unitario del piano complesso. Siano allora  $E^\pm$  i sottospazi invarianti di cui al Teorema 5.4 per l'operatore  $L = D\Psi(p_0)$ . Definiamo:

$$E_{p_j}^\pm \doteq D\psi^j(p_0)E^\pm, \quad p_j \doteq \psi^j(p_0), \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Chiaramente  $T_{p_j} \mathbb{R}^n = E_{p_j}^+ \oplus E_{p_j}^-$  poiché  $\psi^j$  è un diffeomorfismo e  $T_{p_0} \mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$  per la scelta di  $E^\pm$ . Inoltre, per la proprietà di composizione dell'applicazione tangente, per ogni  $j = 0, \dots, N-1$  si ha:

$$D\psi(p_j)E_{p_j}^\pm = D\psi(p_j)D\psi^j(p_0)E^\pm = D\psi^{j+1}(p_0)E^\pm = E_{p_{j+1}}^\pm = E_{\psi(p_j)}^\pm$$

(ove  $p_N = \psi^N(p_0) = p_0$ ). Rimane da dimostrare la stima (5.26). Se  $k \in \mathbb{N}$  scriviamo  $k = i + Nh$  con  $h$  la parte intera di  $k/N$  ed  $i = k - Nh \in \{0, \dots, N-1\}$ . Essendo  $D\psi^{Nh}(p_0) = [D\Psi(p_0)]^h$ ,

$$D\psi^k(p_j) = D\psi^{j+k}(p_0)D\psi^{-j}(p_j) = D\psi^{j+i}(p_0)[D\Psi(p_0)]^h D\psi^{-j}(p_j).$$

Allora, posto

$$\bar{C} = \max_{|s| \leq 2N} \max_{p \in \gamma(p_0)} \|D\psi^s(p)\|$$

ed applicando le stime (5.20) alla matrice  $D\Psi(p_0)$ , si ha, per ogni  $\xi \in E_{p_j}^+$ ,

$$|D\psi^k(p_j)\xi| \leq \bar{C}^2 C \theta_+^h |\xi|,$$

da cui la stima (5.26) con  $K = C\bar{C}^2/\theta_+$  e  $\mu = \theta_+^{1/N}$ . Analogamente si ragiona per i vettori  $\xi \in E_{p_j}^-$ .

PROPOSIZIONE 5.8. Sia  $v$  un punto omoclino trasverso per il punto fisso iperbolico  $x = 0$ . Allora la chiusura dell'orbita per  $v$ ,

$$\Lambda \doteq \gamma(v) \cup \{0\}, \quad \gamma(v) = \{\psi^k(v) : k \in \mathbb{Z}\},$$

è un insieme iperbolico di  $\psi$ .

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità consideriamo il caso di un diffeomorfismo del piano  $\mathbb{R}^2$ . L'insieme  $\Lambda$  è compatto ed invariante essendo la chiusura di un'orbita limitata. Definiamo  $E_x^\pm \doteq T_x W^\pm(0)$  per ogni  $x \in \Lambda$ . In particolare  $E_0^\pm = E^\pm$ , dove  $E^\pm$  sono i sottospazi invarianti per l'operatore  $L = D\psi(0)$  di cui al Teorema 5.4. Essendo  $W^\pm(0)$  varietà invarianti per il diffeomorfismo  $\psi$  è evidente che:

$$D\psi(x)E_x^\pm = D\psi(x)T_x W^\pm(0) = T_{\psi(x)} W^\pm(0) = E_{\psi(x)}^\pm \quad \forall x \in \Lambda.$$

Rimangono da dimostrare la proprietà di continuità e la stima (5.26). Siano  $x = (x_+, x_-)$  le coordinate adatte alla matrice  $D\psi(0)$ . Posto

$$Q_\rho \doteq \{x = (x_+, x_-) \in \mathbb{R}^2 : |x_+| < \rho, |x_-| < \rho\}, \quad v_k \doteq \psi^k(v),$$

per ogni  $\rho > 0$  esiste un intero positivo  $N_\rho > 0$  tale che  $v_k \in Q_\rho$  per ogni  $|k| \geq N_\rho$ . Inoltre, per il teorema delle varietà stabile ed instabile, esiste  $\rho_0 > 0$  tale che, posto  $Q_0 = Q_{\rho_0}$ ,

$$W^\pm(Q_0) = \{x \in Q_0 : x_\mp = h_\pm(x_\pm)\},$$

con  $h_\pm$  funzioni differenziabili sull'intervallo  $(-\rho_0, \rho_0)$  per le quali  $h_\pm(0) = 0$  e  $h'_\pm(0) = 0$ . Posto ora  $y_\pm = x_\pm - h_\mp(x_\mp)$ , poiché

$$\frac{\partial(y_+, y_-)}{\partial(x_+, x_-)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

diminuendo eventualmente il valore di  $\rho_0$ , questa trasformazione definisce delle nuove coordinate  $y = (y_+, y_-)$  nell'aperto  $Q_0$ , rispetto alle quali (vedi Figura 5.6):

$$W^\pm(Q_0) = \{y \in Q_0 : y_\mp = 0\}.$$

Indichiamo ancora con  $\psi$  il diffeomorfismo come funzione delle nuove coordinate. Quindi:

$$\psi(y) = \psi(y_+, y_-) = \begin{pmatrix} ay_+ + F(y_+, y_-) \\ by_- + G(y_+, y_-) \end{pmatrix},$$

con  $|a| < 1$ ,  $|b| > 1$  e le funzioni  $F, G$  tali che  $F(0, 0) = 0$ ,  $G(0, 0) = 0$ ,  $DF(0, 0) = 0$ ,  $DG(0, 0) = 0$ . Inoltre, essendo  $W^+(Q_0)$  positivamente invariante,  $G(y_+, 0) \equiv 0$  in  $Q_0$ . Analogamente, essendo  $W^-(Q_0)$  negativamente invariante e  $\psi(0, 0) = 0$ , restringendo eventualmente  $Q_0$  in modo tale che  $\psi^{-1}(W^-(Q_0)) \subset \{y : y_+ = 0\}$ , si ha anche  $F(0, y_-) \equiv 0$  in  $Q_0$ . La matrice jacobiana di  $\psi$  è quindi:

$$D\psi(y) = \begin{pmatrix} a + D_{y_+} F(y_+, y_-) & D_{y_-} F(y_+, y_-) \\ D_{y_+} G(y_+, y_-) & b + D_{y_-} G(y_+, y_-) \end{pmatrix} \quad D_{y_\pm} \doteq \frac{\partial}{\partial y_\pm}.$$

In particolare, posto  $N_0 = N_{\rho_0}$ , poiché  $v_k \in W^+(Q_0) \cap W^-(0)$  per  $k \geq N_0$ , si ha:

$$D\psi(v_k) = \begin{pmatrix} a + D_{y_+} F(v_k) & D_{y_-} F(v_k) \\ 0 & b + D_{y_-} G(v_k) \end{pmatrix} \quad \forall k \geq N_0. \quad (5.27)$$

Analogamente, poiché  $v_k \in W^-(Q_0) \cap W^+(0)$  per  $k \leq -N_0$ ,

$$D\psi(v_k) = \begin{pmatrix} a + D_{y_+} F(v_k) & 0 \\ D_{y_+} G(v_k) & b + D_{y_-} G(v_k) \end{pmatrix} \quad \forall k \leq -N_0. \quad (5.28)$$

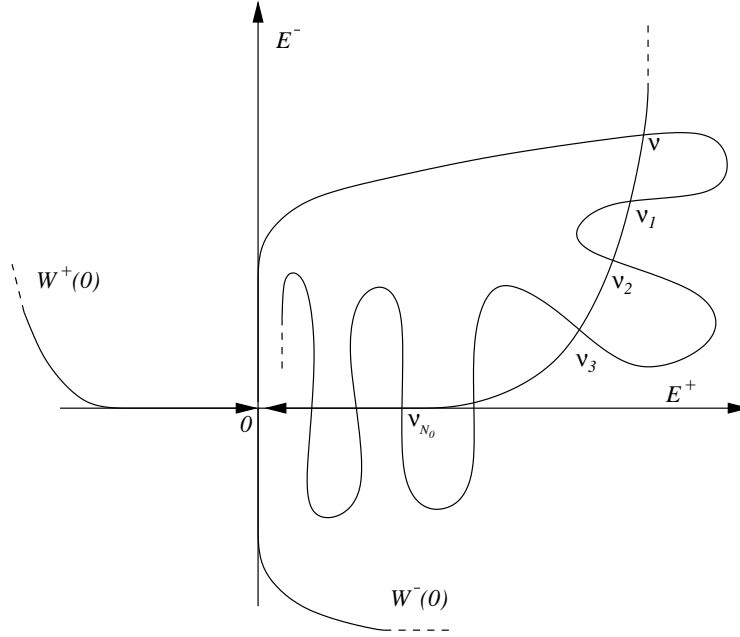


FIGURA 5.6. Struttura delle varietà stabile ed instabile nelle coordinate  $y = (y_+, y_-)$ .

Si definisca infine la funzione

$$\omega(\rho) \doteq \max_{y \in Q_\rho} \max\{\|DF(y)\|; \|DG(y)\|\}, \quad \rho \in [0, \rho_0]. \quad (5.29)$$

Si osservi che  $\omega(\rho) \rightarrow 0$  per  $\rho \rightarrow 0$ .

Per verificare la continuità di  $x \mapsto E_x^\pm$  dobbiamo provare che  $E_{v_k}^\pm \rightarrow E^\pm$  se  $|k| \rightarrow +\infty$ . Consideriamo il caso  $k \rightarrow +\infty$ , essendo l'altro del tutto simile. Poiché  $E_{v_k}^+ = T_{v_k} W^+(Q_0)$  se  $k \geq N_0$ , la convergenza di  $E_{v_k}^+$  a  $E_0^+ = T_0 W^+(Q_0)$  è immediata. Dimostriamo invece che  $E_{v_k}^- \rightarrow E_0^-$ . Fissato un vettore non nullo  $\xi_{N_0} \in E_{v_{N_0}}^-$  poniamo  $\xi_k = D\psi(v_{k-1})\xi_{k-1}$  per  $k > N_0$ . Indicando con  $\xi_k^\pm$  le componenti di  $\xi_k$  lungo gli assi  $y_\pm$ , la quantità

$$\lambda_k \doteq \frac{|\xi_k^+|}{|\xi_k^-|}$$

non dipende dalla particolare scelta di  $\xi_{N_0}$  e rappresenta il modulo della pendenza della direzione  $E_{v_k}^-$ . Quindi dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = 0. \quad (5.30)$$

Fissato  $\varepsilon > 0$  scegliamo  $\rho_\varepsilon \in (0, \rho_0]$  tale che:

$$\frac{\omega(\rho_\varepsilon)(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))}{|b| - \omega(\rho_\varepsilon) - 1} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a| + \omega(\rho_\varepsilon) \leq 1, \quad |b| - \omega(\rho_\varepsilon) > 1.$$

Allora, utilizzando la (5.27), per ogni  $k > N_\varepsilon \doteq N_{\rho_\varepsilon}$ ,

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \frac{|(a + D_{y_+} F(v_{k-1}))\xi_{k-1}^+ + D_{y_-} F(v_{k-1})\xi_{k-1}^-|}{|(b + D_{y_-} G(v_{k-1}))\xi_{k-1}^-|} \\ &\leq \frac{(|a| + \omega(\rho_\varepsilon))|\xi_{k-1}^+| + \omega(\rho_\varepsilon)|\xi_{k-1}^-|}{(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))|\xi_{k-1}^-|} \\ &\leq \frac{\lambda_{k-1} + \omega(\rho_\varepsilon)}{|b| - \omega(\rho_\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Iterando la stima  $k - N_\varepsilon$  volte otteniamo:

$$\begin{aligned}\lambda_k &\leq \frac{\lambda_{N_\varepsilon}}{(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))^{k-N_\varepsilon}} + \omega(\rho_\varepsilon) \sum_{j=1}^{k-N_\varepsilon} \frac{1}{(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))^j} \\ &\leq \frac{\lambda_{N_\varepsilon}}{(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))^{k-N_\varepsilon}} + \omega(\rho_\varepsilon) \frac{1}{1 - (|b| - \omega(\rho_\varepsilon))^{-1}} \\ &= \frac{\lambda_{N_\varepsilon}}{(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))^{k-N_\varepsilon}} + \frac{\omega(\rho_\varepsilon)(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))}{|b| - \omega(\rho_\varepsilon) - 1}.\end{aligned}$$

Quindi, per la scelta di  $\rho_\varepsilon$ ,

$$\lambda_k \leq \frac{\lambda_{N_\varepsilon}}{(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))^{k-N_\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N_\varepsilon,$$

Fissando ora  $k_\varepsilon$  tale che  $\lambda_{N_\varepsilon}(|b| - \omega(\rho_\varepsilon))^{N_\varepsilon - k_\varepsilon} < \varepsilon/2$  otteniamo che  $\lambda_k < \varepsilon$  per ogni  $k \geq k_\varepsilon$ , il che dimostra il limite (5.30) per l'arbitrarietà nella scelta di  $\varepsilon$ .

Dimostriamo infine la stima (5.26), restringendoci al caso di  $E_x^+$ , essendo l'altro del tutto simile. Fissiamo un numero  $\theta \in (|a|, 1)$  e scegliamo  $\rho_1 \in (0, \rho_0]$  tale che  $|a| + \omega(\rho_1) \leq (|a| + \theta)/2$  e, posto  $N_1 \doteq N_{\rho_1}$ ,

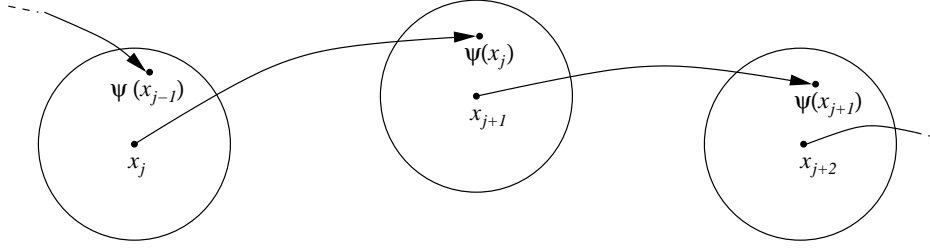
$$\frac{|\xi^-|}{|\xi^+|} \leq \frac{\theta^2 - (|a| + \theta)^2/4 - 2\omega^2(\rho_1)}{2(|b| + \omega(\rho_1))^2} \quad \forall \xi \in E_{v_k}^+ : \xi \neq 0, \quad \forall k \leq -N_1,$$

(quest'ultima condizione è verificata per  $\rho_1$  piccolo abbastanza poiché  $E_{v_k}^+ \rightarrow E_0^+$  se  $k \rightarrow -\infty$ ). Fissiamo un vettore  $\xi_0 \in E_v^+$  e poniamo  $\xi_k = D\psi(v_{k-1})\xi_{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Poiché  $\xi_k^- = 0$  se  $k \geq N_1$  ed utilizzando la (5.27) stimiamo:

$$\begin{aligned}|\xi_k| &= |(a + D_{y_+} F(v_{k-1}))\xi_{k-1}^+| \leq (|a| + \omega(\rho_1))|\xi_{k-1}^+| \\ &\leq \theta|\xi_{k-1}| \leq \theta^{k-N_1}|\xi_{N_1}| \quad \forall k > N_1.\end{aligned}$$

Utilizzando invece la (5.28), per ogni  $k < -N_1$  si ha:

$$\begin{aligned}|\xi_k| &= \left| \begin{pmatrix} (a + D_{y_+} F(v_{k-1}))\xi_{k-1}^+ \\ D_{y_+} G(v_{k-1})\xi_{k-1}^+ + (b + D_{y_-} G(v_{k-1}))\xi_{k-1}^- \end{pmatrix} \right| \\ &\leq \sqrt{(|a| + \omega(\rho_1))^2|\xi_{k-1}^+|^2 + 2\omega^2(\rho_1)|\xi_{k-1}^+|^2 + 2(|b| + \omega(\rho_1))^2|\xi_{k-1}^-|^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{(|a| + \theta)^2}{4} + 2\omega^2(\rho_1)\right)|\xi_{k-1}^+|^2 + \left(\theta^2 - \frac{(|a| + \theta)^2}{4} - 2\omega^2(\rho_1)\right)|\xi_{k-1}^+|^2} \\ &\leq \theta|\xi_{k-1}|,\end{aligned}$$

FIGURA 5.7.  $\varepsilon$ -pseudo-orbita del diffeomorfismo  $\psi$ .

da cui:

$$|\xi_{-N_1}| \leq \theta^{-N_1-k} |\xi_k| \quad \forall k < -N_1.$$

D'altra parte,

$$|\xi_{N_1}| \leq \|D\psi^{N_1-k}(v_k)\| |\xi_k| \quad \forall k = -N_1, \dots, N_1.$$

In definitiva, per una qualsiasi coppia di interi  $j \in \mathbb{Z}$  e  $k \in \mathbb{N}$  si ha:

$$|\xi_{j+k}| \leq C \theta^k |\xi_j|, \quad C = \left[ \theta^{-1} \max_{j=-N_1, \dots, N_1} \|D\psi(v_j)\| \right]^{2N_1},$$

il che dimostra (5.26) (il caso  $x = 0 \in \bar{\gamma}(v)$  è banale).  $\square$

### 5.5. Lemma dell'orbita ombra e sue conseguenze

Prima di descrivere le proprietà della dinamica in prossimità di un insieme iperbolico premettiamo alcune definizioni.

**DEFINIZIONE 5.9.** Sia  $\varepsilon > 0$ . Una sequenza  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  in  $\mathbb{R}^n$  si dice una  $\varepsilon$ -pseudo-orbita del diffeomorfismo  $\psi$  se:

$$|x_{i+1} - \psi(x_i)| < \varepsilon \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

**DEFINIZIONE 5.10.** Siano  $\delta > 0$  e  $\{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  una sequenza in  $\mathbb{R}^n$ . L'orbita  $\{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  del diffeomorfismo  $\psi$  [dunque  $p_{i+1} = \psi(p_i)$ ] si dice una  $\delta$ -ombra-orbita di  $\{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  se:

$$|p_i - q_i| < \delta \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Il nostro scopo è dimostrare che  $\varepsilon$ -pseudo-orbite costituite da punti di un insieme iperbolico possono essere ombreggiate da orbite vere; quanto migliore è l'ombreggiamento (cioè quanto più piccolo è richiesto essere  $\delta$ ) tanto più la pseudo-orbita dovrà, in principio, essere prossima ad una vera orbita (quindi  $\varepsilon$  piccolo). Precisamente:

**TEOREMA 5.11 (Lemma dell'orbita ombra).** Sia  $\Lambda$  un insieme iperbolico del diffeomorfismo  $\psi$ . Allora esiste  $\delta_0 > 0$  tale che ad ogni  $\delta \in (0, \delta_0)$  corrisponde un numero  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  in modo che ciascuna  $\varepsilon$ -pseudo-orbita  $\{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  di punti in  $\Lambda$  ammette un'unica  $\delta$ -ombra-orbita  $\{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ :

$$\forall \{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset \Lambda : |q_{i+1} - \psi(q_i)| < \varepsilon \quad \exists! \{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}} : |p_i - q_i| < \delta, \quad p_{i+1} = \psi(p_i)$$

Se inoltre:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |q_{i+1} - \psi(q_i)| = 0 \quad \left[ \text{risp. } \lim_{i \rightarrow -\infty} |q_{i+1} - \psi(q_i)| = 0 \right] \quad (5.31)$$

allora:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |p_i - q_i| = 0 \quad \left[ \text{risp. } \lim_{i \rightarrow -\infty} |p_i - q_i| = 0 \right]. \quad (5.32)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $q = \{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  una  $\varepsilon$ -pseudo-orbita di  $\psi$ , con  $\varepsilon > 0$  da fissare in seguito. Cerchiamo un'orbita vera di  $\psi$ ,  $p = \{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ , prossima a  $q$ , nella forma  $p = q + x = \{q_i + x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  per qualche  $x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ . Quindi  $x$  deve essere soluzione dell'equazione:

$$q_i + x_i = \psi(q_{i-1} + x_{i-1}), \quad i \in \mathbb{Z},$$

che riscriviamo nella forma:

$$x_i = D\psi(q_{i-1})x_{i-1} + f_i(x_{i-1}), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (5.33)$$

essendo:

$$f_i(x_{i-1}) \doteq [\psi(q_{i-1} + x_{i-1}) - D\psi(q_{i-1})x_{i-1} - \psi(q_{i-1})] + \psi(q_{i-1}) - q_i.$$

Notiamo che:

$$f_i(0) = \psi(q_{i-1}) - q_i, \quad Df_i(x_{i-1}) = D\psi(q_{i-1} + x_{i-1}) - D\psi(q_{i-1}).$$

In particolare, essendo  $q$  una  $\varepsilon$ -pseudo-orbita e poiché  $\Lambda$  è compatto,

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad |f_i(0)| < \varepsilon \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \\ ii) \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}} \|Df_j(x_{j-1})\| \rightarrow 0 \text{ se } \sup_{j \in \mathbb{Z}} |x_j| \rightarrow 0. \end{array} \right. \quad (5.34)$$

Introduciamo lo spazio di Banach

$$E \doteq \{y = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} : |y| < \infty\}, \quad |y| \doteq \sup_{i \in \mathbb{Z}} |y_i|.$$

Cerchiamo la soluzione dell'Eq. (5.33) in tale spazio (infatti se  $p = q + x$  ombreggia la sequenza limitata  $q \subset \Lambda$  allora  $x \in E$ ). Riscriviamo l'Eq. (5.33) nella forma:

$$(\mathbb{I} - L)x = F(x), \quad (5.35)$$

dove:

$$(Lx)_i \doteq D\psi(q_{i-1})x_{i-1}, \quad F(x)_i \doteq f_i(x_{i-1}).$$

In particolare,  $L$  è un operatore lineare e continuo su  $E$ ,  $F$  è una funzione derivabile con continuità, essendo  $(DF(x)y)_i = Df_i(x_{i-1})y_i$ , e l'Eq. (5.34) diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad |F(0)| < \varepsilon, \\ ii) \quad \lim_{|x| \rightarrow 0} \|DF(x)\| = 0 \end{array} \right. \quad (5.36)$$

( $\|\cdot\|$  denota la sua norma uniforme dell'operatore).

1) *Soluzione del problema lineare.* Risolviamo dapprima il problema lineare:

$$(\mathbb{I} - L)x = g, \quad (5.37)$$

con  $g \in E$  assegnato. Poiché  $q_i \in \Lambda$ , per ogni  $i \in \mathbb{Z}$  possiamo decomporre:

$$E = E^+ \oplus E^-, \quad E^\pm \doteq \{y \in E : y_i \in E_{q_i}^\pm \ \forall i \in \mathbb{Z}\},$$

ed indichiamo con  $y = y^+ + y^-$ ,  $y^\pm \in E^\pm$ , la decomposizione di un generico elemento  $y \in E$ . I sottospazi  $E^\pm$  sono “quasi invarianti” sotto l'azione dell'operatore lineare  $L$  nel senso che ora precisiamo. Poiché la mappa  $\alpha \mapsto E_\alpha^\pm$ ,  $\alpha \in \Lambda$ , è continua, possiamo scegliere una base  $\{e_j^{(\alpha)}\}$  di  $\mathbb{R}^n$  adattata alla decomposizione  $E_\alpha^+ \oplus E_\alpha^-$  in modo tale che la matrice  $U(\alpha, \beta)$  del cambiamento di base  $\{e_j^{(\alpha)}\} \rightarrow \{e_j^{(\beta)}\}$  verifichi la condizione:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{\alpha, \beta \in \Lambda \\ |\alpha - \beta| < \varepsilon}} \|U(\alpha, \beta) - \mathbb{I}\| = 0.$$

Ne segue che, essendo  $D\psi(q_{i-1})E_{q_{i-1}}^\pm = E_{\psi(q_{i-1})}^\pm$  e  $|q_i - \psi(q_{i-1})| < \varepsilon$ , l'operatore  $L$  si decompone nella forma:

$$L = A + \Gamma : \quad AE^\pm = E^\pm, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\Gamma\| = 0,$$

dove  $(Ay)_i = A_i y_{i-1}$ , essendo  $A_i : T_{q_{i-1}} \mathbb{R}^n \rightarrow T_{q_i} \mathbb{R}^n$  l'operatore la cui matrice nelle basi  $\{e_j^{(q_{i-1})}\}, \{e_j^{(q_i)}\}$ , coincide con quella dell'operatore  $D\psi(q_{i-1}) : T_{q_{i-1}} \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\psi(q_{i-1})} \mathbb{R}^n$  nelle basi  $\{e_j^{(q_{i-1})}\}, \{e_j^{(\psi(q_{i-1}))}\}$ . In particolare  $A_i E_{q_{i-1}}^\pm = E_{q_i}^\pm$  e, per ogni intero  $N > 0$ ,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{i \in \mathbb{Z}} (| \|A_{i+N} A_{i+N-1} \cdots A_i\| - \|D\psi^N(q_{i-1})\| ) = 0,$$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{i \in \mathbb{Z}} (| \|A_{i-N}^{-1} A_{i-N+1}^{-1} \cdots A_i^{-1}\| - \|D\psi^{-N}(q_{i-1})\| ) = 0$$

(infatti se  $q$  fosse un'orbita allora  $\|\prod_{j=i+N}^i A_j\| = \|D\psi^N(q_{i-1})\|$ ,  $\|\prod_{j=i-N}^i A_j^{-1}\| = \|D\psi^{-N}(q_{i-1})\|$ , dunque il suddetto limite è conseguenza della regolarità di  $\psi$  e della compattezza di  $\Lambda$ ). Fissiamo ora  $N$  tale che  $K\mu^N < 1/4$ , con  $K, \mu$  come in (5.26), e quindi  $\varepsilon_0$  in modo tale che, per ogni  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} | \|A_{i+N} A_{i+N-1} \cdots A_i\| - \|D\psi^N(q_{i-1})\| | < \frac{1}{4},$$

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} | \|A_{i-N}^{-1} A_{i-N+1}^{-1} \cdots A_i^{-1}\| - \|D\psi^{-N}(q_{i-1})\| | < \frac{1}{4},$$

cosicché:

$$|A^N y^+| \leq \frac{|y^+|}{2}, \quad |A^{-N} y^-| \leq \frac{|y^-|}{2} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \quad (5.38)$$

Ne segue che l'operatore  $\mathbb{I} - A$  è invertibile per  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . In effetti l'equazione  $(\mathbb{I} - A)x = g$  si decompone nella coppia di equazioni:

$$\begin{cases} (\mathbb{I} - A)x^+ = g^+, \\ (\mathbb{I} - A)x^- = g^-. \end{cases} \quad (5.39)$$

La seconda equazione in (5.39) è equivalente a

$$(\mathbb{I} - A^{-1})x^- = -A^{-1}g^-.$$

La soluzione del sistema (5.39) è allora:

$$x^+ = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k g^+, \quad x^- = -\sum_{k=1}^{+\infty} A^{-k} g^-. \quad (5.40)$$

Le stime (5.38) implicano la convergenza assoluta delle serie in (5.40), ed è immediato verificare che i vettori  $x^\pm$  così definiti sono soluzione del sistema (5.39).

La convergenza è inoltre uniforme poiché, posto

$$C = N \sup\{\|D\psi^r(\alpha)\| : \alpha \in \Lambda, |r| \leq N\},$$

si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} |A^k g^+| &= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{N-1} |A^r (A^N)^j g^+| \leq C \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j |g^+| \leq 2C|g^+|, \\ \sum_{k=0}^{+\infty} |A^{-k} g^-| &= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{N-1} |A^{-r} (A^{-N})^j g^-| \leq C \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j |g^-| \leq 2C|g^-|. \end{aligned}$$

Quindi l'operatore  $\mathbb{I} - A$  è invertibile su  $E$  ed inoltre:

$$\|(\mathbb{I} - A)^{-1}\| \leq 4C.$$

Consideriamo ora l'equazione (5.37), che riscriviamo nella forma seguente:

$$(\mathbb{I} - B)x = (\mathbb{I} - A)^{-1}g, \quad B \doteq (\mathbb{I} - A)^{-1}\Gamma.$$

Fissiamo  $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$  tale che:

$$\|B\| \leq 4C\|\Gamma\| < \frac{1}{2} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1).$$

Allora l'operatore  $\mathbb{I} - B$  è invertibile, essendo:

$$(\mathbb{I} - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B^k, \quad \|(\mathbb{I} - B)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2,$$

per cui l'equazione (5.37) ammette l'unica soluzione  $x = (\mathbb{I} - B)^{-1}(\mathbb{I} - A)^{-1}g$ . In altri termini, per ogni  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ , l'operatore  $\mathbb{I} - L$  è invertibile ed inoltre:

$$\|(\mathbb{I} - L)^{-1}\| \leq 8C. \quad (5.41)$$

2) *Soluzione del problema non lineare.* Per  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  l'equazione non lineare (5.35) può ora essere riscritta come equazione di punto fisso della mappa:

$$T: E \rightarrow E \quad : \quad T(x) = (\mathbb{I} - L)^{-1}F(x).$$

Sia  $B_\delta = \{x \in E : |x| \leq \delta\}$ . Mostriamo che esiste  $\delta_0 > 0$  tale che, ad ogni  $\delta \in (0, \delta_0)$  corrisponde una scelta di  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  per la quale:

$$T(B_\delta) \subseteq B_\delta, \quad |T(x) - T(y)| < \frac{1}{2}|x - y| \quad \forall x, y \in B_\delta, \quad (5.42)$$

da cui, per il principio delle contrazioni, esiste un'unica sequenza  $x^* \in B_\delta$  tale che  $x^* = T(x^*)$ , e quindi  $p = q + x^*$  è l'unica  $\delta$ -ombra-orbita della  $\varepsilon$ -pseudo-orbita  $q$ .

Sia

$$J(\delta) \doteq \sup_{\substack{x, y \in B_\delta \\ x \neq y}} \frac{|F(x) - F(y)|}{|x - y|}.$$

Dall'Eq. (5.36) ricaviamo:

$$\sup_{x \in B_\delta} |F(x)| \leq \varepsilon + J(\delta)\delta, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} J(\delta) = 0.$$

Utilizzando la stima (5.41) concludiamo che:

$$\begin{cases} \sup_{x \in B_\delta} |T(x)| \leq 8C[\varepsilon + \delta J(\delta)], \\ |T(x) - T(y)| \leq 8CJ(\delta)|x - y| \quad \forall x, y \in B_\delta. \end{cases} \quad (5.43)$$

Le stime (5.42) seguono ora dalle (5.43) scegliendo  $\delta_0 > 0$  tale che:

$$J(\delta) < \frac{1}{16C} \quad \forall \delta \in (0, \delta_0)$$

e fissando

$$\varepsilon = \varepsilon(\delta) = \min \left\{ \varepsilon_1; \frac{\delta}{16C} \right\}.$$

3) *Conclusion.* Rimane da dimostrare il limite (5.32) sotto l'ipotesi (5.31). A tale scopo è sufficiente cercare il punto fisso nel sottospazio chiuso dello spazio di Banach  $E$ :

$$E_\infty \doteq \left\{ y \in E : \lim_{i \rightarrow +\infty} y_i = 0 \right\} \quad \left[ \text{risp. } E_{-\infty} \doteq \left\{ y \in E : \lim_{i \rightarrow -\infty} y_i = 0 \right\} \right].$$

Lo svolgimento per esteso della dimostrazione è lasciata al lettore.  $\square$

**COROLLARIO 5.12.** *Sia  $v$  un punto omoclino trasverso del punto fisso iperbolico  $x = 0$  del diffeomorfismo  $\psi$ . Sia quindi  $\Lambda = \gamma(v) \cup \{0\}$ . Per ogni intorno  $V$  di  $v$  ed  $U$  di  $\Lambda$  esistono infiniti punti periodici di  $\psi$  in  $V$  le cui orbite sono contenute in  $U$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\delta_0$  come nel Teorema 5.11 e  $\delta \in (0, \delta_0)$  tale che:

$$B_\delta(v) \subset V, \quad \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_\delta(v_k) \subset U, \quad (5.44)$$

dove  $v_k = \psi^k(v)$  sono i punti dell'orbita  $\gamma(v)$ . Sia  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  come nel Teorema 5.11. Per ogni intero  $N$  sufficientemente grande esiste una  $\varepsilon$ -pseudo-orbita  $q = \{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  contenuta in  $\Lambda$  di periodo  $N$ . Infatti, in virtù del limite (5.25), esiste un intero  $N_\varepsilon$  tale che:

$$v_k \in B_{\varepsilon/2}(0) \quad \forall k \in \mathbb{Z} : |k| \geq N_\varepsilon. \quad (5.45)$$

Allora per ogni  $N > 2N_\varepsilon + 1$  la sequenza:

$$q = \{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \quad : \quad q_{j+Nh} = v_j \quad \forall j, h \in \mathbb{Z} : j = -\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor,$$

è una  $\varepsilon$ -pseudo-orbita di periodo  $N$ . Esiste quindi una  $\delta$ -ombra-orbita  $p$  di  $q$ . In particolare, per la condizione (5.44) sul parametro  $\delta$ , si ha  $p_0 \in V$  e  $\gamma(p_0) \subset U$ . Mostriamo infine che  $p_0$  è un punto periodico. In effetti, essendo

$$|q_i - p_{i+N}| = |q_{i+N} - p_{i+N}| < \delta,$$

anche la sequenza  $\hat{p}$  definita da  $\hat{p}_i \doteq p_{i+N}$  è una  $\delta$ -ombra-orbita di  $q$ . Poiché esiste un'unica  $\delta$ -ombra-orbita di  $q$ , segue che  $p = \hat{p}$ , da cui  $p_0 = \hat{p}_0 = \psi^N(p_0)$ , ovvero  $p_0 \in V$  è un punto periodico di periodo  $N$  la cui orbita è contenuta in  $U$ . Ripetendo il ragionamento con una nuova scelta del parametro  $\delta$  in modo tale che  $p_0 \notin \bar{B}_\delta(v)$  possiamo determinare un nuovo punto periodico  $p'_0 \in V$  distinto da  $p_0$ . Dunque esistono infiniti punti periodici.  $\square$

**COROLLARIO 5.13.** *Siano  $v$  un punto omoclino trasverso del punto fisso iperbolico  $x = 0$  del diffeomorfismo  $\psi$ . Sia quindi  $\Lambda = \gamma(v) \cup \{0\}$ . Per ogni intorno  $V$  di  $v$  ed  $U$  di  $\Lambda$  esistono infiniti punti omoclini di  $\psi$  in  $V$  le cui orbite sono contenute in  $U$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\delta \in (0, \delta_0)$  tale che le inclusioni (5.44) siano verificate ed  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ . Sia quindi  $N_\varepsilon$  come in (5.45). La sequenza:

$$q = \{q_i\}_{i \in \mathbb{Z}} : \begin{cases} q_{j+(2N_\varepsilon+1)h} = v_j & \forall j = -N_\varepsilon, \dots, N_\varepsilon, \quad \forall h = 0, 1, \\ q_i = 0 & \forall i : i < -N_\varepsilon \text{ oppure } i > 3N_\varepsilon + 1, \end{cases}$$

è una  $\varepsilon$ -pseudo-orbita. Esiste quindi una  $\delta$ -ombra-orbita  $p$  di  $q$  e, per la condizione (5.44) sul parametro  $\delta$ , si ha  $p_0 \in V$  e  $\gamma(p_0) \subset U$ . Inoltre, valendo banalmente i limiti in (5.32),

$$\lim_{|i| \rightarrow +\infty} p_i = \lim_{|i| \rightarrow +\infty} q_i = 0,$$

ovvero  $p_0$  è un punto omoclino. Tale punto è garantito essere diverso da  $v$  per  $\delta$  sufficientemente piccolo poiché in tal caso  $\gamma(v)$  non è una  $\delta$ -ombra-orbita di  $q$ . Ripetendo infine il ragionamento con una nuova scelta del parametro  $\delta$  in modo tale che  $p_0 \notin \bar{B}_\delta(v)$  possiamo determinare un nuovo punto omoclino  $p'_0 \in V$  distinto da  $p_0$ . Dunque esistono infiniti punti omoclini.  $\square$

In conclusione ogni punto omoclino trasverso è un punto di accumulazione di punti periodici e di punti omoclini, i cui comportamenti asintotici sono molto differenti. (La Figura 5.5 è quindi molto più complicata!)

## 5.6. Applicazione alla dinamica del pendolo forzato

Consideriamo il sistema meccanico:

$$\ddot{q} = -\sin q + \mu \sin(\omega t). \quad (5.46)$$

Indichiamo con  $\mathcal{Q}$  l'insieme delle soluzioni che possiedono infiniti zeri. A ciascuna soluzione  $q(\cdot) \in \mathcal{Q}$  corrisponde un'unica sequenza infinita di tempi,

$$\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}} : \lim_{k \rightarrow \pm\infty} t_k = \pm\infty, \quad t_k < t_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

per cui:

$$q(t_k) = 0 \pmod{2\pi}, \quad q(t) \neq 0 \pmod{2\pi} \quad \forall t \notin \{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Possiamo associare ad ogni soluzione  $q(\cdot) \in \mathcal{Q}$  una sequenza bilatera di variabili di Bernoulli ponendo:

$$\sigma : \mathcal{Q} \rightarrow \{-1; 1\}^{\mathbb{Z}} \quad : \quad \sigma_k(q(\cdot)) = \begin{cases} +1 & \text{se } \dot{q}(t_k) > 0 \\ -1 & \text{se } \dot{q}(t_k) < 0 \end{cases}$$

**TEOREMA 5.14.** *Se  $\mu > 0$  è piccolo a sufficienza si verifica quanto segue. Per ogni sequenza  $\tau \in \{-1; 1\}^{\mathbb{Z}}$  esiste una soluzione  $t \mapsto q(t)$  dell'Eq. (5.46) tale che:*

$$\sigma_k(q(\cdot)) = \tau_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

*Inoltre la curva di fase di tale soluzione rimane vicina alla separatrice per tutti i tempi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $x = (q, v)$  le coordinate nello spazio delle fasi  $\mathbb{R}^2$  e sia  $\varphi^{t, t_0}(x)$  la mappa soluzione. Sia  $\psi$  la mappa stroboscopica:

$$\psi : x(0) \rightarrow x(T), \quad T \doteq \frac{2\pi}{\omega}.$$

Per quanto stabilito nella Proposizione 5.5, per piccoli valori del parametro  $\mu$  la mappa  $\psi$  possiede un punto fisso iperbolico  $\bar{x}(\mu)$  vicino a  $x = (\pi, 0)$ . Mediante il metodo di Melnikov mostreremo nella Sezione 5.7 (Esempio 5.5) che  $\bar{x}(\mu)$  possiede un punto omoclino trasverso  $v(\mu)$  prossimo, con tutta la sua orbita  $\gamma(v(\mu))$ , alla separatrice. Possiamo ora costruire infinite  $\varepsilon$ -pseudo-orbite in  $\Lambda = \gamma(v(\mu)) \cup \{\bar{x}(\mu)\}$ , e quindi  $\delta$ -ombra-orbite vicino  $\Lambda$ , in modo da poter scegliere, ogni volta che arriviamo in prossimità del punto fisso  $\bar{x}(\mu)$ , se andare avanti o tornare indietro. Queste  $\delta$ -ombra-orbite sono contenute in un intorno tubolare della separatrice, di larghezza infinitesima per  $\mu \rightarrow 0$ . D'altra parte, su ciascun intervallo  $[kT, (k+1)T]$ , la dinamica a tempo continuo con  $\mu$  piccolo rimane vicina a quella (sul corrispondente livello di energia) con  $\mu = 0$ . Dunque la soluzione rimane vicina alla separatrice non solo ai tempi  $kT$ , ove  $\varphi^{kT, 0} = \psi^k$ , bensì per ogni tempo  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

### 5.7. Esistenza di intersezioni omocline trasverse in $\mathbb{R}^2$ e formula di Melnikov

Consideriamo un sistema piano periodicamente perturbato:

$$\dot{x} = v(x) + \mu g(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad g(t, x) = g(t + T, x),$$

con  $x = 0$  punto singolare iperbolico del campo vettoriale  $v$ ,  $\mu$  un parametro reale che varia in un intorno dello zero. Per quanto stabilito nella Proposizione 5.5, per piccoli valori del parametro  $\mu$  è univocamente determinata l'orbita iperbolica

$$\gamma(\mu) = \{\bar{x}(\mu, t_0) : t_0 \in [0, T]\},$$

tale che  $\bar{x}(\mu, t_0)$  è l'unico punto fisso (risultante essere iperbolico), vicino a  $x = 0$ , della mappa stroboscopica  $S_{t_0} = \varphi^{t_0+T, t_0}$ . Restano quindi definite, vedi l'Eq.

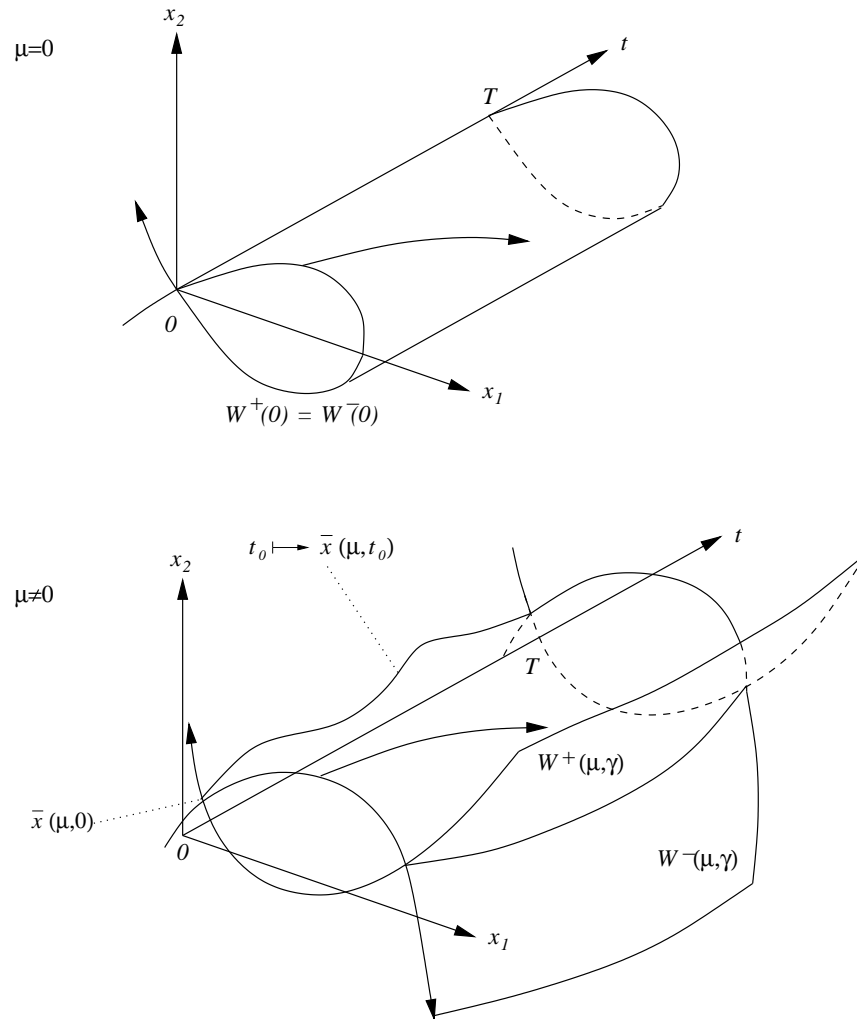


FIGURA 5.8. Varietà stabile ed instabile dell'orbita iperbolica  $\gamma(\mu)$  che si intersecano trasversalmente.

(5.23), le varietà stabile ed instabile  $W^\pm(\mu, \gamma)$  dell'orbita  $\gamma(\mu)$ . Supponiamo ora che per  $\mu = 0$  sia  $W^+(0) = W^-(0)$ , ovvero che il sistema non perturbato ammetta un'orbita omoclina di  $x = 0$ . Nel seguito ci occuperemo di trovare un criterio di intersezione (trasversa) delle varietà  $W^+(\mu, \gamma)$  e  $W^-(\mu, \gamma)$ , ovvero di determinare un'orbita omoclina  $\Gamma_\mu$  asintotica nel futuro e nel passato a  $\gamma(\mu)$ . Poiché  $W^\pm(\mu, t_0) = \varphi^{t_0, 0}(W^\pm(\mu, 0))$ , è sufficiente determinare un'intersezione trasversa  $v \in W^+(\mu, t_0) \cap W^-(\mu, t_0)$  per qualche  $t_0 \in [0, T]$ , essendo allora  $\Gamma_\mu = \{\varphi^{t, t_0}(v) : t \in \mathbb{R}\}$  l'orbita omoclina cercata.

Indichiamo con  $\Gamma_0 = \{\phi(\sigma) : \sigma \in \mathbb{R}\}$  l'orbita omoclina del sistema non perturbato (quindi  $\dot{\phi} = v(\phi)$ ,  $\phi(\pm\infty) = 0$ ).

**TEOREMA 5.15 (Formula di Melnikov).** *Assumiamo che il campo vettoriale  $v$*

abbia divergenza nulla (ad esempio il problema non perturbato è hamiltoniano).  
Definiamo “integrale di Melnikov” la funzione:

$$M(t_0) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \langle Jv(\phi(\tau)), g(\tau + t_0, \phi(\tau)) \rangle,$$

essendo  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Se esiste uno zero semplice dell'integrale di Melnikov, allora per ogni  $\mu$  sufficientemente piccolo esiste un'intersezione trasversa  $v(\mu, t_0) \in W^+(\mu, t_0) \cap W^-(\mu, t_0)$  per ogni  $t_0 \in [0, T]$ .

Si osservi che l'integrale di Melnikov è una funzione periodica, come è giusto che sia essendo  $S_{t_0} = S_{t_0+T}$ .

ESEMPIO 5.5. Prima di dimostrare il Teorema 5.15 applichiamo il risultato al caso del pendolo periodicamente forzato (5.46). L'hamiltoniana del sistema non perturbato è  $H(q, \dot{q}) = \dot{q}^2/2 + (1 - \cos q)$ . L'equazione delle orbite omocline è  $H(q, \dot{q}) = 2$ , ovvero:

$$\dot{q} = \pm \sqrt{2(1 + \cos q)},$$

che si integra per separazione delle variabili. Scegliendo la determinazione positiva otteniamo l'omoclina  $q(t) = 4 \arctan e^t - \pi$ . Quindi:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \arctan e^t - \pi \\ 2 / \cosh t \end{pmatrix},$$

da cui:

$$M(t_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{2 \sin[\omega(\tau + t_0)]}{\cosh \tau} = -2 \sin(\omega t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{2 \cos(\omega \tau)}{\cosh \tau}.$$

L'integrale è diverso da zero per ragioni di simmetria, cosicché  $t_0 = 0$  è uno zero semplice di  $M(t_0)$ :  $M(0) = 0$ ,  $M'(0) \neq 0$ . Concludiamo che esiste un'intersezione omoclina trasversa della mappa stroboscopica  $\varphi^{T,0}$  vicino al punto  $\phi(0) = (0, 2)$  sulla separatrice.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 5.15 (CENNO). Essendo la dipendenza dal parametro  $\mu$  regolare, le varietà locali  $W_{\text{loc}}^{\pm}(\mu, t_0)$  sono  $C^1$ -vicine alle varietà locali  $W_{\text{loc}}^{\pm}(0)$  per  $\mu$  prossimo a zero. Possiamo quindi fissare un disco  $B_r(0)$  all'interno del quale le varietà  $W^{\pm}(\mu, t_0)$  sono  $\mathcal{O}(\mu)$ -vicine a  $\Gamma_0$ . Sia  $\Sigma$  la sezione normale a  $\Gamma_0$  nel punto  $\phi(0)$ . La continuità rispetto ai dati iniziali ed alla perturbazione implica che  $|\varphi^{t, t_1}(x) - \phi(t - t_1)| = \mathcal{O}(\mu)$  se  $|x - \phi(0)| = \mathcal{O}(\mu)$  (la stima essendo uniforme su intervalli di tempo finiti). Ne segue che, pur di prendere  $\mu$  sufficientemente piccolo, le varietà  $W^{\pm}(\mu, t_0)$  rimangono  $\mathcal{O}(\mu)$ -vicine a  $\Gamma_0$  fino ad intersecare  $\Sigma$ . Sia ora  $\varphi_{\mu}^{+}(t, t_0)$  [risp.  $\varphi_{\mu}^{-}(t, t_0)$ ] la soluzione tale che  $\varphi_{\mu}^{+}(t_0, t_0)$  [risp.  $\varphi_{\mu}^{-}(t_0, t_0)$ ] è il primo punto di intersezione di  $W^{+}(\mu, t_0)$  [risp.  $W^{-}(\mu, t_0)$ ] con  $\Sigma$ . Tale soluzione giace sulla varietà invariante  $W^{+}(\mu, \gamma)$  [risp.  $W^{-}(\mu, \gamma)$ ] che, per quanto sopra detto, rimane  $C^1$ -vicina a  $\mathbb{R} \times W^{+}(0)$  [risp.  $\mathbb{R} \times W^{-}(0)$ ] per  $t > t_0$  [risp.  $t < t_0$ ]. In definitiva si ha:

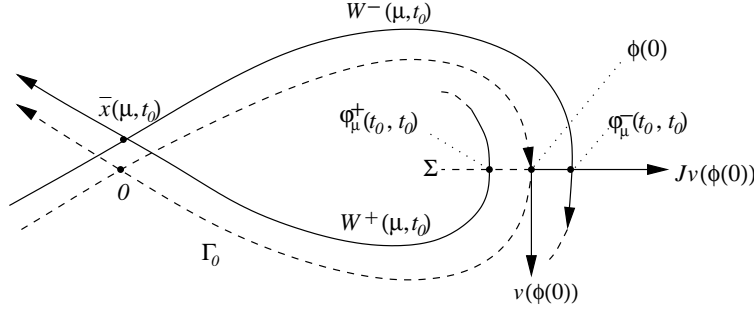


FIGURA 5.9. Per  $\mu$  piccolo le varietà  $W^\pm(\mu, t_0)$  intesecano la sezione normale all'orbita omoclina nel punto  $\phi(0)$ .

$$\begin{aligned}\varphi_\mu^+(t, t_0) &= \phi(t - t_0) + \mu q^+(t, t_0) + \mathcal{O}(\mu^2), & t \in [t_0, +\infty), \\ \varphi_\mu^-(t, t_0) &= \phi(t - t_0) + \mu q^-(t, t_0) + \mathcal{O}(\mu^2), & t \in (-\infty, t_0],\end{aligned}$$

essendo il resto  $\mathcal{O}(\mu^2)$  uniforme sugli intervalli indicati. Sostituendo gli sviluppi precedenti nelle equazioni del moto ed identificando i termini del primo ordine nel parametro  $\mu$ , si ricava facilmente che le funzioni  $q^\pm(t, t_0)$  sono soluzioni dell'equazione lineare:

$$\dot{q}^\pm(t, t_0) = Dv(\phi(t - t_0))q^\pm(t, t_0) + g(t, \phi(t - t_0)). \quad (5.47)$$

La separazione tra le varietà  $W^\pm(\mu, t_0)$  sulla sezione  $\Sigma$  è definita dalla distanza (con segno) tra i punti di intersezione  $\varphi_\mu^-(t_0, t_0)$  e  $\varphi_\mu^+(t_0, t_0)$ , ovvero:

$$d_\mu(t_0) \doteq \frac{\langle Jv(\phi(0)), [\varphi_\mu^-(t_0, t_0) - \varphi_\mu^+(t_0, t_0)] \rangle}{|v(\phi(0))|},$$

essendo

$$\frac{Jv(\phi(0))}{|v(\phi(0))|} = \frac{1}{|v(\phi(0))|} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(\phi(0)) \\ v_2(\phi(0)) \end{pmatrix} = \frac{1}{|v(\phi(0))|} \begin{pmatrix} -v_2(\phi(0)) \\ v_1(\phi(0)) \end{pmatrix}$$

la direzione normale a  $\Gamma_0$  in  $\phi(0)$ . Posto

$$\eta^\pm(t, t_0) = \langle Jv(\phi(t - t_0)), q^\pm(t, t_0) \rangle,$$

si ha:

$$d_\mu(t_0) = \mu \frac{\eta^-(t_0, t_0) - \eta^+(t_0, t_0)}{|v(\phi(0))|} + \mathcal{O}(\mu^2).$$

D'altra parte, dall'Eq. (5.47) ed essendo  $\dot{\phi} = v(\phi)$ ,

$$\begin{aligned}\dot{\eta}^\pm(t, t_0) &= \langle Jv(\phi(t - t_0)), [Dv(\phi(t - t_0))q^\pm(t, t_0) + g(t, \phi(t - t_0))] \rangle \\ &\quad + \langle JDv(\phi(t - t_0))v(\phi(t - t_0)), q^\pm(t, t_0) \rangle \\ &= \text{div } v(\phi(t - t_0))\eta^\pm(t, t_0) + \langle Jv(\phi(t - t_0)), g(t, \phi(t - t_0)) \rangle \\ &= \langle Jv(\phi(t - t_0)), g(t, \phi(t - t_0)) \rangle,\end{aligned}$$

avendo utilizzato nella penultima uguaglianza che  $(Dv)^t J + J(Dv) = \operatorname{div} v J$  e nell'ultima uguaglianza l'ipotesi di divergenza nulla del campo vettoriale  $v$ .

Poiché  $q^+(t, t_0)$  [risp.  $q^-(t, t_0)$ ] è uniformemente limitata su  $[t_0, +\infty)$  [risp.  $(-\infty, t_0]$ ] e  $v(\phi(t - t_0)) \rightarrow v(0) = 0$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ , segue che  $\eta^\pm(\pm\infty, t_0) = 0$ , cosicché, integrando l'equazione precedente,

$$\begin{aligned}\eta^+(t, t_0) &= - \int_t^{+\infty} ds \langle Jv(\phi(s - t_0)), g(s, \phi(s - t_0)) \rangle, \\ \eta^-(t, t_0) &= \int_{-\infty}^t ds \langle Jv(\phi(s - t_0)), g(s, \phi(s - t_0)) \rangle.\end{aligned}$$

Quindi  $\eta^-(t_0, t_0) - \eta^+(t_0, t_0) = M(t_0)$  e

$$d_\mu(t_0) = \mu \frac{M(t_0)}{|v(\phi(0))|} + \mathcal{O}(\mu^2).$$

Poiché  $|v(\phi(0))| = \mathcal{O}(1)$ , il termine  $\mu M(t_0)/|v(\phi(0))|$  domina su  $\mathcal{O}(\mu^2)$ . Ne segue che se al variare di  $t_0 \in [0, T]$  la funzione  $M(t_0)$  cambia segno allora anche  $d_\mu(t_0)$  deve cambiare segno per  $\mu$  sufficientemente piccolo. Più precisamente, se  $\tau_0$  è uno zero isolato di  $M$ , allora esiste un tempo  $\tau = \tau_0 + \mathcal{O}(\mu)$  per il quale  $\varphi_\mu^+(\mu, \tau) = \varphi_\mu^-(\mu, \tau)$ , ovvero esiste un punto omoclino  $v \in W^+(\mu, \tau) \cap W^-(\mu, \tau)$ . Un'analisi più accurata mostra inoltre che  $\mu M'(t_0)/|v(\phi(0))|$  fornisce (a meno di errori  $\mathcal{O}(\mu^2)$ ) la differenza tra le pendenze delle direzioni tangenti a  $W^-(\mu, \tau)$  e  $W^+(\mu, \tau)$  nel punto omoclino  $v$ . Quindi se  $M'(\tau_0) \neq 0$  l'intersezione è trasversa. Infine, come già osservato,  $\Gamma_\mu = \{\varphi^{t, t_0}(v) : t \in \mathbb{R}\}$  è un'orbita omoclina asintotica nel futuro e nel passato a  $\gamma(\mu)$ . In particolare esiste un punto omoclino trasverso  $v(\mu, t_0) \in W^+(\mu, t_0) \cap W^-(\mu, t_0)$  per ogni  $t_0 \in [0, T]$ .  $\square$

### 5.8. Nota bibliografica

Per gli argomenti trattati in questo capitolo si può fare riferimento ai testi sotto riportati.

- 1) V.I. Arnold. *Equazioni differenziali ordinarie*. Mosca: Edizioni Mir, 1978.
- 2) V.I. Arnold. *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*. Roma: Editori Riuniti, 1989.
- 3) J. Guckenheimer, P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. (Applied Mathematical Sciences **42**). Berlin: Springer, 1993.
- 4) A. Katok, B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. (Encyclopedia of mathematics and its applications **54**). Cambridge: Cambridge U.P., 1995.
- 5) S. Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. (Texts in applied mathematics **2**) New York : Springer Verlag, 2003.



## Stabilità degli equilibri

### 6.1. Nozione di stabilità

Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathcal{D}, \quad (6.1)$$

dove  $v \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$  è un campo vettoriale sull'insieme aperto  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sia  $\varphi^t(x)$ ,  $t \in J_x$ , la soluzione massimale del problema di Cauchy di dati iniziali  $\varphi^0(x) = x \in \mathcal{D}$  (quindi  $J_x$  è il più grande intervallo di definizione della soluzione). Ricordiamo che  $x_0 \in \mathcal{D}$  è detto *punto singolare* del campo vettoriale se  $v(x_0) = 0$ . Il problema di Cauchy di dati iniziali  $x_0$  ammette allora la soluzione stazionaria  $\varphi^t(x_0) = x_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , motivo per il quale  $x_0$  è anche detto *posizione di equilibrio* (o di *riposo*) dell'Eq. (6.1).

Nel seguito denotiamo con  $B_r(z)$  ( $r > 0$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ ) la palla aperta in  $\mathbb{R}^n$  di raggio  $r$  e centro  $z$ ; sia quindi  $\bar{B}_r(z)$  la sua chiusura e  $\partial B_r(z)$  la sua frontiera. Dunque:

$$B_r(z) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x - z| < r\}, \quad \bar{B}_r(z) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x - z| \leq r\},$$

$$\partial B_r(z) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - z| = r\}.$$

**DEFINIZIONE 6.1.** *Sia  $x_0 \in \mathcal{D}$  una posizione di equilibrio dell'equazione differenziale (6.1). Allora essa è detta stabile se per ogni  $\varepsilon > 0$  tale che  $\bar{B}_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{D}$  esiste  $\delta \in (0, \varepsilon]$  tale che  $\varphi^t(x) \in B_\varepsilon(x_0)$  per ogni  $t \geq 0$  ed  $x \in B_\delta(x_0)$ .*

**OSSERVAZIONE 6.1.** Nella definizione di stabilità abbiamo apparentemente assunto che tutte le soluzioni di dato iniziale  $x \in B_\delta(x_0)$  esistono globalmente nel futuro. In realtà ogni soluzione può avere l'intervallo massimale di esistenza limitato nel futuro solo se essa esce da ogni compatto  $K \subset \mathcal{D}$  in un tempo finito. Dunque richiedere che  $\varphi^t(x) \in B_\varepsilon(x_0)$  per ogni  $t \in J_x \cap \mathbb{R}_+$  implica automaticamente che  $J_x \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+$ .

**OSSERVAZIONE 6.2.** La proprietà di stabilità dell'equilibrio  $x_0$  equivale alla proprietà di continuità *uniforme nel tempo* della soluzione rispetto al dato iniziale nel punto  $x_0$ . Più precisamente equivale a richiedere che esista un intorno  $U$  di  $x_0$  contenuto in  $\mathcal{D}$  tale che  $\varphi^t(x)$  esista globale nel futuro per ogni  $x \in U$  ed inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sup_{t \geq 0} |\varphi^t(x) - x_0| = 0.$$

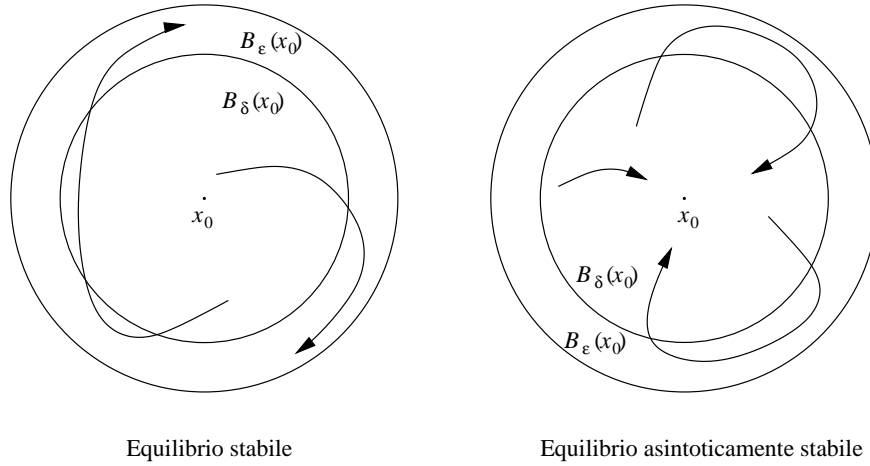


FIGURA 6.1. Equilibri stabili.

OSSERVAZIONE 6.3. Consideriamo il caso più generale del sistema non autonomo:

$$\dot{x} = v(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}, \quad (6.2)$$

dove  $v \in C^0(\mathbb{R} \times \mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ ,  $Dv \in C^0(\mathbb{R} \times \mathcal{D}; \mathcal{M}_n)$ . Sia  $\varphi^{t, t_0}(x)$ ,  $t \in J_{t_0, x}$ , la soluzione massimale del problema di Cauchy di dati iniziali  $\varphi^{t_0, t_0}(x) = x \in \mathcal{D}$  (quindi  $J_{t_0, x}$  è il più grande intervallo di definizione della soluzione). Diciamo che  $x_0 \in \mathcal{D}$  è una posizione di equilibrio se  $v(t, x_0) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Infatti in tal caso  $\varphi^{t, t_0}(x_0) = x_0$  per ogni  $t_0, t \in \mathbb{R}$ . Analogamente al caso autonomo, l'equilibrio  $x_0$  è detto stabile se per ogni  $t_0 \in \mathbb{R}$  ed  $\varepsilon > 0$  tale che  $\bar{B}_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{D}$  esiste  $\delta \in (0, \varepsilon]$  tale che  $\varphi^{t, t_0}(x) \in B_\varepsilon(x_0)$  per ogni  $t \geq t_0$  ed  $x \in B_\delta(x_0)$ . Si osservi che in generale  $\delta$  è una funzione di  $t_0$  ed  $\varepsilon$ . Se  $\delta$  può essere fissato indipendente da  $t_0$  allora la posizione di equilibrio  $x_0$  è detta uniformemente stabile. Nel caso autonomo la stabilità è sempre uniforme ed inoltre non è limitativo scegliere  $t_0 = 0$  poiché  $\varphi^{t, t_0}(x) = \varphi^{t-t_0}(x)$ .

DEFINIZIONE 6.2. Sia  $x_0 \in \mathcal{D}$  una posizione di equilibrio dell'equazione differenziale (6.1). Essa è detta asintoticamente stabile se è stabile ed inoltre il numero  $\delta$  può essere scelto in modo tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = x_0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0).$$

OSSERVAZIONE 6.4. La posizione di equilibrio  $x_0$  è detta *attraente* se esiste  $\sigma > 0$  tale che la soluzione  $\varphi^t(x)$  esiste globale nel futuro per  $x \in B_\sigma(x_0)$  ed inoltre

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = x_0 \quad \forall x \in B_\sigma(x_0).$$

Ad ogni posizione di equilibrio attraente associamo il suo *bacino di attrazione*, definito dall'insieme:

$$\mathcal{B}(x_0) \doteq \left\{ x \in \mathcal{D} : J_x \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+, \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = x_0 \right\}. \quad (6.3)$$

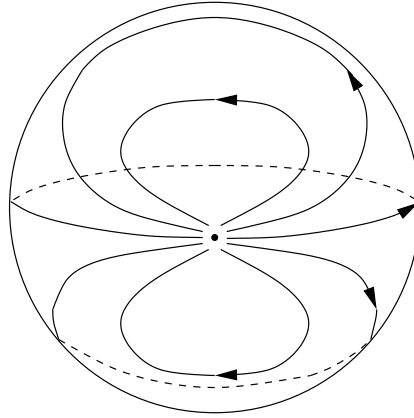


FIGURA 6.2. Equilibrio attrattivo ma instabile.

Tale insieme è un aperto in  $\mathcal{D}$ . Infatti se  $x \in \mathcal{B}(x_0)$  esiste  $T > 0$  tale che  $\varphi^T(x) \in B_\sigma(x_0)$ . Per la continuità del flusso (rispetto ai dati iniziali), possiamo fissare  $r > 0$  tale che, per ogni  $y \in B_r(x)$ , la soluzione  $\varphi^t(y)$  è definita su tutto l'intervallo  $[0, T]$  e  $\varphi^T(y) \in B_\sigma(x_0)$ . Ma allora, per la definizione di  $\sigma$ , anche  $\varphi^t(y)$  esiste globale nel futuro e converge ad  $x_0$  per  $t \rightarrow +\infty$ , ovvero  $y \in \mathcal{B}(x_0)$ . Dunque per ogni  $x \in \mathcal{B}(x_0)$  esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x) \subset \mathcal{B}(x_0)$ , ovvero  $\mathcal{B}(x_0)$  è aperto.

Chiaramente [stabilità] + [attrattività]  $\iff$  [asintotica stabilità]. Si osservi che la stabilità e l'asintotica stabilità sono proprietà *locali* del campo vettoriale (intorno al punto  $x_0$ ), mentre l'attrattività è una proprietà non locale della dinamica. In particolare una posizione di equilibrio può essere instabile ma attrattiva: in Figura 6.2 sono rappresentate le curve di fase di un campo vettoriale definito su una superficie sferica che possiede un punto singolare attrattivo, (il cui bacino di attrazione è l'intero spazio delle fasi), ma instabile.

**ESEMPIO 6.1.** Consideriamo il caso lineare ed omogeneo,  $v(x) = Ax$ , cosicché  $\varphi^t(x) = e^{At}x$ . In questo caso  $x_0 = 0$  è una posizione di equilibrio. Per quanto visto nel precedente capitolo possiamo dire che:

- Se  $\Re \lambda < 0$  per ogni  $\lambda \in \sigma(A)$  allora  $x_0 = 0$  è asintoticamente stabile.
- Se esiste  $\lambda \in \sigma(A)$  tale che  $\Re \lambda > 0$  allora  $x_0 = 0$  è instabile.
- Se  $\Re \lambda \leq 0$  per ogni  $\lambda \in \sigma(A)$  e  $\Re \lambda = 0$  per almeno un  $\lambda \in \sigma(A)$ , allora  $x_0 = 0$  è stabile (non asintoticamente) se ciascun autovalore immaginario puro possiede molteplicità geometrica ed algebrica coincidenti, altrimenti è instabile.

**OSSERVAZIONE 6.5.** Esiste un'ovvia generalizzazione della nozione di stabilità e stabilità asintotica al caso di soluzioni non stazionarie di una legge di evoluzione. Supponiamo che la soluzione  $\varphi^{t,t_0}(x)$  dell'Eq. (6.2) sia definita su tutto il semiasse dei tempi  $t \geq t_0$ . Essa è detta stabile se esiste un intorno  $U$  di  $x$  contenuto in  $\mathcal{D}$  tale che per ogni  $y \in U$  la soluzione  $\varphi^{t,t_0}(y)$  è anch'essa definita su

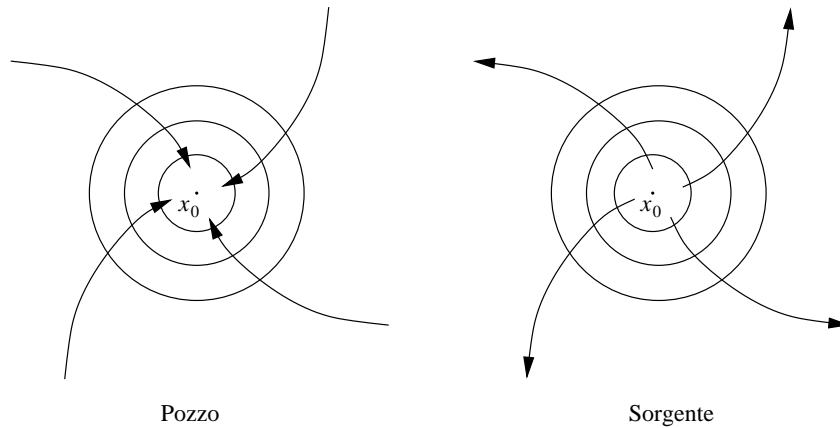


FIGURA 6.3. Pozzi e sorgenti (nella metrica adattata gli insiemi invarianti sono delle sfere).

tutto il semiasse dei tempi  $t \geq t_0$  e

$$\limsup_{y \rightarrow x} \sup_{t \geq t_0} |\varphi^{t, t_0}(y) - \varphi^{t, t_0}(x)| = 0.$$

La soluzione  $\varphi^{t, t_0}(x)$  è detta asintoticamente stabile se è stabile ed inoltre l'intorno  $U$  può essere scelto in modo tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi^{t, t_0}(y) - \varphi^{t, t_0}(x)| = 0 \quad \forall y \in U.$$

## 6.2. Stabilità riconosciuta dalla parte lineare

In questa sezione dimostriamo dei criteri di stabilità che scaturiscono dalla seguente domanda: in quali casi il carattere di stabilità (ovvero di instabilità) di un problema lineare non viene alterato da una perturbazione non lineare? Mostriamo che questo avviene nel caso iperbolico che ora definiamo.

Il punto singolare  $x_0$  dell'Eq. (6.1) è detto *iperbolico* se tutti gli autovalori della matrice jacobiana  $Dv(x_0)$  hanno parte reale non nulla. Analogamente al caso lineare,  $x_0$  è detto in particolare *pozzo* [risp. *sorgente*] se tutti gli autovalori di  $Dv(x_0)$  hanno parte reale negativa [risp. positiva].

**TEOREMA 6.3.** *Sia  $x_0 \in \mathcal{D}$  un pozzo dell'Eq. (6.1) e si fissi  $\gamma > 0$  tale che  $\Re \lambda < -\gamma$  per ogni  $\lambda \in \sigma(Dv(x_0))$ . Allora esiste un intorno aperto  $U$  di  $x_0$ , la cui chiusura  $\bar{U}$  è contenuta in  $\mathcal{D}$ , tale che:*

- i)  $U$  è positivamente invariante, ovvero  $\varphi^t(U) \subset U$  per ogni  $t \geq 0$ .
- ii) Esiste una norma  $|\cdot|_*$  in  $\mathbb{R}^n$  tale che:

$$|\varphi^t(x) - x_0|_* \leq e^{-\gamma t} |x - x_0|_* \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in U. \quad (6.4)$$

In particolare  $x_0$  è asintoticamente stabile.

DIMOSTRAZIONE. Senza perdere di generalità assumiamo  $x_0 = 0$  (possiamo sempre ridurci a questo caso mediante il cambiamento di coordinate  $x \rightarrow x - x_0$ ). Poniamo  $A \doteq Dv(0)$  e fissiamo un numero  $\gamma' > \gamma$  tale che  $\Re \lambda < -\gamma'$  per ogni  $\lambda \in \sigma(A)$ . Per il Teorema 2.9 applicato alla matrice  $A$  con  $\beta = -\gamma'$ , esiste una norma  $|\cdot|_*$  tale che:

$$\langle x, Ax \rangle_* \leq -\gamma' |x|_*^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

D'altra parte, essendo  $v(0) = 0$  e  $A = Dv(0)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|v(x) - Ax|_*}{|x|_*} = 0,$$

da cui, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Swartz,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\langle x, v(x) - Ax \rangle_*}{|x|_*^2} = 0.$$

Possiamo quindi determinare  $\delta > 0$  tale che, se  $|x|_* \leq \delta$ , allora  $x \in \mathcal{D}$ ,

$$\langle x, v(x) - Ax \rangle_* \leq (\gamma' - \gamma) |x|_*^2,$$

e dunque:

$$\langle x, v(x) \rangle_* = \langle x, Ax \rangle_* + \langle x, v(x) - Ax \rangle_* \leq -\gamma |x|_*^2.$$

Dimostriamo ora il teorema con  $U \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_* < \delta\}$ . Fissato  $x \in U$  sia

$$\tau \doteq \sup\{t > 0 : \varphi^s(x) \in U \forall s \in [0, t]\}.$$

Quindi  $\tau = +\infty$  significa che  $\varphi^t(x) \in U$  per ogni  $t \geq 0$ . Viceversa, se  $\tau < +\infty$ , essendo la frontiera di  $U$  contenuta in  $\mathcal{D}$ , la soluzione è prolungabile oltre  $\tau$  e per continuità  $|\varphi^\tau(x)| = \delta$ . Osserviamo ora che se  $t \in [0, \tau)$  allora:

$$\frac{d}{dt} |\varphi^t(x)|_*^2 = 2 \langle \varphi^t(x), v(\varphi^t(x)) \rangle_* \leq -2\gamma |\varphi^t(x)|_*^2,$$

da cui, ragionando come nella dimostrazione dell'Equazione (2.34),

$$|\varphi^t(x)|_* \leq e^{-\gamma t} |x|_* \quad \forall x \in U \quad \forall t \in [0, \tau).$$

In particolare  $|\varphi^t(x)|_* \leq |x|_* < \delta$  per tutti i tempi  $t \in [0, \tau)$ , il che implica  $\tau = +\infty$ . Infatti, se fosse  $\tau < +\infty$ , la funzione  $t \mapsto |\varphi^t(x)|$  avrebbe una discontinuità in  $t = \tau$ . In conclusione  $U$  è positivamente invariante e sussiste la stima (6.4).  $\square$

Si osservi che per l'equivalenza delle norme la disuguaglianza (6.4) implica l'esistenza di una costante  $K > 0$  tale che:

$$|\varphi^t(x) - x_0| \leq K e^{-\gamma t} |x - x_0| \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in U.$$

ESEMPIO 6.2. Consideriamo l'equazione del pendolo matematico piano con attrito lineare (vedi Esercizio 2.1):

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta - \beta \dot{\theta}, \quad \beta > 0. \quad (6.5)$$

La linearizzazione attorno alla posizione di equilibrio  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  è data dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\beta \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono  $\lambda_{\pm} = [-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\omega^2}]/2$ . Essendo  $\Re\lambda_{\pm} < 0$  concludiamo che  $(0, 0)$  è una posizione di equilibrio asintoticamente stabile.

Più in generale, sia  $q_0$  un minimo dell'energia potenziale  $U \in C^2(I; \mathbb{R})$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ , riconosciuto dalla parte lineare, ovvero  $U''(q_0) > 0$ . Allora  $(q, \dot{q}) = (q_0, 0)$  è una posizione di equilibrio asintoticamente stabile del problema unidimensionale  $\ddot{q} = -U'(q) - \beta\dot{q}$ .

**OSSERVAZIONE 6.6.** Il Teorema 6.3 fornisce un criterio sufficiente di stabilità asintotica. Mostriamo con un semplice esempio che tale criterio non è necessario. Consideriamo il campo vettoriale in  $\mathbb{R}^2$ ,

$$v(x) = \begin{pmatrix} -x_2 - a(x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ x_1 - a(x_1^2 + x_2^2)x_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad a > 0.$$

Chiaramente  $x = 0$  è una posizione di equilibrio del sistema. La matrice jacobiana è  $Dv(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , cosicché le curve di fase dell'equazione linearizzata  $\dot{x} = Dv(0)x$  sono (oltre l'origine) circonferenze di centro l'origine corrispondenti a moti circolari uniformi di velocità angolare  $\omega = 1$ . Dunque l'origine è un centro per tale dinamica (un equilibrio stabile non asintoticamente) e le ipotesi del Teorema 6.3 non sono verificate. È d'altra parte facile mostrare che  $x = 0$  è una posizione di equilibrio asintoticamente stabile per la dinamica non lineare. Infatti, se  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  è una soluzione non nulla del sistema, allora:

$$\frac{d}{dt}|x(t)|^2 = 2[x_1(t)\dot{x}_1(t) + x_2(t)\dot{x}_2(t)] = -2a[x_1(t)^2 + x_2(t)^2]^2 = -2a|x(t)|^4,$$

da cui, integrando per separazione delle variabili,

$$|x(t)|^2 = \frac{|x(0)|^2}{1 + 2a|x(0)|^2 t}. \quad (6.6)$$

Quindi tutte le palle centrate nell'origine sono insiemi positivamente invarianti, da cui segue che ogni soluzione  $\varphi^t(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , esiste globale nel futuro. Inoltre  $|\varphi^t(x)| \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ , cosicché  $x = 0$  è asintoticamente stabile (con bacino di attrazione l'intero piano  $\mathbb{R}^2$ ).

Si osservi infine che nel caso  $a < 0$  da (6.6) si deduce che ogni soluzione non nulla esplose in un tempo finito, in particolare  $x = 0$  è instabile.

**TEOREMA 6.4.** Sia  $x_0 \in \mathcal{D}$  una posizione di equilibrio dell'Eq. (6.1). Se esiste  $\lambda \in \sigma(Dv(x_0))$  tale che  $\Re\lambda > 0$  allora  $x_0$  è instabile. Equivalentemente, condizione necessaria per la stabilità di  $x_0$  è che  $\Re\lambda \leq 0$  per ogni  $\lambda \in \sigma(Dv(x_0))$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Senza perdere di generalità assumiamo  $x_0 = 0$ . Posto  $A \doteq Dv(0)$ , supponiamo che esista  $\lambda \in \sigma(A)$  tale che  $\Re\lambda > 0$  e dimostriamo che  $x = 0$  è instabile. Per quanto mostrato nella Sezione 2.6 esiste una decomposizione di  $\mathbb{R}^n$  in somma diretta di sottospazi invarianti rispetto ad  $A$ ,  $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$ , tale che, detta  $A_1$  [risp.  $A_2$ ] la restrizione di  $A$  al sottospazio  $E_1$  [risp.  $E_2$ ], si ha  $\Re\lambda > 0$  per ogni  $\lambda \in \sigma(A_1)$  [risp.  $\Re\lambda \leq 0$  per ogni  $\lambda \in \sigma(A_2)$ ]. Indichiamo con  $n_1$  [risp.  $n_2$ ] la

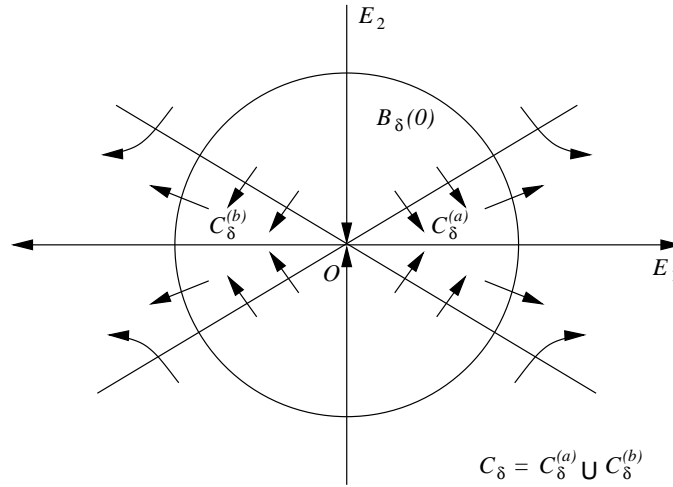


FIGURA 6.4. Il cono espulsivo.

dimensione di  $E_1$  [risp.  $E_2$ ]. Per le ipotesi fatte su  $\sigma(A)$  il sottospazio instabile  $E_1$  è non banale (ovvero  $n_1 > 0$ ).

Fissiamo  $\alpha > 0$  tale che  $\Re \lambda > \alpha$  per ogni  $\lambda \in \sigma(A_1)$ . Per il Teorema 2.9 applicato ad  $A_1$  esiste una norma  $|\cdot|_1$  su  $E_1$  tale che:

$$\langle y, A_1 y \rangle_1 \geq \alpha |y|_1^2 \quad \forall y \in E_1.$$

Analogamente, fissato  $\beta \in (0, \alpha)$ , poiché  $\sigma(A_2) \cap \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_-$ , esiste una norma  $|\cdot|_2$  su  $E_2$  tale che:

$$\langle z, A_2 z \rangle_2 \leq \beta |z|_2^2 \quad \forall z \in E_2.$$

Indichiamo con  $|\cdot|$  la norma euclidea su  $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$  definita dalla somma diretta delle norme precedenti:

$$|x| \doteq \sqrt{|y|_1^2 + |z|_2^2} \quad \text{se } x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \oplus E_2.$$

Lo sviluppo di Taylor al primo ordine del campo vettoriale attorno ad  $x = 0$  è:

$$v(x) = \begin{pmatrix} v_1(y, z) \\ v_2(y, z) \end{pmatrix} = Ax + f(x), \quad Ax = \begin{pmatrix} A_1 y \\ A_2 z \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(y, z) \\ f_2(y, z) \end{pmatrix},$$

con  $f(x)$  infinitesimo di ordine superiore al primo. In particolare, per ogni  $\varepsilon > 0$  possiamo determinare  $\delta > 0$  tale che:

$$|f(x)| \leq \varepsilon |x| \quad \forall x \in \bar{B}_\delta(0) \subset \mathcal{D}.$$

Fissiamo  $\varepsilon > 0$  tale che  $\gamma \doteq \alpha - \beta - 4\varepsilon > 0$ . Consideriamo il cono  $C \doteq \{x : |y|_1 > |z|_2\}$  e poniamo  $C_\delta \doteq C \cap B_\delta(0)$  (vedi Figura 6.4). Mostriamo che  $C_\delta$  è espulsivo, ovvero che per ogni  $x \in C_\delta$  la soluzione  $\varphi^t(x)$  si muove dentro  $C_\delta$  fino ad attraversare la frontiera  $\partial B_\delta(0)$  in un tempo finito. Dunque in particolare  $x = 0$  è instabile.

Si consideri la funzione:

$$W(x) = \frac{1}{2} (|y|_1^2 - |z|_2^2).$$

La derivata di  $W$  lungo una soluzione  $x(t)$  che giace in  $C_\delta$  può essere stimata come segue (omettiamo la dipendenza esplicita dal tempo):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(x) &= \langle y, \dot{y} \rangle_1 - \langle z, \dot{z} \rangle_2 \\ &= \langle y, A_1 y \rangle_1 - \langle z, A_2 z \rangle_2 + \langle y, f_1(y, z) \rangle_1 - \langle z, f_2(y, z) \rangle_2 \\ &\geq \alpha |y|_1^2 - \beta |z|_2^2 - 2|x| |f(x)| \geq \alpha |y|_1^2 - \beta |z|_2^2 - 2\varepsilon |x|^2 \\ &= (\alpha - 2\varepsilon) |y|_1^2 - (\beta + 2\varepsilon) |z|_2^2 \geq \gamma (|y|_1^2 - |z|_2^2) \\ &= 2\gamma W(x). \end{aligned}$$

Fissato  $x \in C_\delta$  sia  $\tau \doteq \sup\{t > 0 : \varphi^s(x) \in C_\delta \forall s \in [0, t]\}$ . Dalla stima precedente, per ogni  $t \in [0, \tau)$ ,

$$\frac{d}{dt} W(\varphi^t(x)) \geq 2\gamma W(\varphi^t(x)),$$

da cui, integrando,

$$W(\varphi^t(x)) \geq W(x) e^{2\gamma t} \quad \forall t \in [0, \tau).$$

Essendo  $W$  una funzione continua, essa è uniformemente limitata su  $C_\delta$ , per cui deve essere  $\tau < +\infty$ . Inoltre, essendo  $W(\varphi^t(x)) \geq W(x) > 0$  per ogni  $t \in [0, \tau)$ ,  $\varphi^t(x)$  non può attraversare le falde del cono (dove  $W = 0$ ), dunque deve necessariamente attraversare la frontiera  $\partial B_\delta(0)$ .  $\square$

Si osservi che come corollario dei precedenti teoremi deduciamo che un punto singolare iperbolico è necessariamente o instabile o asintoticamente stabile.

**ESEMPIO 6.3.** Consideriamo l'equazione del pendolo matematico piano in presenza o meno di attrito lineare:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta - \beta \dot{\theta}, \quad \beta \geq 0.$$

La linearizzazione attorno alla posizione di equilibrio  $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$  è data dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\beta \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono  $\lambda_\pm = [-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\omega^2}]/2$ . Essendo  $\Re \lambda_+ > 0$  (anche se  $\beta = 0$ ) concludiamo che  $(\pi, 0)$  è una posizione di equilibrio instabile.

### 6.3. Il metodo diretto di Liapunov

La dimostrazione del Teorema 6.3 si basa sull'esistenza di una norma che decresce lungo le soluzioni vicine alla posizione di equilibrio. L'idea di A. M. Liapunov è di utilizzare altre funzioni per controllare le proprietà di stabilità.

Sia  $v \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$  il campo vettoriale che appare nell'Eq. (6.1) e  $W : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile definita su un aperto  $U \subset \mathcal{D}$ . Indichiamo con  $\dot{W}$  la

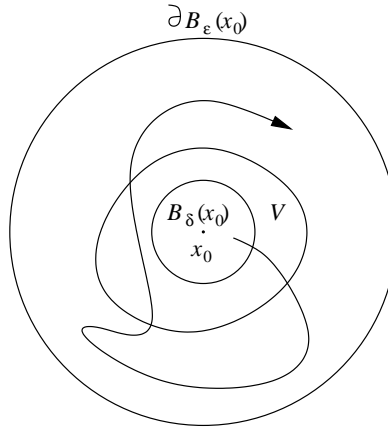


FIGURA 6.5. La soluzione di dati iniziali in  $V$  non può toccare  $\partial B_\varepsilon(x_0)$ .

derivata di Lie di  $W$  rispetto al campo vettoriale  $v$ , cioè  $\dot{W}(x) = \langle \nabla W(x), v(x) \rangle$ . Dal segno di  $\dot{W}$  si può così determinare se la funzione  $W$  cresce, decresce o rimane costante lungo le soluzioni. Il punto fondamentale è che per determinare  $\dot{W}$  non è necessario conoscere le soluzioni (da cui il termine *metodo diretto*).

**TEOREMA 6.5.** *Sia  $x_0 \in \mathcal{D}$  una posizione di equilibrio dell'Eq. (6.1). Supponiamo che esista una funzione continua  $W : U \rightarrow \mathbb{R}$  definita su un intorno  $U \subset \mathcal{D}$  di  $x_0$ , che sia differenziabile in  $U \setminus \{x_0\}$  e tale che:*

- 1)  $W(x_0) = 0$  e  $W(x) > 0$  per  $x \neq x_0$ ,
- 2)  $\dot{W}(x) \leq 0$  in  $U \setminus \{x_0\}$ .

Allora  $x_0$  è stabile. Se inoltre:

- 3)  $\dot{W}(x) < 0$  in  $U \setminus \{x_0\}$ ,

allora  $x_0$  è asintoticamente stabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo  $\varepsilon > 0$  tale che  $\bar{B}_\varepsilon(x_0) \subset U$  e poniamo

$$\alpha \doteq \min\{W(x) : x \in \partial B_\varepsilon(x_0)\}.$$

Per l'ipotesi 1) su  $W$  è  $\alpha > 0$ . Per la continuità di  $W$  l'insieme  $V \doteq \{x \in B_\varepsilon(x_0) : W(x) < \alpha\}$  è un insieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ , ed inoltre esso contiene  $x_0$  poiché  $W(x_0) = 0$ . Dunque esiste  $\delta > 0$  tale che  $B_\delta(x_0) \subset V$ . Per ogni  $x \in B_\delta(x_0)$ ,  $x \neq x_0$ , poniamo

$$\tau \doteq \sup\{t > 0 : \varphi^s(x) \in B_\varepsilon(x_0) \forall s \in [0, t]\}.$$

Dimostriamo che  $\tau = +\infty$ . Ragioniamo per assurdo ed assumiamo  $\tau < +\infty$ . Essendo  $\bar{B}_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{D}$ , la soluzione  $\varphi^t(x)$  è prolungabile oltre  $\tau$  e per continuità  $\varphi^\tau(x) \in \partial B_\varepsilon(x_0)$ , da cui  $W(\varphi^\tau(x)) \geq \alpha$ . D'altra parte, per l'ipotesi 2),  $W(\varphi^t(x))$  è decrescente per  $t \in [0, \tau)$ . Quindi  $W(\varphi^t(x)) \leq W(x) < \alpha$  per ogni  $t \in [0, \tau)$ . Si giunge così ad una contraddizione poiché la funzione  $t \mapsto W(\varphi^t(x))$  avrebbe una discontinuità in  $t = \tau$ . Quindi ogni soluzione che origina da punti in  $B_\delta(x_0)$

rimane in  $B_\varepsilon(x_0)$  per tutti i tempi. Vista l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  concludiamo che  $x_0$  è stabile.

Supponiamo ora che valga anche l'ipotesi 3). Dimostriamo che in tal caso:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = x_0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0)$$

( $\delta$  come sopra), da cui la asintotica stabilità di  $x_0$ . Ragioniamo per assurdo ed assumiamo che esista  $x \in B_\delta(x_0)$  tale che  $\varphi^t(x)$  non converge ad  $x_0$ . Possiamo allora determinare  $0 < \delta_1 < |x|$  ed una successione divergente di tempi  $\{t_k; k \in \mathbb{N}\}$  tale che  $\varphi^{t_k}(x) \in B_\varepsilon(x_0) \setminus B_{\delta_1}(x_0)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Per compattezza (eventualmente restringendosi ad una sottosuccessione), possiamo assumere che esiste  $z \neq x_0$  tale che:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi^{t_k}(x) = z.$$

Essendo  $z \in \bar{B}_\varepsilon(x_0) \subset U$ , esiste un tempo  $t > 0$  tale che  $\varphi^s(z)$  è definito e contenuto in  $U \setminus \{x_0\}$  per ogni  $s \in [0, t]$ . D'altra parte, per continuità,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} W(\varphi^{t+t_k}(x)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} W(\varphi^t(\varphi^{t_k}(x))) = W(\varphi^t(z)).$$

Ma per l'ipotesi 3)  $W$  è strettamente decrescente lungo le soluzioni in  $U \setminus \{x_0\}$ . In particolare  $W(\varphi^{t+t_k}(x)) > W(\varphi^{t_h}(x))$  per ogni  $t_h > t + t_k$ , cosicché:

$$W(\varphi^{t+t_k}(x)) > W(z) > W(\varphi^t(z)).$$

Nel limite  $k \rightarrow +\infty$  giungiamo alla contraddizione  $W(\varphi^t(z)) \geq W(z) > W(\varphi^t(z))$ .  $\square$

Una funzione  $W$  che soddisfa le condizioni del Teorema 6.5 è detta *funzione di Liapunov* per il punto singolare  $x_0$ . In particolare è detta *funzione di Liapunov in senso stretto* se anche la condizione 3) del teorema è soddisfatta.

**COROLLARIO 6.6** (Teorema di Lagrange-Dirichlet). *Consideriamo un sistema meccanico descritto dalla lagrangiana:*

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle + \langle b(q), \dot{q} \rangle - U(q) \quad (6.7)$$

dove le coordinate  $q$  sono definite in un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^d$ ,  $A \in C^2(\Omega; \mathcal{M}_d)$ ,  $b \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ ,  $U \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ , e la matrice  $A(q)$  è definita positiva per ogni  $q \in \Omega$ . Si assuma che  $q_0 \in \Omega$  è un minimo proprio (locale) dell'energia potenziale  $U$ . Allora  $(q_0, 0)$  è una posizione di equilibrio stabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Le equazioni del moto,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q},$$

possono essere poste in forma normale essendo  $A(q)$  invertibile. Più precisamente esse equivalgono al seguente sistema del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = F(q, v) \end{cases} \quad (q, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^d,$$

essendo:

$$F(q, v) = -A^{-1}(q) \left[ \frac{\partial U}{\partial q}(q) + \langle v, \frac{\partial A}{\partial q}(q) \rangle v - \frac{1}{2} \langle v, \frac{\partial A}{\partial q}(q) v \rangle + B(q)v \right],$$

dove  $B(q)$  è la matrice antisimmetrica di elementi

$$B_{i,j}(q) = \frac{\partial b_i}{\partial q_j}(q) - \frac{\partial b_j}{\partial q_i}(q).$$

Essendo la lagrangiana  $L$  indipendente dal tempo, il sistema ammette l'integrale primo dell'energia meccanica totale:

$$E(q, v) = \frac{1}{2} \langle v, A(q)v \rangle + U(q),$$

ovvero  $E(q, v)$  è costante lungo le soluzioni del moto (verificarlo per esercizio!). Posto  $W(q, v) = E(q, v) - U(q_0)$ , per le ipotesi su  $q_0$  segue immediatamente che  $W$  è una funzione di Liapunov (non in senso stretto, essendo  $\dot{W}(q, v) = 0$ ).  $\square$

I sistemi meccanici sopra considerati sono caratterizzati da una legge di conservazione, ovvero dall'esistenza di un integrale primo, l'energia meccanica. Una classe di sistemi con un comportamento alquanto differente è costituito dai *sistemi gradienti*. Essi sono definiti da equazioni del tipo:

$$\dot{x} = -\nabla F(x), \quad (6.8)$$

dove  $F \in C^2(\mathcal{D}; \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{D}$  un aperto in  $\mathbb{R}^n$ .

**COROLLARIO 6.7.** *Le curve di fase del sistema (6.8) attraversano ortogonalmente le superfici di livello  $F^{-1}(c) \doteq \{x \in \mathcal{D} : F(x) = c\}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , nei punti regolari di  $F$ . I punti critici di  $F$  sono posizioni di equilibrio del sistema. I minimi isolati sono asintoticamente stabili.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\bar{x}$  un punto regolare di  $F$  (ovvero  $\nabla F(\bar{x}) \neq 0$ ) e poniamo  $c = F(\bar{x})$ . Senza perdere di generalità assumiamo che  $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{x}) \neq 0$ . Per il teorema della funzione implicita esiste un intorno  $U$  di  $\bar{x}$  ed una funzione  $g \in C^2(V; \mathbb{R})$ ,  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$  intorno di  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$ , tali che  $g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) = \bar{x}_n$  ed  $F^{-1}(c) \cap U$  è il grafico della funzione  $g$  (ovvero una superficie di codimensione uno). Inoltre, se  $\lambda \rightarrow x(\lambda)$  è una qualsiasi curva giacente su  $F^{-1}(c)$  tale che  $x(0) = \bar{x}$ , essendo  $F(x(\lambda)) \equiv c$  si ha in particolare:

$$0 = \frac{d}{d\lambda} F(x(\lambda)) \Big|_{\lambda=0} = \langle \nabla F(\bar{x}), x'(0) \rangle.$$

Quindi  $\nabla F(\bar{x})$  è ortogonale ad ogni vettore  $x'(0)$  tangente ad  $F^{-1}(c)$  in  $\bar{x}$ .

Chiaramente  $x_0$  è una posizione di equilibrio dall'equazione (6.8) se e solo se  $\nabla F(x_0) = 0$ , ovvero se  $x_0$  è un punto critico della funzione  $F$ . Osserviamo infine che:

$$\dot{F}(x) = -\langle \nabla F(x), \dot{x} \rangle = -|\nabla F(x)|^2,$$

cosicché  $\dot{F}(x) \leq 0$  per ogni  $x \in \mathcal{D}$  ed  $\dot{F}(x) = 0$  se e solo se  $x$  è una posizione di equilibrio. Ne segue che se  $x_0$  è un minimo isolato di  $F$  allora  $W(x) \doteq F(x) -$

$F(x_0)$  è una funzione di Liapunov in senso stretto per  $x_0$ , da cui la asintotica stabilità.  $\square$

ESERCIZIO 6.1. Si consideri il seguente sistema in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y(z-1) \\ \dot{y} = -x(z-1) \\ \dot{z} = -(x^2+1)z^3 \end{cases}$$

Dimostrare che la posizione di equilibrio  $(0, 0, 0)$  è stabile determinando una funzione di Liapunov. È tale equilibrio asintoticamente stabile? [Suggerimento: Cercare la funzione di Liapunov nella forma  $W(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$  per opportuni valori di  $a, b, c > 0$ .]

#### 6.4. Insiemi limite e bacini di attrazione

Sia  $x_0$  è una posizione di equilibrio asintoticamente stabile dell'Eq. (6.1). Tutte le soluzioni che originano da punti appartenenti al suo bacino di attrazione, vedi definizione (6.3), sono di fatto identificabili, asintoticamente nel tempo, con la stessa soluzione stazionaria. È quindi importante poter valutare il bacino di attrazione di una posizione di riposo. In questa direzione va il teorema di stabilità di Barbashin-Krasovskii, che dimostreremo in questa sezione. Prima di discuterlo premettiamo alcune definizioni e proprietà supplementari sui sistemi autonomi di cui avremo bisogno in seguito.

Sia  $x \in \mathcal{D}$  ed indichiamo al solito con  $\varphi^t(x)$ ,  $t \in J_x$ , la soluzione massimale del problema di Cauchy di dati iniziali  $\varphi^0(x) = x$ . Definiamo:

$$\begin{aligned} \gamma_+(x) &\doteq \{\varphi^t(x) : t \geq 0\} && \text{semiorbita positiva per } x && \text{se } \mathbb{R}_+ \subset J_x, \\ \gamma_-(x) &\doteq \{\varphi^t(x) : t \leq 0\} && \text{semiorbita negativa per } x && \text{se } \mathbb{R}_- \subset J_x, \\ \gamma(x) &\doteq \{\varphi^t(x) : t \in \mathbb{R}\} && \text{orbita per } x && \text{se } \mathbb{R} = J_x. \end{aligned}$$

Osserviamo che  $\gamma_+(x)$  [risp.  $\gamma_-(x)$ ] è positivamente [risp. negativamente] invariante. In particolare:

$$\varphi^{\pm t}(\gamma_{\pm}(x)) = \gamma_{\pm}(\varphi^{\pm t}(x)) \subset \gamma_{\pm}(x) \quad \forall t \geq 0.$$

Chiaramente  $\gamma(x)$  è invariante, i.e.  $\varphi^t(\gamma(x)) = \gamma(\varphi^t(x)) = \gamma(x)$ .

Sia  $x \in \mathcal{D}$  tale che  $\mathbb{R}_+ \subset J_x$ . Chiamiamo *insieme  $\omega$ -limite* (o *insieme limite positivo*) di  $x$ , che indichiamo con  $L_{\omega}(x)$ , la collezione di tutti i punti  $y \in \mathcal{D}$  per ciascuno dei quali esiste una successione di numeri positivi  $\{t_k; k \in \mathbb{N}\}$  tale che  $t_k \rightarrow +\infty$  e  $\varphi^{t_k}(x) \rightarrow y$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Quindi:

$$L_{\omega}(x) \doteq \{y \in \mathcal{D} : \exists \{t_k\}, t_k \rightarrow +\infty, \text{ tale che } \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi^{t_k}(x) = y\}.$$

Analogamente, se  $\mathbb{R}_- \subset J_x$  chiamiamo *insieme  $\alpha$ -limite* (o *insieme limite negativo*) l'insieme:

$$L_{\alpha}(x) \doteq \{y \in \mathcal{D} : \exists \{t_k\}, t_k \rightarrow -\infty, \text{ tale che } \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi^{t_k}(x) = y\}.$$

LEMMA 6.8. *Gli insiemi  $L_\omega(x)$  ed  $L_\alpha(x)$  sono chiusi in  $\mathcal{D}$  ed invarianti. Inoltre, se la chiusura della semiorbita  $\gamma_+(x)$  [risp.  $\gamma_-(x)$ ] è un insieme compatto contenuto in  $\mathcal{D}$ , allora  $L_\omega(x)$  [risp.  $L_\alpha(x)$ ] è un insieme non vuoto, compatto e connesso, tale che:*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\varphi^t(x), L_\omega(x)) = 0 \quad [\text{risp. } \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\varphi^t(x), L_\alpha(x)) = 0]. \quad (6.9)$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo le affermazioni per l'insieme  $L_\omega(x)$ , l'altro caso è del tutto simile.

Mostriamo dapprima che  $L_\omega(x)$  è un chiuso in  $\mathcal{D}$ . Sia:

$$\{y_k; k \in \mathbb{N}\} \subset L_\omega(x) : \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = y \in \mathcal{D}.$$

Dobbiamo dimostrare che  $y \in L_\omega(x)$ . Fissato un intero  $p > 0$  scegliamo  $k_p$  tale che  $|y - y_{k_p}| < (2p)^{-1}$ . Consideriamo una successione divergente di tempi  $\{t_j; j \in \mathbb{N}\}$  tale che  $\varphi^{t_j}(x) \rightarrow y_{k_p}$  per  $j \rightarrow +\infty$ . Fissiamo quindi un intero  $j_p$  così grande che  $t_{j_p} > p$  e  $|\varphi^{t_{j_p}}(x) - y_{k_p}| < (2p)^{-1}$ . Posto  $\tau_p = t_{j_p}$ , otteniamo in tal modo una successione divergente di tempi  $\{\tau_p; p \in \mathbb{N}\}$  tale che  $|\varphi^{\tau_p}(x) - y| \leq |\varphi^{t_{j_p}}(x) - y_{k_p}| + |y_{k_p} - y| < p^{-1}$ , ovvero  $\varphi^{\tau_p}(x) \rightarrow y$  per  $p \rightarrow +\infty$ . Dunque  $y \in L_\omega(x)$ .

Mostriamo ora che  $L_\omega(x)$  è invariante. Sia  $y \in L_\omega(x)$ , cosicché esiste  $t_k \nearrow +\infty$  tale che  $\varphi^{t_k}(x) \rightarrow y$ . Poiché l'intervallo massimale di esistenza  $J_x$  della soluzione  $\varphi^t(x)$  contiene strettamente la semiretta positiva, la soluzione  $\varphi^t(\varphi^{t_k}(x))$  è definita per ogni  $t \in [-t_k, +\infty)$  ed inoltre  $\varphi^t(\varphi^{t_k}(x)) = \varphi^{t+t_k}(x)$ . Per il teorema di continuità rispetto ai dati iniziali, poiché  $\varphi^{t_k}(x) \rightarrow y \in \mathcal{D}$  e  $t_k \nearrow +\infty$ , la soluzione  $\varphi^t(y)$  è definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$  ed inoltre:

$$\varphi^t(y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi^t(\varphi^{t_k}(x)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi^{t+t_k}(x),$$

ovvero  $\varphi^t(y) \in L_\omega(x)$ .

Supponiamo ora che la chiusura  $\overline{\gamma_+(x)}$  della semiorbita  $\gamma_+(x)$  sia compatta e contenuta in  $\mathcal{D}$ . Chiaramente  $L_\omega(x)$  è non vuoto poiché esistono successioni convergenti in  $\gamma_+(x)$  per compattezza. Inoltre  $L_\omega(x)$  è un compatto essendo un chiuso contenuto in  $\overline{\gamma_+(x)}$ . Dimostriamo che è connesso ragionando per assurdo. Supponiamo quindi che  $L_\omega(x) = B_1 \cup B_2$  con  $B_1$  e  $B_2$  compatti e disgiunti. Per le proprietà di separazione di  $\mathbb{R}^n$  esiste un insieme aperto e limitato  $A$  tale che

$$B_1 \subset A \subset \bar{A} \subset \mathcal{D} \setminus B_2.$$

Per definizione di  $\omega$ -limite esistono successioni divergenti di tempi  $\{t_k^{(i)}; k \in \mathbb{N}\}$ ,  $i = 1, 2$ , tali che:

$$\exists y_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi^{t_k^{(i)}}(x) \in B_i, \quad i = 1, 2.$$

Allora, per continuità, la traiettoria  $t \mapsto \varphi^t(x)$  interseca la frontiera  $\partial A = \bar{A} \setminus A$  infinite volte ed in corrispondenza di una successione divergente di tempi. Per compattezza, possiamo determinare una successione divergente di tempi  $\{\tau_k; k \in \mathbb{N}\}$  tale che  $\varphi^{\tau_k}(x)$  converge ad un punto  $y \in \partial A$ . Quindi  $y \in L_\omega(x)$  da cui una contraddizione essendo  $L_\omega(x) \cap \partial A = \emptyset$ .

Infine, supponiamo per assurdo che il limite (6.9) sia falso. Allora esistono  $\varepsilon > 0$  ed una successione di tempi divergente  $\{t_k; k \in \mathbb{N}\}$  per i quali si ha  $\text{dist}(\varphi^{t_k}(x), L_\omega(x)) > \varepsilon$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Per compattezza possiamo estrarre una sottosuccessione convergente. Detto  $y$  il limite di tale sottosuccessione, per la continuità della distanza si ha  $\text{dist}(y, L_\omega(x)) \geq \varepsilon$ . Ma essendo  $\overline{\gamma_+(x)} \subset \mathcal{D}$  è anche  $y \in L_\omega(x)$ , da cui una contraddizione.  $\square$

ESEMPIO 6.4. Vediamo alcuni esempi semplici di insiemi limite.

1) Sia  $x_0$  un punto singolare attrattivo e  $\mathcal{B}(x_0)$  il suo bacino di attrazione. Allora  $L_\omega(x) = \{x_0\}$  per ogni  $x \in \mathcal{B}(x_0)$ .

2) Sia  $\gamma(x)$  un'orbita chiusa. Nel caso banale  $\gamma(x) = \{x\}$ ,  $x$  è un punto singolare del campo e l'orbita è l'immagine della soluzione stazionaria  $\varphi^t(x) = x$ . Nel caso non banale essa è l'immagine di una soluzione periodica, ovvero esiste un più piccolo tempo  $T > 0$  tale che  $\varphi^T(x) = x$ . In entrambi i casi  $L_\omega(x) = L_\alpha(x) = \gamma(x)$ . Infatti gli insiemi limite sono contenuti in  $\gamma(x)$  essendo l'orbita chiusa e d'altra parte per ogni punto  $y \in \gamma(x)$  esiste un  $\tau \in [0, T]$  tale che  $y = \varphi^{\tau+kT}(x)$  per ogni  $k \in \mathbb{Z}$ . Dunque  $y \in L_\omega(x) \cap L_\alpha(x)$ .

3) Si consideri il flusso lineare sul toro  $\mathbb{T}^2$  studiato nella [Sezione 3.6. Dal Corollario 3.9 concludiamo che se le frequenze sono razionalmente indipendenti allora  $L_\omega(\theta) = L_\alpha(\theta) = \mathbb{T}^2$  per ogni  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2$ . Se invece le frequenze sono razionalmente dipendenti allora le orbite sono chiuse, dunque  $L_\omega(\theta) = L_\alpha(\theta) = \gamma(\theta)$  per ogni  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2$ .

TEOREMA 6.9 (Il Teorema di Barbashin-Krasovskii). *Sia  $x_0$  una posizione di equilibrio per la quale esista una funzione di Liapunov  $W : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo inoltre che esista un intorno  $\mathcal{P} \subset U$  di  $x_0$ , chiuso (in  $\mathbb{R}^n$ ) e limitato, tale che:*

a)  $\mathcal{P}$  è positivamente invariante,

b) non esistono orbite interamente contenute in  $\mathcal{P} \setminus \{x_0\}$  lungo le quali la funzione  $W$  è costante.

Allora  $x_0$  è asintoticamente stabile e  $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}(x_0)$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $x \in \mathcal{P}$ . Essendo  $\overline{\gamma_+(x)} \subset \mathcal{P}$ , l'insieme  $L_\omega(x)$  è non vuoto, compatto, connesso e contenuto in  $\mathcal{P}$ . Poiché  $\mathcal{P}$  è un insieme positivamente invariante contenuto nel dominio  $U$  della funzione di Liapunov, si ha  $\dot{W}(\varphi^t(x)) \leq 0$  per ogni  $t \geq 0$ . Quindi la funzione  $t \mapsto W(\varphi^t(x))$  è monotona ed esiste il limite

$$W_0(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} W(\varphi^t(x)).$$

Essendo  $W$  una funzione continua, dalla definizione di  $\omega$ -limite concludiamo che  $W(y) = W_0(x)$  per ogni  $y \in L_\omega(x)$ . Ma essendo  $L_\omega(x)$  invariante,  $\gamma(y) \subset L_\omega(x)$  per ogni  $y \in L_\omega(x)$ , cosicché la funzione di Liapunov è costante lungo tutta l'orbita  $\gamma(y)$  di ciascun punto  $y \in L_\omega(x)$ . Allora, per l'assunto b) del teorema,  $L_\omega(x) = \{x_0\}$  necessariamente. Essendo  $\overline{\gamma_+(x)}$  un compatto in  $\mathcal{D}$  vale inoltre il limite (6.9). Abbiamo in tal modo dimostrato che:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = x_0 \quad \forall x \in \mathcal{P}.$$

Dunque  $x_0$  è asintoticamente stabile e  $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}(x_0)$ .  $\square$

**COROLLARIO 6.10** (Problema lagrangiano con forze dissipative). *Consideriamo un sistema meccanico descritto dal sistema differenziale del secondo ordine:*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} + Q(q, \dot{q}),$$

dove la lagrangiana  $L(q, \dot{q})$  è definita come in (6.7) e le forze addizionali  $Q \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$  sono delle “dissipazioni complete”, ovvero tali che:

$$Q(q, 0) = 0 \quad \forall q \in \Omega, \quad \langle v, Q(q, v) \rangle < 0 \quad \forall q \in \Omega \quad \forall v \neq 0. \quad (6.10)$$

Si assuma che  $q_0 \in \Omega$  è un minimo isolato dell'energia potenziale  $U$ . Allora  $(q_0, 0)$  è una posizione di equilibrio asintoticamente stabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Analogamente al caso conservativo analizzato nel Corollario 6.6, le equazioni del moto possono essere poste in forma normale. Utilizzando la medesima notazione introdotta nel suddetto corollario, otteniamo ora:

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = F(q, v) + A^{-1}(q)Q(q, v) \end{cases} \quad (q, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^d,$$

Posto  $W(q, v) = E(q, v) - U(q_0)$  con  $E(q, v)$  l'energia meccanica totale del sistema, si ha in tal caso:

$$\dot{W}(q, v) = \langle v, Q(q, v) \rangle.$$

Dall'ipotesi (6.10) segue che  $W$  è una funzione di Liapunov, cosicché  $(q_0, 0)$  è una posizione di equilibrio stabile. Purtroppo  $W$  non è una funzione di Liapunov in senso stretto, ovvero non vale l'ipotesi 3) del Teorema 6.5. Infatti  $\dot{W}(q, 0) = 0$  per ogni  $q \in \Omega$ . Per dimostrare la asintotica stabilità utilizziamo allora il teorema di Barbashin-Krasovskii. Fissato  $\varepsilon > 0$  consideriamo il sottoinsieme dello spazio delle fasi:

$$\mathcal{D}_\varepsilon \doteq \{(q, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^d : W(q, v) \leq \varepsilon\}.$$

Chiaramente  $\mathcal{D}_\varepsilon$  è positivamente invariante poiché  $W$  non cresce lungo le soluzioni. Indichiamo con  $\mathcal{P}_\varepsilon$  la componente connessa di  $\mathcal{D}_\varepsilon$  che contiene il punto  $(q_0, 0)$ . Essendo  $q_0$  un minimo isolato, se  $\varepsilon$  è scelto sufficientemente piccolo allora  $\mathcal{P}_\varepsilon$  è un intorno chiuso e limitato di  $(q_0, 0)$  tale che:

$$F(q, 0) = -A^{-1}(q) \frac{\partial U}{\partial q}(q) \neq 0 \quad \forall (q, 0) \in \mathcal{P}_\varepsilon \setminus \{(q_0, 0)\}. \quad (6.11)$$

Inoltre  $\mathcal{P}_\varepsilon$  è positivamente invariante, essendo strettamente separato dal suo complementare in  $\mathcal{D}_\varepsilon$ . Rimane da verificare la condizione b) del Teorema 6.9. Poiché  $\dot{W}(q, v) = 0$  solo se  $v = 0$ , le uniche orbite lungo le quali la funzione  $W$  è costante sono le posizioni di equilibrio. La condizione b) segue allora dalla (6.11) che implica  $(q_0, 0)$  essere l'unica posizione di equilibrio in  $\mathcal{P}_\varepsilon$ . Dunque  $q_0$  è asintoticamente stabile e  $\mathcal{P}_\varepsilon \subset \mathcal{B}(q_0, 0)$ .  $\square$

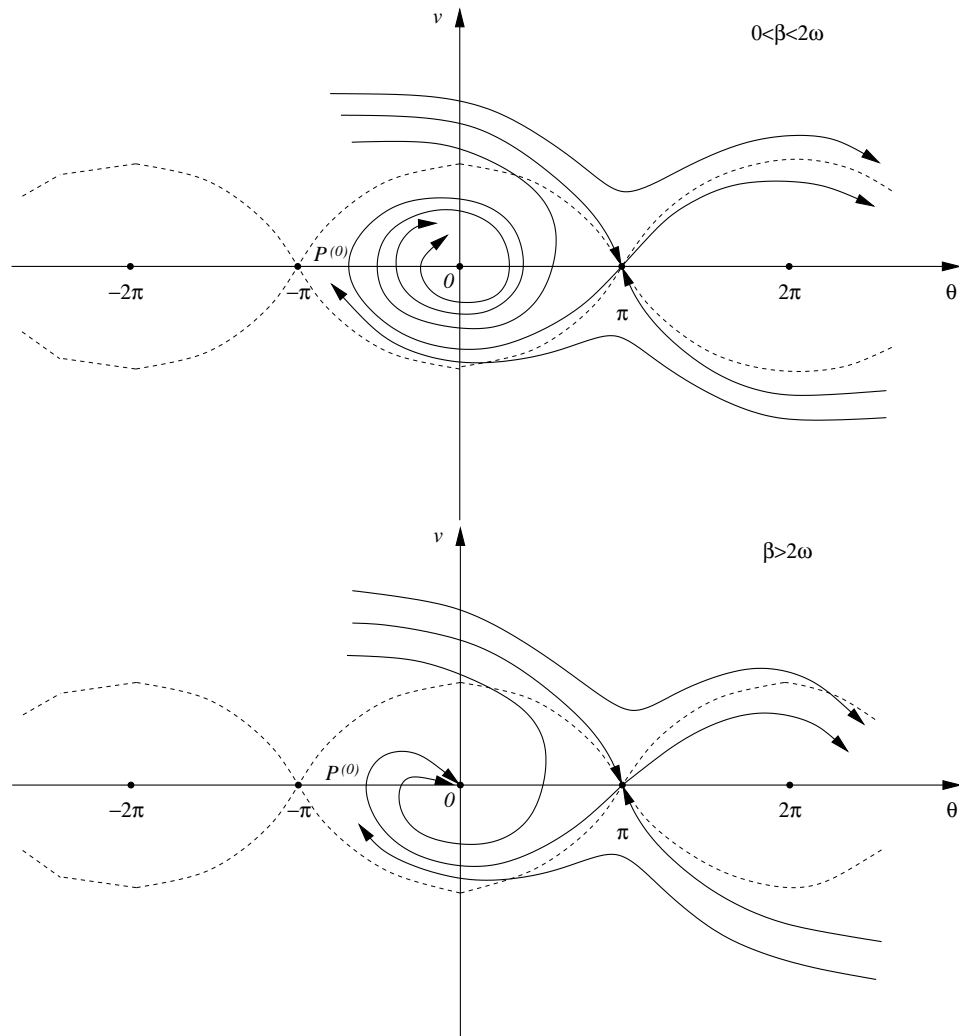


FIGURA 6.6. Curve di fase del pendolo con attrito.

ESEMPIO 6.5. Nell'Esempio 6.2 abbiamo mostrato che la posizione di equilibrio  $(0,0)$  del pendolo matematico piano con attrito, descritto dall'Eq. (6.5) è asintoticamente stabile. Possiamo ora utilizzare il Teorema 6.9 per valutare parte del bacino di attrazione. Riscriviamo l'Eq. (6.5) nella forma:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin\theta - \beta v. \end{cases}$$

L'energia meccanica totale è

$$E(\theta, v) = \frac{v^2}{2} + \omega^2(1 - \cos\theta)$$

e la sua derivata direzionale è

$$\dot{E}(\theta, v) = -\beta v^2.$$

Essendo  $E(0, 0) = 0$  la funzione di Liapunov è esattamente  $W(q, v) = E(q, v)$ . Fissato  $0 < \varepsilon < 2\omega^2$  sia

$$\mathcal{P}_\varepsilon = \{(\theta, v) : W(\theta, v) \leq \varepsilon, |\theta| < \pi\}.$$

Chiaramente  $\mathcal{P}_\varepsilon$  è un intorno chiuso di  $(0, 0)$  positivamente invariante. Inoltre, essendo  $\sin \theta \neq 0$  per ogni  $\theta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ , esso non contiene altre posizioni di equilibrio oltre  $(0, 0)$ . Concludiamo che  $\mathcal{P}_\varepsilon \subset \mathcal{B}(0, 0)$ . Quindi:

$$\mathcal{P}^{(0)} \doteq \{(\theta, v) : W(\theta, v) < 2\omega^2, |\theta| < \pi\} = \bigcup_{\varepsilon < 2\omega^2} \mathcal{P}_\varepsilon \subset \mathcal{B}(0, 0).$$

Analogamente, per ogni intero  $n \in \mathbb{Z}$ , si ha:

$$\mathcal{P}^{(n)} \doteq \{(\theta, v) : W(\theta, v) < 2\omega^2, |\theta - 2\pi n| < \pi\} \subset \mathcal{B}(2\pi n, 0). \quad (6.12)$$

**OSSERVAZIONE 6.7.** È possibile caratterizzare l'insieme limite  $L_\omega(\theta, v)$  per ciascun punto del piano delle fasi del pendolo con attrito considerato nell'Esempio 6.5. Sia  $(\theta(t), v(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , una qualsiasi soluzione (si osservi che tutte le soluzioni esistono globali poiché la velocità di fase soddisfa l'ipotesi del Corollario 1.6. Osserviamo innanzitutto che, essendo  $E(\theta(t), v(t)) \leq E(\theta(0), v(0))$  e l'energia potenziale non negativa,  $|v(t)| \leq \sqrt{2E(\theta(0), v(0))}$  per ogni  $t \geq 0$ . Mostriamo ora che necessariamente  $v(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Dalle equazioni del moto e la precedente stima sulla velocità, possiamo stimare  $|\dot{v}(t)| \leq \omega^2 + \beta \sqrt{2E(\theta(0), v(0))}$ . Ne segue in particolare che  $t \rightarrow v^2(t)$  è uniformemente continua su tutto il semiasse positivo dei tempi. Quindi per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che  $|v(t) - v(s)| < \varepsilon$  se  $|t - s| < \delta$ . Supponiamo per assurdo che la velocità non converga a zero. Utilizzando la uniforme continuità sopra stabilita, possiamo allora determinare una successione di tempi divergente  $t_n \nearrow +\infty$ , e dei numeri  $\varepsilon, \delta > 0$  tali che:

$$v^2(s) > \varepsilon \quad \forall s \in [t_n - \delta, t_n + \delta], \quad [t_n - \delta, t_n + \delta] \cap [t_k - \delta, t_k + \delta] = \emptyset \quad \forall k \neq n.$$

Detto  $n(t)$  il più grande intero  $n$  tale che  $t_n + \delta \leq t$ , otteniamo allora

$$\begin{aligned} E(\theta(t), v(t)) &= E(\theta(0), v(0)) - \beta \int_0^t ds v^2(s) \\ &\leq E(\theta(0), v(0)) - \beta \sum_{k=0}^{n(t)} \int_{t_k - \delta}^{t_k + \delta} ds v^2(s) \\ &\leq E(\theta(0), v(0)) - 2\delta\varepsilon\beta n(t), \end{aligned}$$

il che implica  $E(\theta(t), v(t)) \rightarrow -\infty$  per  $t \rightarrow +\infty$ , da cui una contraddizione essendo  $E(\theta, v)$  una funzione non negativa. Dunque la velocità di ciascuna soluzione deve convergere a zero. Esistono allora solo due possibilità sul comportamento asintotico di una soluzione del problema che non sia stazionaria: o appartiene al bacino di attrazione di una posizione di equilibrio stabile,  $(2k\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , o compie un moto a meta asintotica verso una posizione di equilibrio instabile  $((2k+1)\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

OSSERVAZIONE 6.8. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale con attrito descritto dall'equazione:

$$\ddot{q} = -U'(q) - \beta \dot{q} \iff \begin{cases} \dot{q} = v, \\ \dot{v} = -U'(q) - \beta v \end{cases},$$

dove  $U \in C^2(\mathbb{R})$ . Supponiamo che  $t \mapsto q(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , sia una fase di moto progressivo e poniamo  $q_0 = q(0)$ ,  $q_1 = q(T)$ . Esiste allora un'unica funzione invertibile  $q \mapsto t(q)$ ,  $q \in [q_0, q_1]$ , tale che  $q(t(q)) = q$ , quindi  $t'(q) = 1/v(t(q))$ , per ogni  $q \in [q_0, q_1]$ . Posto

$$v(q) \doteq v(t(q)), \quad E(q) \doteq \frac{1}{2}v^2(q) + U(q), \quad q \in [q_0, q_1],$$

si ha:

$$E'(q) = \frac{d}{dt} E(q(t), v(t)) \Big|_{t=t(q)} t'(q) = \dot{E}(q, v(q)) \frac{1}{v(q)} = -\beta v(q),$$

dove si è utilizzato che  $\dot{E}(q, v) = -\beta v^2$ . In definitiva:

$$E'(q) = -\beta \sqrt{2[E(q) - U(q)]} \quad q \in [q_0, q_1], \quad (6.13)$$

che fornisce un'equazione del primo ordine (non autonoma) cui deve soddisfare l'energia come funzione della posizione durante una fase di moto progressivo. Analogamente si dimostra che, durante una fase di moto retrogrado,

$$E'(q) = \beta \sqrt{2[E(q) - U(q)]}.$$

ESERCIZIO 6.2. *Dimostrare che la soluzione dell'equazione del pendolo con attrito di dati iniziali  $(-\pi, \varepsilon)$  appartiene al bacino di attrazione della posizione di equilibrio  $(0, 0)$  per ogni  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo. [Suggerimento: Utilizzando l'Osservazione 6.8, mostrare che per  $\varepsilon$  piccolo la soluzione entra in un tempo finito nell'insieme  $\mathcal{P}^{(0)}$  costruito nell'Esempio 6.5.]*

ESERCIZIO 6.3. *Dimostrare che per ogni intero positivo  $n$  e per ogni posizione iniziale del pendolo con attrito esiste una velocità iniziale  $v_0$  tale che la corrispondente soluzione tende alla posizione di equilibrio stabile compiendo esattamente  $n$  rotazioni complete prima di iniziare le oscillazioni smorzate attorno alla suddetta posizione.*

ESERCIZIO 6.4. *Sia  $t \mapsto \varphi^t(x)$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , un flusso di fase. Dimostrare le seguenti identità:*

$$\begin{aligned} L_\omega(x) &= \bigcap_{t \geq 0} \overline{\varphi^t(\gamma_+(x))} = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_+(\varphi^t(x))} = \bigcap_{t \geq 0} \bigcup_{s \geq t} \overline{\varphi^s(x)}, \\ L_\alpha(x) &= \bigcap_{t \leq 0} \overline{\varphi^t(\gamma_-(x))} = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\gamma_-(\varphi^t(x))} = \bigcap_{t \leq 0} \bigcup_{s \leq t} \overline{\varphi^s(x)}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 6.5. *Sia  $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  tale che  $F^{-1}(-\infty, c] \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \leq c\}$  è compatto per ogni  $c \in \mathbb{R}$ . Si assuma inoltre che  $\nabla F(x) \neq 0$  a meno di un insieme finito di punti  $z_1, \dots, z_k$ . Dimostrare che allora, qualunque sia il dato iniziale*

$x \in \mathbb{R}^n$ , la soluzione  $t \mapsto \varphi^t(x)$  del sistema gradiente  $\dot{x} = -\nabla F(x)$  è definita per ogni  $t \geq 0$  ed inoltre:

$$\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = z_j,$$

per qualche  $j = j(x)$ . [Suggerimento: Dimostrare dapprima che in un sistema gradiente ogni punto di  $L_\omega(x)$  è necessariamente una posizione di equilibrio.]

### 6.5. Soluzione degli esercizi

SOLUZIONE ES. 6.1. Osserviamo preliminarmente che, essendo

$$A \doteq \frac{\partial(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\partial(x, y, z)}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \sigma(A) = \{0, \pm\sqrt{3}i\},$$

non sono applicabili i criteri di stabilità riconosciuta dalla parte lineare. Consideriamo la funzione  $W(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ ; si ha:

$$\dot{W}(x, y, z) = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y} + 2cz\dot{z} = 2(3a - b)xy(z - 1) - 2c(x^2 + 1)z^4.$$

Se  $3a = b$  allora  $\dot{W}(x, y, z) = -2c(x^2 + 1)z^4$ . Quindi  $W(x, y, z) = a(x^2 + 3y^2) + cz^2$  con  $a, c > 0$  è una funzione di Liapunov: è positiva tranne che in  $(0, 0, 0)$  e  $\dot{W}(x, y, z) \leq 0$ . Dunque  $(0, 0, 0)$  è stabile. Tale equilibrio non può essere asintoticamente stabile. Infatti il piano cartesiano di equazione  $z = 0$  è un insieme invariante per la dinamica e le equazioni del moto su tale piano si riducono al sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -3y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

che sono le equazioni di un oscillatore armonico ( $\ddot{y} + 3y = 0$ ). In particolare tutti i moti su questo piano (eccetto la soluzione stazionaria  $(0, 0)$ ) sono periodici. Concludiamo osservando che i moti che non si svolgono sul piano  $z = 0$  sono da questo comunque attratti. In effetti:

$$\frac{d}{dt} z^2 = -2(x^2 + 1)z^4 \leq -2z^4,$$

per cui, integrando la disuguaglianza,

$$z^2(t) \leq \frac{z^2(0)}{1 + 2tz^2(0)},$$

ovvero  $z^2(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ .

SOLUZIONE ES. 6.2. Consideriamo la fase di moto progressivo  $t \mapsto \theta(t)$ ,  $t \in [0, t_*)$  tale che:

$$(\theta(0), v(0)) = (-\pi, \varepsilon), \quad t_* \doteq \sup\{t \geq 0 : E(\theta(s), v(s)) \geq 2\omega^2 \forall s \in [0, t]\}.$$

Posto  $\theta_* = \lim_{t \rightarrow t_*} \theta(t)$  (in generale  $\theta_* \leq +\infty$ ) sia  $E(\theta)$ ,  $\theta \in [-\pi, \theta_*)$ , definita come nell'Osservazione 6.8. Utilizzando (6.13), per ogni  $\theta \in [-\pi, \theta_*)$  si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= E(\theta) - E(-\pi) + \beta \int_{-\pi}^{\theta} dy \sqrt{2[E(y) - U(y)]} \\ &\geq -\frac{\varepsilon^2}{2} + \beta \int_{-\pi}^{\theta} dy \sqrt{2[2\omega^2 - \omega^2(1 - \cos y)]}, \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che  $E(\cdot) \geq 2\omega^2$  su tutto l'intervallo  $[-\pi, \theta_*)$ , che  $E(-\pi) = \varepsilon^2/2 + 2\omega^2$  e che  $U(y) = \omega^2(1 - \cos y)$ . In definitiva:

$$\beta\omega \int_{-\pi}^{\theta} dy \sqrt{2(1 + \cos y)} - \frac{\varepsilon^2}{2} \leq 0 \quad \forall \theta \in [-\pi, \theta_*).$$

Supponiamo per assurdo che  $\theta_* > 0$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . Allora, nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  giungiamo alla contraddizione  $\int_{-\pi}^0 dy \sqrt{2(1 + \cos y)} \leq 0$ . Quindi per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo esiste  $\theta_1 < \pi$  tale che  $E(\theta_1) < 2\omega^2$ , ovvero  $(\theta(t_1), v(t_1)) \in \mathcal{P}^{(0)}$  con  $t_1 = t(\theta_1)$ .

SOLUZIONE ES. 6.3. Sia  $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$  la posizione iniziale. Dobbiamo determinare  $v_0 > 0$  in modo tale che la soluzione di dati iniziali  $(\theta_0, v_0)$  entra nell'insieme invariante  $\mathcal{P}^{(n)}$  definito in (6.12). Dal risultato dell'Esercizio 6.4 segue che possiamo scegliere  $\varepsilon > 0$  tale che la soluzione di dati iniziali  $((2n-1)\pi, \varepsilon)$ , che indichiamo con  $t \mapsto (\theta(t), v(t))$ , entra nell'insieme  $\mathcal{P}^{(n)}$  in un tempo finito. Tale soluzione è prolungabile su tutto l'asse reale dei tempi. Inoltre, essendo

$$\inf_{t \leq 0} E(\theta(t), v(t)) = E(\theta(0), v(0)) = \frac{\varepsilon^2}{2} + 2\omega^2, \quad \|U\|_{\infty} \leq 2\omega^2,$$

si ha:

$$\inf_{t \leq 0} v(t) = \inf_{t \leq 0} \sqrt{2[E(\theta(t), v(t)) - U(\theta(t))]} \geq \varepsilon.$$

Ciò implica in particolare che  $\theta(t) \rightarrow -\infty$  per  $t \rightarrow -\infty$ , cosicché esiste sicuramente un tempo  $t_0 < 0$  tale che  $\theta(t_0) = \theta_0$ . La velocità iniziale richiesta è allora  $v_0 = v(t_0)$ . Infatti la soluzione  $\varphi^t(\theta_0, v_0) = (\theta(t + t_0), v(t + t_0))$ , di dati iniziali  $(\theta_0, v_0)$ , compie esattamente  $n$  rotazioni complete prima di iniziare le oscillazioni smorzate attorno alla posizione di equilibrio  $\theta_n = 2\pi n = 0 \pmod{2\pi}$ .

SOLUZIONE ES. 6.4. Consideriamo il caso dell'insieme  $\omega$ -limite, l'altro caso è analogo. Le seconde due uguaglianze sono ovvie poiché, per la proprietà di gruppo del flusso di fase,  $\varphi^t(\gamma_+(x)) = \gamma_+(\varphi^t(x)) = \cup_{s \geq t} \varphi^s(x)$ . Sia ora  $y \in L_{\omega}(x)$  e  $t_k \nearrow +\infty$  tale che  $\varphi^{t_k}(x) \rightarrow y$ . Per ogni  $t > 0$  la sottosuccessione  $\{\varphi^{t_k}(x); t_k \geq t\}$  è contenuta in  $\varphi^t(\gamma_+(x))$  e converge a  $y$ . Dunque  $y \in \overline{\varphi^t(\gamma_+(x))}$  per ogni  $t \geq 0$ . Viceversa, sia  $y \in \overline{\varphi^t(\gamma_+(x))}$  per ogni  $t \geq 0$ . Comunque scelto un intero positivo  $k > 0$  possiamo allora determinare un tempo  $t_k > k$  tale che  $|\varphi^{t_k}(x) - y| < 1/k$ . Dunque  $y \in L_{\omega}(x)$ .

SOLUZIONE ES. 6.5. Essendo  $F$  non crescente lungo le soluzioni, l'insieme  $F^{-1}(-\infty, x]$  è positivamente invariante, cosicché la soluzione  $\varphi^t(x)$  rimane confinata in un compatto e dunque si prolunga globalmente nel futuro. Ragionando

come nella dimostrazione del teorema di Barbashin-Krasovskii, si verifica che la funzione  $F$  è costante lungo l'orbita  $\gamma(y)$  di ciascun punto  $y \in L_\omega(x)$ . Quindi, essendo  $\dot{F} = -|\nabla F|^2$ ,  $L_\omega(x)$  può essere costituito unicamente da punti critici di  $F$ . D'altra parte, essendo  $\gamma_+(x)$  limitata, per il Lemma 6.8 l'insieme  $L_\omega(x)$  è non vuoto e connesso. Dunque  $L_\omega(x) = \{z_j\}$  per qualche  $j = j(x)$ , cosicché, utilizzando la (6.9),  $\varphi^t(x) \rightarrow z_j$  per  $t \rightarrow +\infty$ .

### 6.6. Nota bibliografica

Per gli argomenti trattati in questo capitolo si può fare riferimento ai testi sotto riportati.

- 1) V.I. Arnold. *Equazioni differenziali ordinarie*. Mosca: Edizioni Mir, 1978.
- 2) M.W. Hirsch, S. Smale. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. (Pure and applied mathematics. A series of Monographs and Textbooks). San Diego: Academic Press, 1974.



## Soluzioni periodiche ed applicazioni di Poincaré

### 7.1. Equazioni lineari a coefficienti periodici

Vogliamo studiare le condizioni di stabilità della posizione di riposo  $(y, \dot{y}) = (0, 0)$  dell'equazione lineare omogenea non autonoma:

$$\ddot{y} = -\omega^2[1 + \varepsilon a(t)]y, \quad \varepsilon > 0, \quad (7.1)$$

con  $a(t)$  una funzione periodica del tempo. L'Eq. (7.1) descrive le piccole oscillazioni di sistemi meccanici i cui parametri variano periodicamente nel tempo, quali ad esempio il moto di un'altalena. Se  $a(t) = \cos(\gamma t)$  essa prende il nome di equazione di Mathieu e rappresenta la linearizzazione intorno alla posizione di riposo  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  dell'equazione del pendolo matematico piano con il punto di sospensione oscillante (vedi Esercizio 2.2). Mostriamo come almeno nel caso di coefficienti quasi costanti ( $\varepsilon \ll 1$ ) è possibile stabilire dei criteri di stabilità.

**7.1.1. Mappa stroboscopica.** Consideriamo più in generale il problema differenziale:

$$\dot{x} = v(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (7.2)$$

dove la funzione  $v \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  dipende periodicamente dal tempo, ovvero esiste  $T > 0$  tale che  $v(t + T, x) = v(t, x)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Supporremo che tutte le soluzioni sono definite sull'intero asse dei tempi  $\mathbb{R}$ . Indichiamo con  $\varphi^{t, t_0}(x)$  la soluzione di dati iniziali  $\varphi^{t_0, t_0}(x) = x$ . Osserviamo che:

- 1)  $x \mapsto \varphi^{t, t_0}(x)$  è un diffeomorfismo per ogni  $t, t_0 \in \mathbb{R}$ ;
- 2)  $\varphi^{t, t_0} = \varphi^{t, s} \circ \varphi^{s, t_0}$  per ogni  $t, s, t_0 \in \mathbb{R}$ ;
- 3)  $\varphi^{t+T, t_0+T} = \varphi^{t, t_0}$  per ogni  $t, t_0 \in \mathbb{R}$ .

Le proprietà 1) e 2) sono conseguenza immediata del teorema di esistenza ed unicità. La 3) segue dalla periodicità di  $v$ . Infatti, posto  $\psi(t) = \varphi^{t+T, t_0+T}(x)$ , si ha:

$$\dot{\psi}(t) = v(t + T, \psi(t)) = v(t, \psi(t)), \quad \psi(t_0) = x,$$

da cui  $\psi(t) = \varphi^{t, t_0}(x)$ .

Fissiamo da ora in poi  $t_0 = 0$  (non è limitativo, poiché possiamo sempre ridurre a questo caso considerando il nuovo campo vettoriale  $\bar{v}(t, x) = v(t_0 + t, x)$ ). Definiamo *mappa stroboscopica* o *applicazione di Poincaré* la funzione:

$$g \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) : g(x) \doteq \varphi^{T, 0}(x).$$

Dalle proprietà 2) e 3) otteniamo  $\varphi^{nT+s,0} = \varphi^{nT+s,nT} \circ \varphi^{nT,0} = \varphi^{s,0} \circ \varphi^{nT,0}$ . In particolare, per  $s = T$  si ha  $\varphi^{(n+1)T,0} = g \circ \varphi^{nT,0}$ , da cui  $\varphi^{nT,0} = g^n$  per induzione. In definitiva:

$$\varphi^{nT+s,0} = \varphi^{s,0} \circ g^n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (7.3)$$

Attraverso la relazione (7.3) lo studio della stabilità di soluzioni periodiche dell'Eq. (7.2) si riconduce a quello della stabilità dei punti fissi della mappa stroboscopica. Ricordiamo che, assegnata una mappa  $g \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{D}$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , il punto  $x_0 \in \mathcal{D}$  è detto *punto fisso* di  $g$  se  $g(x_0) = x_0$ . Esso fornisce un'orbita stazionaria della legge di evoluzione a tempo discreto definita dalle iterazioni della mappa  $g$ :

$$g^0(x) = x, \quad g^1(x) = g(x), \quad g^2(x) = g(g(x)), \quad \dots, \quad g^k(x) = g(g^{k-1}(x)).$$

Si osservi che alcune orbite possono non essere definite globalmente nel futuro, poiché può essere  $g(x) \notin \mathcal{D}$  per qualche  $x \in \mathcal{D}$ . Se invece  $g$  è un diffeomorfismo allora ogni orbita è definita globalmente su tutto  $\mathbb{Z}$ , ponendo  $g^{-k}(x) = (g^{-1})^k(x)$ .

**DEFINIZIONE 7.1.** *Il punto fisso  $x_0$  della mappa  $g \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$  è detto stabile se per ogni  $\varepsilon > 0$  tale che  $\bar{B}_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{D}$  esiste  $\delta \in (0, \varepsilon]$  tale che  $g^n(x) \in B_\varepsilon(x_0)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  ed  $x \in B_\delta(x_0)$ . Esso è detto asintoticamente stabile se è stabile ed inoltre il parametro  $\delta$  può essere scelto in modo tale che*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(x) = x_0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0).$$

**TEOREMA 7.2.** *Si consideri il diffeomorfismo  $g = \varphi^{T,0}$ . Allora:*

- a)  $x_0$  è punto fisso di  $g$  se e solo se  $t \mapsto \varphi^{t,0}(x)$  è periodica di periodo  $T$ .
- b) Il punto fisso  $x_0$  di  $g$  è stabile [risp. asintoticamente stabile] se e solo se la corrispondente soluzione periodica  $t \mapsto \varphi^{t,0}(x)$  è stabile [risp. asintoticamente stabile].
- c) Se  $v(t, x) = A(t)x$  allora  $g \in L(\mathbb{R}^n)$ .
- d) Se  $\text{div } v(t, x) = 0$  allora  $g$  conserva i volumi.

**DIMOSTRAZIONE.** Il punto a) segue dall'identità  $\varphi^{t+T,0}(x_0) = \varphi^{t,0}(g(x_0))$ , valida per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Il punto b) segue dalla dipendenza continua della soluzione dalle condizioni iniziali e dalle seguenti identità:

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} |\varphi^{t,0}(x) - \varphi^{t,0}(x_0)| &= \sup_{s \in [0, T]} \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi^{s,0}(g^n(x)) - \varphi^{s,0}(x_0)|, \\ |\varphi^{t,0}(x) - \varphi^{t,0}(x_0)| &\leq \sup_{s \in [0, T]} |\varphi^{s,0}(g^{[t/T]}(x)) - \varphi^{s,0}(x_0)|, \end{aligned}$$

che si ottengono facilmente dalla (7.3) utilizzando il fatto che  $x_0 = g(x_0)$  (nella seconda uguaglianza  $[t/T]$  è la parte intera di  $t/T$ ). Il punto c) segue dalla teoria delle equazioni lineari. In particolare  $g = P_{T,0}$  con  $P_{t,t_0}$  la matrice principale relativa all'equazione  $\dot{x} = A(t)x$ . Il punto d) è infine conseguenza del Teorema di Liouville.  $\square$

**7.1.2. Condizioni di stabilità e risonanza parametrica.** Il caso cui siamo interessati è la stabilità della soluzione nulla  $y(t) = 0$  dell'equazione lineare non autonoma:

$$\ddot{y} = -\omega^2(t)y \quad \iff \quad \dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

con  $\omega^2(t)$  funzione periodica di periodo  $T$ . L'applicazione di Poincaré è quindi  $g = P_{T,0}$ . Inoltre, essendo  $\text{Tr} A(t) = 0$ , si ha  $\det g = 1$ . Utilizzeremo il seguente criterio.

**LEMMA 7.3.** *Sia  $B \in L(\mathbb{R}^2)$  tale che  $\det B = 1$ . Allora il punto fisso  $x = 0$  è stabile se  $|\text{Tr} B| < 2$  ed instabile se  $|\text{Tr} B| > 2$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** L'equazione caratteristica è  $\lambda^2 - (\text{Tr} B)\lambda + 1 = 0$ . Indichiamo con  $\lambda_{\pm}$  gli autovalori di  $B$ . Se  $|\text{Tr} B| < 2$  allora  $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\alpha}$  per qualche  $\alpha \in (0, 2\pi)$ , cosicché esiste una matrice non singolare  $S$  tale che  $B = SR[\alpha]S^{-1}$ , con  $R[\alpha]$  la matrice di rotazione del piano di un angolo  $\alpha$ . Quindi, per ogni  $x \in \mathbb{R}^2$  ed  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$B^n x = SR[n\alpha]S^{-1}x \quad \implies \quad |B^n x| \leq \|S\| \|S^{-1}\| |x|,$$

da cui la stabilità di  $x = 0$ . Viceversa, se  $|\text{Tr} B| > 2$  allora  $\lambda_- < 1 < \lambda_+$ . Sia  $f_+$  l'autovettore unitario di  $\lambda_+$ . Per ogni vettore  $y$  non nullo collineare ad  $f_+$  si ha  $|B^n y| = \lambda_+^n |y| \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ , da cui la instabilità di  $x = 0$ .  $\square$

Chiaramente se  $|\text{Tr} B| = 2$  esiste una matrice non singolare  $S$  tale che  $B = SCS^{-1}$ , con  $C = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$  per qualche  $c \in \mathbb{R}$ . Dunque il punto fisso può essere sia stabile ( $c = 0$ ) che instabile ( $c \neq 0$ ).

Nel caso bidimensionale ( $n = 2$ ) il sistema (7.2) è detto *sistema di Hamilton* se  $\text{div} \nu(t, x) = 0$ . In particolare l'equazione lineare omogenea  $\dot{x} = A(t)x$  con  $\text{Tr} A(t) = 0$  definisce un sistema di Hamilton lineare. La soluzione nulla di tale sistema è detta *fortemente stabile* se essa è stabile per tutti i sistemi di Hamilton lineari vicini, ovvero se esiste  $\delta > 0$  tale che la soluzione  $x = 0$  di  $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$  è stabile quando  $\text{Tr} \tilde{A}(t) = 0$  e  $\|A(t) - \tilde{A}(t)\| < \delta$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

**COROLLARIO 7.4.** *Sia  $B = P_{T,0}$  l'applicazione di Poincaré del sistema di Hamilton lineare  $\dot{x} = A(t)x$ . Se  $|\text{Tr} B| < 2$  allora la soluzione nulla è fortemente stabile.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $|\text{Tr} B| < 2$  allora  $|\text{Tr} \tilde{B}| < 2$  anche per la mappa stroboscopica  $\tilde{B}$  relativa ad un sistema  $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$  sufficientemente vicino ad  $\dot{x} = A(t)x$ . Infatti, utilizzando il Lemma di Gronwall, si verifica facilmente che  $P_{T,0}$  è una funzione continua di  $A = A(t)$  nella norma  $\|A\|_{\infty} \doteq \sup\{\|A(t)\| : t \in [0, T]\}$  (dimostrare questa affermazione!).  $\square$

Applichiamo la teoria sopra sviluppata al caso del sistema (7.1). L'equazione si riscrive nella forma:

$$\dot{x} = A_{\varepsilon}(t)x, \quad A_{\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2[1 + \varepsilon a(t)] & 0 \end{pmatrix}.$$

Per  $\varepsilon \ll 1$  la matrice  $A_\varepsilon(t)$  è vicina alla matrice costante  $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ . Cerchiamo i valori dei parametri  $\omega^2$  e  $T$  per i quali la soluzione nulla di  $\dot{x} = A_0 x$  è fortemente stabile. Per applicare il corollario precedente dobbiamo calcolare  $B = P_{T,0} = e^{A_0 T}$ . Osservando che  $A_0^2 = -\omega^2 \mathbb{I}$  e procedendo come nell'Equazione (2.20), si ha:

$$e^{A_0 T} = \cos(\omega T) \mathbb{I} - \omega^{-1} \sin(\omega T) A_0 = \begin{pmatrix} \cos(\omega T) & -\omega^{-1} \sin(\omega T) \\ \omega \sin(\omega T) & \cos(\omega T) \end{pmatrix}.$$

Essendo  $|\text{Tr } B| = 2|\cos(\omega T)|$ , concludiamo che tutti i punti del semiasse  $\omega \geq 0$ , ad eccezione dei punti  $\omega = \pi k/T$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , corrispondono a sistemi fortemente stabili. In particolare, per tali valori di  $\omega$ , la soluzione nulla è stabile anche per il sistema (7.1) purché il parametro  $\varepsilon$  sia scelto sufficientemente piccolo. In effetti si può dimostrare che (generalmente) la regione di instabilità nel piano  $(\omega, \varepsilon)$  si avvicina all'asse  $\omega$  in corrispondenza dei punti  $(\omega, \varepsilon) = (2\pi k/T, 0)$ . Questo fenomeno è detto della *risonanza parametrica*. Ad esempio, nel caso dell'equazione di Mathieu, dove  $a(t) = \cos(\gamma t)$  e quindi  $T = 2\pi/\gamma$ , si ha instabilità nell'intervallo:

$$\frac{2\gamma}{4 + \varepsilon} < \omega < \frac{2\gamma}{4 - \varepsilon}.$$

Altrimenti detto, scelto  $\varepsilon > 0$  comunque piccolo la soluzione nulla è instabile se  $|\omega - \gamma/2| < \gamma\varepsilon(8 + 2\varepsilon)^{-1}$ . Esiste una regione di instabilità anche in corrispondenza degli altri valori di risonanza parametrica, ovvero  $\omega = \gamma, 3\gamma/2, \dots$ , ma è meno estesa.

## 7.2. Criteri di asintotica stabilità per sistemi dinamici discreti

Nel seguito avremo bisogno di stabilire la asintotica stabilità di punti fissi di una mappa  $g \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ . Analogamente al caso dei flussi esiste un criterio sufficiente che si basa sull'analisi della linearizzazione di  $g$  intorno al punto fisso.

Il criterio di asintotica stabilità nel caso in cui  $g = B \in L(\mathbb{R}^n)$  è fornito dal Teorema 5.3 sulle contrazioni lineari. Il seguente corollario di quel teorema fornisce un criterio sufficiente per il caso non lineare.

**COROLLARIO 7.5.** *Sia  $x_0$  un punto fisso di  $g \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ . Supponiamo che  $Dg(x_0)$  sia una contrazione lineare. Allora esiste un intorno aperto  $U$  di  $x_0$ , la cui chiusura  $\bar{U}$  è contenuta in  $\mathcal{D}$ , tale che:*

i)  $U$  è positivamente invariante, ovvero  $g^k(U) \subset U$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .

ii) Esistono  $\nu \in (0, 1)$  ed una norma  $|\cdot|_*$  in  $\mathbb{R}^n$  tali che:

$$|g^k(x) - x_0|_* \leq \nu^k |x - x_0|_* \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in U.$$

In particolare  $x_0$  è asintoticamente stabile.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $\mu \in (0, 1)$  e  $|\cdot|_*$  tali che  $|Dg(x_0)y| \leq \mu|y|_*$ . Fissiamo  $\varepsilon_1 \in (0, 1 - \mu)$  e sia  $\delta > 0$  tale che  $x \in \mathcal{D}$  e  $|g(x) - x_0 - Dg(x_0)(x - x_0)|_* \leq \varepsilon_1 |x - x_0|_*$

se  $|x - x_0|_* \leq \delta$ . Quindi, posto  $U \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0|_* < \delta\}$  e  $\nu \doteq \mu + \varepsilon_1 \in (0, 1)$  si ha  $|g(x) - x_0|_* \leq \nu|x - x_0|_*$  per ogni  $x \in U$ .  $\square$

### 7.3. Cicli e loro stabilità

Le curve di fase del flusso generato da un campo vettoriale  $v \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$  possono essere costituite da singoli punti, essere diffeomorfe ad una retta, oppure ad una circonferenza. In quest'ultimo caso la curva di fase viene detta *ciclo* ed è l'orbita di una soluzione periodica non banale.

Il ciclo  $\gamma$  è detto *stabile* secondo Liapunov se per ogni intorno aperto  $U$  di  $\gamma$  compattamente contenuto in  $\mathcal{D}$  (quindi  $\gamma \subset U \subset \bar{U} \subset \mathcal{D}$ ) esiste un intorno  $V$  di  $\gamma$  tale che  $\varphi^t(V) \subset U$  per ogni  $t \geq 0$ . Il ciclo  $\gamma$  è detto *asintoticamente stabile* se è stabile ed inoltre l'intorno  $V$  può essere scelto in modo tale che:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\varphi^t(x), \gamma) = 0 \quad \forall x \in V. \quad (7.5)$$

Analogamente al caso delle posizioni di riposo, associamo ad ogni ciclo asintoticamente stabile  $\gamma$  il suo bacino di attrazione, definito dall'insieme aperto:

$$\mathcal{B}(\gamma) \doteq \{x \in \mathcal{D} : J_x \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+, \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\varphi^t(x), \gamma) = 0\}.$$

**OSSERVAZIONE 7.1.** La nozione di stabilità [risp. asintotica stabilità] di un ciclo, che descrive proprietà geometriche delle curve di fase ad esso vicine, non va confusa con la nozione di stabilità [risp. asintotica stabilità] delle soluzioni periodiche di cui il ciclo è l'orbita (vedi l'Osservazione 6.5). In particolare una soluzione periodica non banale di un'equazione differenziale autonoma non può mai essere asintoticamente stabile. Infatti soluzioni con condizioni iniziali in punti differenti del ciclo non possono avvicinarsi indefinitivamente per  $t \rightarrow +\infty$ . Altrimenti detto, se  $\gamma(x)$  è un ciclo e  $T$  è il periodo della soluzione periodica  $t \mapsto \varphi^t(x)$ , allora per ogni  $y \in \gamma(x)$  e  $k \in \mathbb{Z}$  si ha  $|\varphi^{kT}(y) - \varphi^{kT}(x)| = |x - y|$ , cosicché  $|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)| \not\rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ .

È ora possibile ridurre l'analisi della stabilità di un ciclo a quella di un punto fisso di una mappa opportuna.

Sia  $v \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$  e  $\gamma \subset \mathcal{D}$  un ciclo. Fissiamo un punto su  $\gamma$  che possiamo senza perdere di generalità assumere coincidente con l'origine del sistema di coordinate. Sia ora  $H$  un iperpiano ( $\dim(H) = n - 1$ ) passante per l'origine e non contenente  $v(0)$ . Quindi  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$  per un opportuno funzionale lineare  $h$  tale che  $h(v(0)) \neq 0$ . Definiamo *sezione trasversale locale* di  $v$  in 0 un aperto  $S$  di  $H$  contenente 0 e tale che  $h(v(x)) \neq 0$  per ogni  $x \in \bar{S}$ . Sia  $T$  il periodo del ciclo. È possibile determinare un intorno aperto  $U$  di  $x = 0$  contenuto in  $\mathcal{D}$  ed un'unica funzione  $\tau \in C^1(U; \mathbb{R})$  tale che  $\tau(0) = T$  e  $\varphi^{\tau(x)}(x) \in S$  per ogni  $x \in U$ . Infatti, essendo  $\varphi^T(0) = 0$ , la funzione differenziabile  $G(t, x) \doteq h(\varphi^t(x))$  è tale che:

$$G(T, 0) = h(0) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial t}(T, 0) = h(v(0)) \neq 0,$$

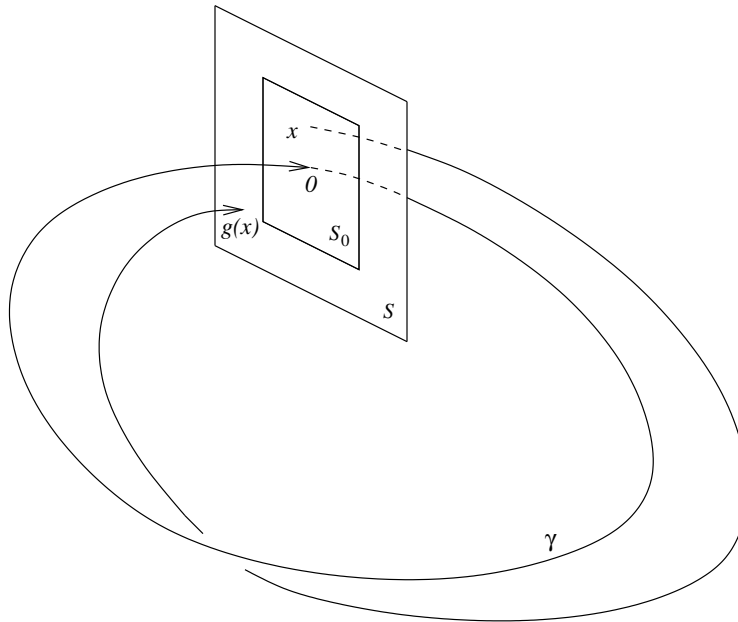


FIGURA 7.1. Applicazione di Poincaré.

cosicché, per il teorema della funzione implicita, esiste un intorno  $U$  di  $x = 0$  ed un'unica funzione  $\tau \in C^1(U; \mathbb{R})$  tale che  $G(\tau(x), x) = 0$  e  $\tau(0) = T$ . Posto  $S_0 = S \cap U$  definiamo *applicazione di Poincaré* la funzione:

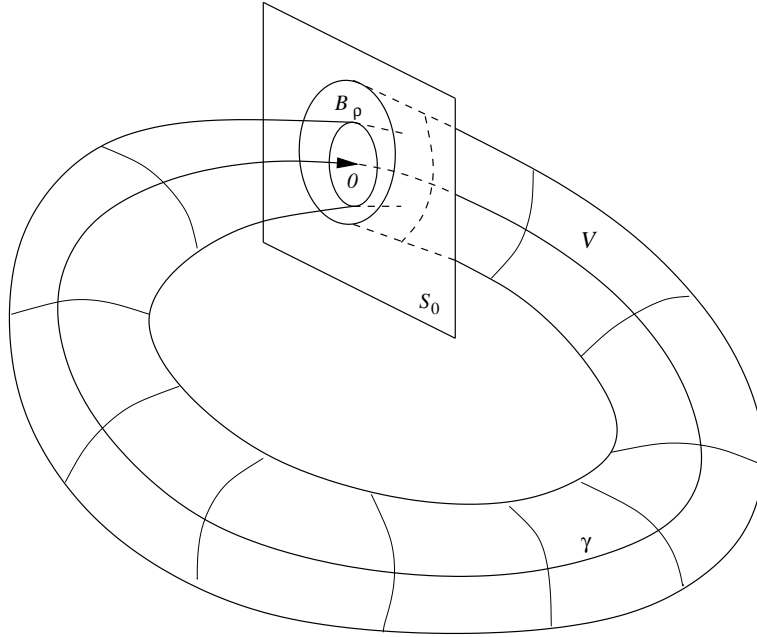
$$g: S_0 \rightarrow S \quad : \quad g(x) = \varphi^{\tau(x)}(x).$$

Questa funzione è anche detta *mappa del primo ritorno*: infatti  $\tau(x)$  è esattamente il primo tempo in cui la soluzione che origina da  $x \in S_0$  torna sulla sezione  $S$  (vedi Figura 7.1). Chiaramente  $g(0) = 0$ , ovvero l'origine è un punto fisso del sistema dinamico discreto definito da  $g$ . Si osservi che in generale  $g$  non è definita su tutto  $S$ .

**TEOREMA 7.6.** *Se  $Dg(0)$  è una contrazione lineare allora l'orbita  $\gamma$  è asintoticamente stabile.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $U$  un intorno aperto di  $\gamma$ . Indichiamo con  $|\cdot|$  una norma su  $\mathbb{R}^n$  tale che la sua restrizione all'iperpiano  $H$  (contenente la sezione locale  $S$ ) coincide con la norma  $|\cdot|_*$  adattata alla contrazione  $Dg(0) \in L(H)$ . Per il Corollario 7.5 ed utilizzando la continuità del flusso rispetto ai dati iniziali esiste  $\rho > 0$  tale che, posto  $B_\rho \doteq \{x \in H : |x| < \rho\}$ , le seguenti condizioni sono verificate:

- 1)  $\varphi^t(x) \in U$  per ogni  $t \in [0, 2T]$ ;
- 2)  $B_\rho \subset S_0$  e  $\tau(x) \leq 2T$  per ogni  $x \in B_\rho$ ;
- 3) esiste  $\mu \in (0, 1)$  tale che  $|g(x)| \leq \mu|x|$  per ogni  $x \in B_\rho$ .

FIGURA 7.2. L'insieme invariante  $V$ 

Definiamo ora:

$$V \doteq \{\varphi^t(x) : x \in B_\rho, t \geq 0\} = \bigcup_{t \geq 0} \varphi^t(B_\rho). \quad (7.6)$$

Chiaramente  $V$  è un insieme aperto contenente  $\gamma$  e positivamente invariante (vedi Figura 7.2). Essendo  $g(B_\rho) \subset B_\rho$  le mappe  $g^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sono definite su  $B_\rho$ . Inoltre:

$$|g^k(x)| \leq \mu^k |x|, \quad \tau(g^k(x)) \leq 2T \quad \forall x \in B_\rho \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Quindi, per  $x \in B_\rho$  e  $t \geq 0$ , si ha:

$$\varphi^t(x) = \varphi^s(g^N(x)),$$

essendo  $N = N(x, t)$  il massimo numero di ritorni sulla sezione  $S_0$ , non successivi al tempo  $t$ , della soluzione uscente da  $x$ :

$$N = \max \left\{ k \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^k \tau(g^{j-1}(x)) \leq t \right\},$$

ed  $s = s(t)$  il tempo rimanente:

$$s = t - \sum_{j=1}^N \tau(g^{j-1}(x)).$$

Essendo  $s \in [0, 2T]$  e  $g^N(x) \in B_\rho$  la condizione 1) garantisce che  $\varphi^t(x) \in U$  per ogni  $x \in B_\rho$ . Quindi  $V \subset U$  da cui segue la stabilità del ciclo essendo  $V$  positivamente invariante. Inoltre  $N \rightarrow +\infty$  se  $t \rightarrow +\infty$ , cosicché:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g^N(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} g^k(x) = 0 \quad \forall x \in B_\rho.$$

Allora, utilizzando la continuità del flusso rispetto ai dati iniziali, per ogni  $x \in B_\rho$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\varphi^t(x), \gamma) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\varphi^s(g^N(x)), \gamma) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi^s(g^N(x)) - \varphi^s(0)| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{u \in [0, 2T]} |\varphi^u(g^k(x)) - \varphi^u(0)| = 0, \end{aligned}$$

da cui segue il limite (7.5) con  $V$  definito come in (7.6), e dunque la asintotica stabilità del ciclo.  $\square$

OSSERVAZIONE 7.2. Sia  $\gamma$  un ciclo asintoticamente stabile ed  $x$  nel bacino di attrazione di  $\gamma$ . Esiste quindi un tempo  $t_0 \geq 0$  ed una funzione  $t \mapsto z_t \in \gamma$ ,  $t \geq t_0$  tale che:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi^t(x) - z_t| = 0.$$

D'altra parte, se  $T$  è il periodo del ciclo, essendo  $z_t = \varphi^T(z_t)$ ,

$$|\varphi^{t+T}(x) - \varphi^t(x)| \leq |\varphi^T(\varphi^t(x)) - \varphi^T(z_t)| + |z_t - \varphi^t(x)|,$$

cosicché:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi^{t+T}(x) - \varphi^t(x)| = 0.$$

Diciamo in tal caso che  $x$  possiede *periodo asintotico*  $T$ . In altri termini, le traiettorie vicine ad un ciclo asintoticamente stabile si comportano, per tempi grandi, come se avessero lo stesso periodo del ciclo.

OSSERVAZIONE 7.3. Nel caso in cui  $Dg(0)$  è una contrazione lineare si può dimostrare un'ulteriore proprietà delle orbite attratte dal ciclo  $\gamma$ : esse vanno "in fase" con il moto di un punto su  $\gamma$ , ovvero sia:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\varphi^t(x), \gamma) = 0 \quad \exists! z \in \gamma : \lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi^t(x) - \varphi^t(z)| = 0.$$

OSSERVAZIONE 7.4. L'applicazione di Poincaré non dipende dalla scelta del punto sul ciclo e della sezione trasversale, nel senso che due applicazioni differenti sono tra loro coniugate mediante un opportuno diffeomorfismo. Siano  $S_1$  ed  $S_2$  due qualsiasi sezioni trasversali al campo vettoriale nei punti  $x_1 \in \gamma$  ed  $x_2 \in \gamma$  rispettivamente. Consideriamo le corrispondenti applicazioni di Poincaré,  $g_1 : S_{1,0} \rightarrow S_1$  e  $g_2 : S_{2,0} \rightarrow S_2$ . Supponiamo ad esempio che  $x_2 = \varphi^\tau(x_1)$  per qualche  $\tau \in [0, T]$ , essendo  $T$  il periodo del ciclo. Fissiamo ora un intorno  $S$  di  $x_1$  sulla sezione trasversale tale che  $S \subset S_{1,0}$  ed  $\tilde{S} \doteq \varphi^\tau(S) \subset S_{2,0}$ . Chiaramente la mappa  $h : S \rightarrow \tilde{S}$  definita da  $h(x) = \varphi^\tau(x)$  è un diffeomorfismo tale che  $h \circ g_1 = g_2 \circ h$  (sul dominio di definizione  $S$  di  $h$ ). In particolare  $Dg_1(x_1) = Dh^{-1}(x_2)Dg_2(x_2)Dh(x_1)$ , cosicché  $\sigma(Dg_1(x_1)) = \sigma(Dg_2(x_2))$ .

#### 7.4. Cicli limite e teorema di Poincaré-Bendixson

Assegnato un sistema autonomo piano  $\dot{x} = v(x)$ ,  $v \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2)$ , definiamo *ciclo limite* un ciclo isolato. In altri termini, l'applicazione di Poincaré ad esso associata possiede un punto fisso isolato. Le curve di fase prossime ad un ciclo limite sono necessariamente delle spirali che si avvolgono intorno ad esso per  $t \rightarrow +\infty$  o  $t \rightarrow -\infty$ , come segue dalla seguente proposizione.

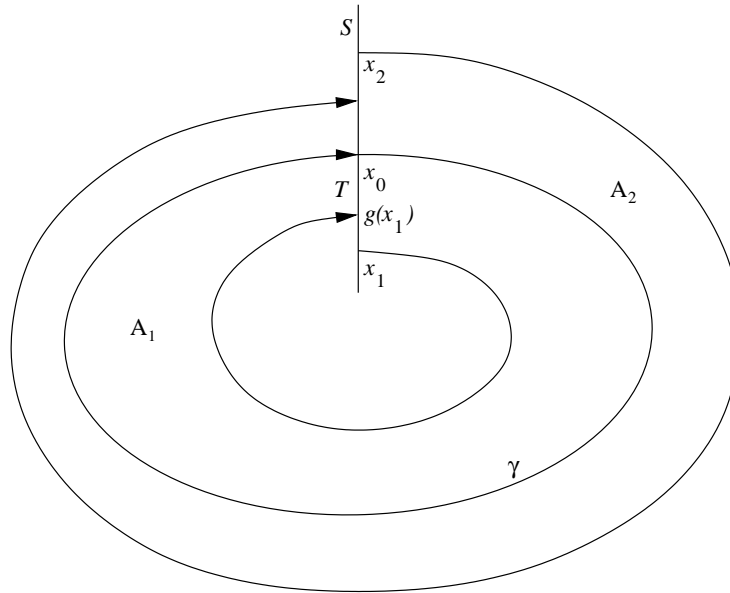


FIGURA 7.3. Ciclo limite stabile.

**PROPOSIZIONE 7.7.** *Un ciclo  $\gamma$  di un sistema autonomo piano è un ciclo limite se e solo se esiste un intorno aperto  $V$  di  $\gamma$  tale che per ogni  $x \in V$  si ha  $\gamma = L_\omega(x)$  oppure  $\gamma = L_\alpha(x)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Si giunge facilmente a tale conclusione utilizzando il fatto che curve di fase distinte non possono intersecarsi. Indichiamo con  $\Gamma$  la regione finita del piano delimitata dal ciclo  $\gamma$ . Si consideri una sezione trasversale locale  $S$  del campo vettoriale in  $x_0 \in \gamma$  e sia  $g : S_0 \rightarrow S$  la corrispondente applicazione di Poincaré. Per le ipotesi sul ciclo possiamo assumere che  $x_0$  è l'unico punto fisso di  $g$ . Sia ora  $x_1 \in S_0 \cap \Gamma$  e si consideri il segmento  $T$  su  $S$  di estremi  $x_0$  e  $g(x_1)$ . Supponiamo ad esempio che  $|g(x_1) - x_0| < |x_1 - x_0|$ . Allora la regione finita  $A_1$ , delimitata dal ciclo  $\gamma$ , dal segmento  $T$  e dalla porzione di curva di fase  $\{\varphi^t(x_1) : 0 \leq t \leq \tau(x_1)\}$ , è positivamente invariante. Inoltre, per ogni  $y \in T$ , la sequenza  $\{g^k(y); k \in \mathbb{N}\}$  di punti su  $S_0$  è monotona e deve quindi convergere necessariamente ad  $x_0$ , essendo questo l'unico punto fisso di  $g$ . Dunque  $\gamma = L_\omega(x)$  per ogni  $x \in A_1$ . Qualora fosse stato  $|g(x_1) - x_0| > |x_1 - x_0|$  avremmo concluso analogamente, considerando la successione  $\{g^{-k}(y); k \in \mathbb{N}\}$ , che  $\gamma = L_\alpha(x)$  per ogni  $x \in A_1$ . Ripetendo il ragionamento per un punto  $x_2 \in S_0 \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$  determiniamo in tal modo una regione  $A_2$ , simile ad  $A_1$ , tale che  $\gamma = L_\omega(x)$  (o  $\gamma = L_\alpha(x)$ ) per ogni  $x \in A_2$ . Il teorema segue con  $V$  un intorno aperto di  $\gamma$  contenuto in  $A_1 \cup A_2$ .  $\square$

Qualora  $\gamma = L_\omega(x)$  per ogni  $x \in V$  (come in Figura 7.3) il ciclo limite è asintoticamente stabile, in tutti gli altri casi è instabile.

I sistemi meccanici unidimensionali non presentano cicli limite. Più in generale, se un sistema piano possiede un integrale primo che non è costante su nessun insieme aperto dello spazio delle fasi allora esso non può esibire un ciclo limite. Infatti, supponiamo per assurdo che esista un ciclo limite  $\gamma$  e sia  $H(x)$  l'integrale primo di cui sopra. Posto  $c = H(\gamma)$ , si avrebbe, per continuità,  $H(\varphi^t(x)) = c$  per tutti gli  $x$  tali che  $\gamma = L_\omega(x)$  oppure  $\gamma = L_\alpha(x)$ , giungendo così ad una contraddizione poiché l'insieme di tali  $x$  è un aperto. Si osservi che un analogo ragionamento permette di stabilire che tali sistemi non possiedono posizioni di equilibrio asintoticamente stabili. In relazione ai sistemi meccanici unidimensionali, l'integrale primo in questione è ovviamente l'energia meccanica.

D'altra parte la presenza di una dissipazione completa ha l'effetto di rendere asintoticamente stabili le posizioni di equilibrio stabili isolate, "aprendo" tutti i cicli intorno ad esse. In effetti non può sopravvivere alcun ciclo: l'energia meccanica diminuisce strettamente lungo le soluzioni non stazionarie, per cui non possono esistere soluzioni periodiche non banali. Nella prossima sezione mostreremo un esempio di sistema piano con un ciclo limite asintoticamente stabile, l'equazione di Van der Pol.

La disposizione delle curve di fase nel piano è notevolmente più semplice che in spazi di dimensione maggiore. Questo è conseguenza del fatto che una curva separa localmente il piano ma non lo spazio. Il seguente teorema mostra come le orbite del piano siano attratte da oggetti geometrici relativamente semplici.

**TEOREMA 7.8 (Teorema di Poincaré-Bendixson).** *Sia  $v \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2)$  un campo vettoriale sul piano con punti singolari isolati. Supponiamo che la semiorbita  $\gamma_+(x)$  sia limitata e la sua chiusura contenuta in  $\mathcal{D}$ . Allora  $L_\omega(x)$  deve essere uno dei seguenti tipi di insieme: 1) un punto singolare; 2) un ciclo; 3) l'unione di punti singolari e curve di fase ciascuna delle quali tende ad uno di questi punti singolari per  $t \rightarrow \pm\infty$  (eventualmente lo stesso).*

Si possono dedurre interessanti conseguenze da questo teorema. Ad esempio, un compatto  $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$  positivamente invariante contiene necessariamente almeno un punto singolare od un ciclo limite.

L'ingrediente fondamentale nella dimostrazione del Teorema 7.8 si fonda sulla nota proprietà delle curve chiuse, immagini continue di una circonferenza, di separare il piano in due regioni disgiunte, di cui una limitata e l'altra illimitata (questo risultato, noto come *Lemma di Jordan*, lo abbiamo tacitamente già utilizzato nella dimostrazione della Proposizione 7.7, asserendo l'esistenza delle regioni finite  $\Gamma$ ,  $A_1$  ed  $A_2$ ). Per tale motivo il teorema si estende a superfici bidimensionali quali la sfera, dove questa proprietà è ancora valida, ma non a superfici di genere più alto, quali il toro  $\mathbb{T}^2$ . Ad esempio, nel caso del flusso lineare su  $\mathbb{T}^2$  con frequenze razionalmente indipendenti, abbiamo visto che tutte le curve di fase sono dense, cosicché l'insieme limite positivo di ciascuna di queste coincide con l'intero spazio delle fasi.

Le peculiarità del caso piano si esplicano in alcune proprietà delle sezioni trasversali locali, che sono il contenuto della seguente proposizione e del successivo corollario.

**PROPOSIZIONE 7.9.** *Sia  $v \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2)$  ed  $x \in \mathcal{D}$  tale che sia definita la semiorbita  $\gamma_+(x)$ . Supponiamo che esista un punto regolare  $y \in L_\omega(x)$  (i.e.  $v(y) \neq 0$ ) e sia  $S$  una sezione trasversale locale di  $v$  in  $y$ . Allora:*

- 1) per ogni  $N > 0$  esiste un tempo  $t_N > N$  tale che  $\varphi^{t_N}(x) \in S$ ;
- 2)  $y$  è l'unica intersezione di  $L_\omega(x)$  con  $S$ .

**DIMOSTRAZIONE.** 1) Per il teorema della funzione inversa (vedi la dimostrazione del teorema della scatola di flusso), la mappa  $(\xi, t) \mapsto \varphi^t(\xi)$ ,  $(\xi, t) \in S \times \mathbb{R}$ , è un diffeomorfismo locale intorno a  $(y, 0)$  (ovvero  $(\xi, t)$  sono coordinate locali). In particolare esiste un intorno  $U$  di  $y$  tale che per ogni  $z \in U$  esiste un unico tempo  $\tau(z)$  per cui  $|\tau(z)| < 1$  e  $\varphi^{\tau(z)}(z) \in S \cap U$ . D'altra parte, essendo  $y \in L_\omega(x)$ , per ogni  $N > 0$  esiste  $\tau_N > N + 1$  per cui  $\varphi^{\tau_N}(x) \in U$ . Il punto 1) è quindi dimostrato con  $t_N = \tau_N + \tau(z)$ ,  $z = \varphi^{\tau_N}(x)$ .

2) Osserviamo preliminarmente che il numero di intersezioni con  $S$  di ogni arco chiuso e limitato dell'orbita  $\gamma_+(x)$  è al più finito. Infatti, se esistesse una successione di tempi  $\tau_k \rightarrow \bar{\tau} < +\infty$  tale che  $y(\tau_k)$  interseca  $S$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , allora, poiché  $\bar{y} = \varphi^{\bar{\tau}}(x) \in \bar{S}$ , si avrebbe:

$$[\text{coefficiente angolare di } S] = \frac{\varphi_2^{\tau_k}(x) - \bar{y}_2}{\varphi_2^{\tau_k}(x) - \bar{y}_1} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

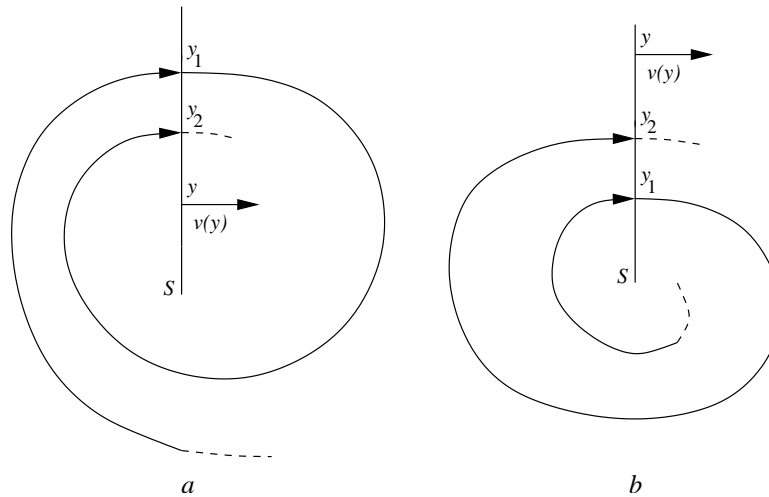
mentre, d'altra parte,

$$\frac{v_2(\bar{y})}{v_1(\bar{y})} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_2^{\tau_k}(x) - \bar{y}_2}{\varphi_2^{\tau_k}(x) - \bar{y}_1},$$

da cui un assurdo essendo  $S$  trasversale alla direzione  $\nu(\bar{y})$ .

Supponiamo ora che esistano due intersezioni consecutive e distinte dell'orbita  $\gamma_+(x)$  con  $S$ , che indichiamo con  $y_1 = \varphi^{t_1}(x)$  ed  $y_2 = \varphi^{t_2}(x)$ . La curva ottenuta unendo il segmento di  $S$  delimitato dai punti  $y_1$  ed  $y_2$  con il tratto di curva di fase  $\{\varphi^t(x); t \in [t_1, t_2]\}$  è una curva di Jordan, cosicché il suo complemento sul piano è costituito dall'unione di due regioni aperte, di cui una limitata ed una illimitata. A seconda dei casi la regione limitata (vedi Figura 7.4a) ovvero la regione illimitata (vedi Figura 7.4b) sono positivamente invarianti. Ne segue che la successiva intersezione  $y_3 = \varphi^{t_3}(x)$  deve necessariamente essere distinta da  $y_2$ , ed inoltre  $y_2$  giace su  $S$  tra  $y_1$  ed  $y_3$ . Abbiamo dunque due possibilità:

i) Esiste un'unica intersezione di  $\gamma_+(x)$  con  $S$ . Poiché per il punto 1) sopra dimostrato la semiorbita  $\gamma_+(x)$  interseca  $S$  in almeno due tempi differenti ne segue che essa è un ciclo. In particolare  $y$  è l'unica intersezione di  $L_\omega(x) = \gamma(x)$  con  $S$ .

FIGURA 7.4. Possibili intersezioni distinte tra  $\gamma_+(x)$  ed  $S$ .

ii) Esistono infinite intersezioni distinte  $\{y_k = \varphi^{t_k}(x); k \in \mathbb{N}\}$ ,  $t_k \rightarrow +\infty$ , che formano una successione monotona lungo  $S$ . Il limite di tale successione deve necessariamente coincidere con  $y$  poiché altrimenti, ragionando come sopra, potremmo determinare una regione positivamente invariante la cui chiusura non contiene  $y$ , in contraddizione con l'assunto  $y \in L_\omega(x)$ . Per l'unicità del limite il punto  $y$  è necessariamente l'unica intersezione di  $L_\omega(x)$  con  $S$ .  $\square$

**COROLLARIO 7.10.** Sia  $v \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2)$  ed  $x \in \mathcal{D}$  tale che sia definita la semiorbita  $\gamma_+(x)$ :

1) Se esiste un punto regolare  $y \in \gamma_+(x) \cap L_\omega(x)$  allora  $\gamma_+(x)$  è un ciclo (in particolare  $\gamma_+(x) = \gamma(x) = L_\omega(x)$ ).

2) Se esiste un ciclo  $\gamma$  contenuto in  $L_\omega(x)$  allora  $\gamma = L_\omega(x)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** 1) Sia  $S$  una sezione trasversale locale di  $v$  in  $y \in \gamma_+(x) \cap L_\omega(x)$ . Poiché  $\gamma_+(x) \subseteq L_\omega(x)$  il punto  $y$  è l'unica intersezione di  $\gamma_+(x)$  con  $S$ . Dunque  $\gamma_+(x)$  è un ciclo.

2) Supponiamo per assurdo che  $L_\omega(x) \setminus \gamma$  sia non vuoto. Essendo  $L_\omega(x)$  connesso, esiste  $y \in \gamma$  che è punto di accumulazione di  $L_\omega(x) \setminus \gamma$ . Sia  $S$  una sezione trasversale locale di  $v$  in  $y$ . Analogamente al punto 1) della Proposizione 7.9, possiamo determinare  $z \in L_\omega(x) \setminus \gamma$  sufficientemente vicino ad  $y$  in modo tale che  $\varphi^t(z) \in S$  per qualche  $t \in \mathbb{R}$ . Ma  $\varphi^t(z)$  è un punto di  $L_\omega(x)$  distinto da  $y$ , il che contraddice l'unicità stabilita nel punto 2) della Proposizione 7.9, da cui l'assurdo. Dunque  $L_\omega(x) = \gamma$  necessariamente.  $\square$

**DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 7.8.** Se  $L_\omega(x)$  non possiede punti regolari allora, essendo connesso, è costituito da un unico punto singolare,  $L_\omega(x) = \{x_0\}$ , ed ovviamente  $\varphi^t(x) \rightarrow x_0$  per  $t \rightarrow +\infty$ .

Supponiamo viceversa che esista un punto regolare  $y \in L_\omega(x)$ . Sappiamo allora che rimane definita l'intera orbita per  $y$  ed inoltre  $\gamma(y)$ ,  $L_\omega(y)$  ed  $L_\alpha(y)$  sono contenuti in  $L_\omega(x)$ . Abbiamo ora due possibilità:

i) Esiste un punto regolare  $z \in L_\omega(y) \cup L_\alpha(y)$ . Assumiamo  $z \in L_\omega(y)$  (se  $z \in L_\alpha(y)$  ripetiamo il ragionamento sul flusso inverso  $\varphi^{-t}(y)$ ). Fissata una sezione trasversale locale  $S$  di  $v$  in  $z$ , per il punto 1) della Proposizione 7.9, esiste  $\bar{z} \in S \cap \gamma(y)$ . Essendo  $z, \bar{z} \in L_\omega(x)$ , per il punto 2) della medesima proposizione deduciamo che  $z = \bar{z}$  necessariamente. Ma allora  $z \in \gamma(y) \cap L_\omega(y)$  e quindi, per il punto 1) del Corollario 7.10,  $\gamma(y)$  è un ciclo. Applicando infine il punto 2) del medesimo corollario concludiamo che  $L_\omega(x)$  coincide con tale ciclo.

ii) Non esistono punti regolari in  $L_\omega(y) \cup L_\alpha(y)$ . In tal caso  $\gamma(y)$  è un'orbita aperta con  $L_\omega(y) = \{z_1\}$  ed  $L_\alpha(y) = \{z_2\}$ , essendo  $z_1, z_2$  punti singolari non necessariamente distinti.  $\square$

**ESERCIZIO 7.1.** Sia  $v \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2)$  e  $\gamma$  un ciclo tale che la regione limitata ed aperta  $U$  da esso racchiusa è interamente contenuta in  $\mathcal{D}$ . Dimostrare che  $U$  deve contenere almeno un ciclo o un punto singolare del campo.

**ESERCIZIO 7.2.** Dimostrare che un compatto  $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$  positivamente invariante contiene almeno un punto singolare [Suggerimento: utilizzare l'asserto dell'esercizio precedente].

**ESERCIZIO 7.3.** Sia  $\mathcal{D}$  un dominio semplicemente connesso e  $v \in C^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2)$  un campo la cui divergenza è definita in segno. Dimostrare che il sistema  $\dot{x} = v(x)$  non possiede cicli.

## 7.5. Applicazione alla teoria dei circuiti non lineari

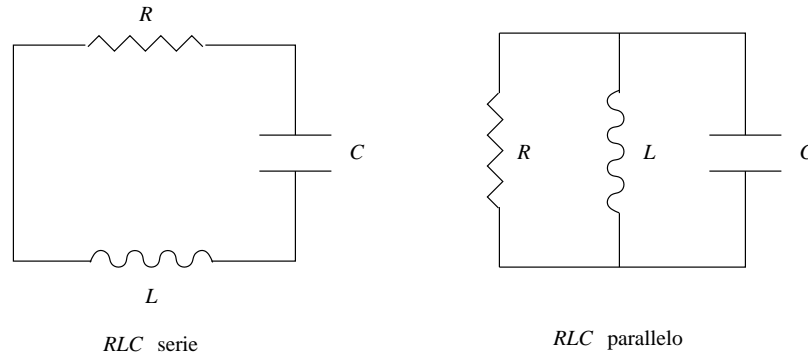
Caratterizziamo un circuito dal punto di vista matematico. Introduciamo dapprima i *rami* costituenti un circuito. Essi sono dei segmenti o loro deformazioni continue. A ciascun ramo viene associata una *caratteristica*  $Z$ . Più rami si uniscono facendo concorrere i loro estremi e formando i *nodi*. I rami si possono incontrare solo nei nodi. Un circuito è quindi un'unione connessa di rami. A ciascun ramo si associa una *corrente*  $i$  ed a ciascun estremo di un ramo un potenziale  $V$ , essendo  $i$  e  $V$  variabili reali. Siano  $\alpha$  e  $\beta$  gli estremi del ramo  $r$ . Per convenzione associamo alla corrente  $i_r$  del ramo  $r$  verso positivo da  $\alpha$  verso  $\beta$ , definendo contestualmente la *caduta di potenziale* lungo tale ramo la quantità  $v_r \doteq V(\alpha) - V(\beta)$ .

Per ogni ramo  $r$  la relativa caratteristica  $Z_r$  stabilisce una relazione funzionale tra le grandezze  $i_r$  e  $v_r$ . Nei casi di interesse fisico tale relazione assume la forma di una legge differenziale del primo ordine:

$$F\left(i_r, v_r, \frac{di_r}{dt}, \frac{dv_r}{dt}\right) = 0.$$

Tra le caratteristiche più semplici ricordiamo:

1) la resistenza  $R$ :  $(i_R, v_R)$  tali che  $v_R = Ri_R$ ;

FIGURA 7.5. Circuiti  $RLC$ .

2) la induttanza  $L$ :  $(i_L, v_L)$  tali che  $v_L = L \frac{di_L}{dt}$ ;

3) la capacità  $C$ :  $(i_C, v_C)$  tali che  $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$ .

Le correnti che circolano nei rami di un circuito sono legate tra loro attraverso una legge di conservazione, nota come *legge di Kirchoff*: essa stabilisce che la somma algebrica delle correnti dei rami che concorrono in un nodo è nulla.

Consideriamo a titolo di esempio i circuiti  $RLC$  serie e parallelo descritti in Figura 7.5.

Nel primo caso, essendo  $i_R = i_L = i_C$ , tutte le grandezze si esprimono in funzione della corrente  $i = i_R$ . Derivando rispetto al tempo l'identità  $v_R + v_L + v_C = 0$  otteniamo un'equazione del secondo ordine per la corrente:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0.$$

Quindi l'evoluzione della corrente è quella di un oscillatore lineare smorzato di pulsazione  $1/\sqrt{LC}$  e fattore di smorzamento  $R/L$ . Analogamente, nel caso del circuito  $RLC$  parallelo, essendo ora  $v_R = v_L = v_C$  ed  $i_R + i_L + i_C = 0$ , troviamo l'equazione per  $v = v_R$ :

$$C \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = 0.$$

I due circuiti sopra considerati non possono presentare cicli limite, e più in particolare il fenomeno delle *autoscillazione* (quando, indipendentemente dalle condizioni iniziali, il sistema "rilassa" sempre su un moto periodico fissato). Anche l'assenza della resistenza  $R$  (che è responsabile dello smorzamento) ovvero nel caso dei semplici circuiti  $LC$  serie o parallelo si ottiene al più un oscillatore armonico, dove tutto lo spazio delle fasi è coperto da orbite periodiche. Per ottenere un dispositivo autoscillante è necessario inserire nel circuito  $RLC$  un elemento non lineare. Classicamente questo è ottenuto mediante un *triode* (vedi Figura 7.6). Nel triodo la corrente anodica  $i_A$  (elettroni emessi dall'anodo) passa attraverso una griglia (che ha il compito di accelerare gli elettroni) e tale corrente è tutta raccolta dal catodo. Attraverso il ramo di griglia non passa corrente ( $i_M = 0$ ): l'induttanza  $M$  connessa alla griglia ha il solo compito di

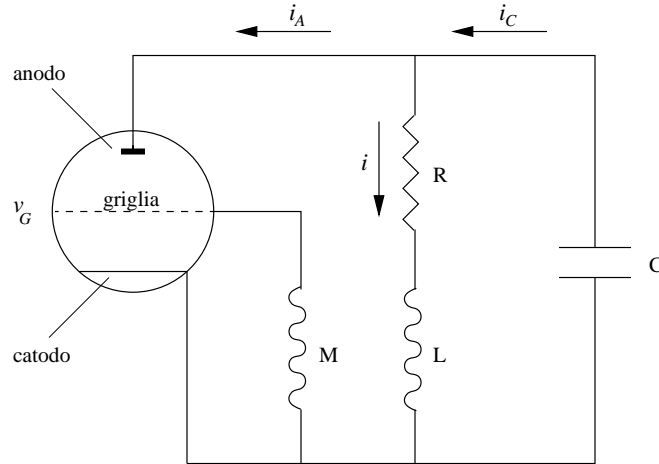


FIGURA 7.6. Triodo.

alimentare il potenziale di griglia  $v_G$ . Senza entrare in ulteriori dettagli fisici, le leggi del triodo sono:

$$i_A = f(v_G), \quad v_G = M \frac{di_L}{dt}.$$

La funzione  $f$  che appare nella prima equazione è detta la *caratteristica* del triodo. Essa è una funzione monotona crescente con limiti  $f(-\infty) = 0$ ,  $f(+\infty) = i_{\text{sat}}$  (detta corrente di saturazione del triodo). Nuovamente tutte le grandezze del circuito sono determinate dalla corrente  $i = i_R$ , la cui equazione di evoluzione si ottiene derivando la relazione  $v_R + v_L + v_C$ , utilizzando la legge di Kirchoff ( $i = i_L = i_A + i_C$ ) e le caratteristiche del circuito:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} - \frac{1}{C} f\left(M \frac{di}{dt}\right) = 0. \quad (7.7)$$

Poniamo per semplicità  $M = R = L = C = 1$ . Introducendo le variabili

$$x = \frac{di}{dt}, \quad y = f(0) - i,$$

l'equazione (7.7) diventa:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - G(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (7.8)$$

con  $G(x) = x - f(x) + f(0)$ . Posto  $g(x) = G'(x)$  il sistema (7.8) è equivalente all'equazione del secondo ordine:

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + x = 0, \quad (7.9)$$

detta *equazione di Lienard*.

Il sistema (7.8) possiede un unico punto singolare in  $(0, 0)$ . La matrice jacobiana in tale punto è  $\begin{pmatrix} -G'(0) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Quindi l'origine delle coordinate è una sorgente se  $G'(0) < 0$  ed un pozzo se  $G'(0) > 0$ . Inoltre, definito  $W(x, y) \doteq (x^2 + y^2)/2$ ,

si ha:

$$\dot{W}(x, y) = -xG(x), \quad (7.10)$$

da cui segue che nel caso in cui la funzione  $G(x)$  è monotona crescente (si ricordi che  $G(0) = 0$ ), l'origine delle coordinate è punto singolare attrattivo con bacino di attrazione l'intero piano. In questo caso il circuito è detto *passivo*: qualunque siano le condizioni iniziali, esso dissipa la sua energia e tende a "spegnersi" (come nel caso dei circuiti lineari *RLC* serie e parallelo).

Supponiamo ora che  $G'(0) = 1 - f'(0) < 0$ . In altri termini la caratteristica del triodo è tale che esso, per piccoli valori di  $x (= \frac{di}{dt})$ , fornisce al circuito più corrente di quanta ne dissipa la resistenza, cosicché  $(0, 0)$  è una sorgente (il circuito non si spegne mai). D'altra parte, poiché il triodo si satura (ovvero  $f(x)$  è limitata), per grandi valori di  $x$  la dissipazione dovuta alla resistenza domina e tutte le orbite rimangono presumibilmente limitate. Sotto alcune ipotesi aggiuntive sulla funzione  $G(x)$  mostreremo che in tal caso esiste un ciclo limite stabile. Tale ciclo è unico ed è quindi un *attrattore globale*: tutte le condizioni iniziali, purché diverse dalla posizione di equilibrio  $(0, 0)$ , sono attratte da esso.

D'ora innanzi assumeremo che la funzione  $G(x)$  goda delle seguenti proprietà:

- i)  $G(x) = -G(-x)$ ;
- ii)  $G(x) \rightarrow +\infty$  se  $x \rightarrow +\infty$ ;
- iii) esiste  $\alpha > 0$  tale che  $G(\alpha) = 0$ ,  $G(x) < 0$  per  $x \in (0, \alpha)$ ,  $G(x)$  crescente per  $x > \alpha$ .

Un caso particolare ed importante è quello dell'*equazione di Van der Pol*:

$$\ddot{x} = -x + k(1 - x^2)\dot{x}, \quad k > 0, \quad (7.11)$$

che corrisponde a  $G(x) = k(x^3/3 - x)$ .

Consideriamo le quattro curve:

$$\begin{aligned} y^+ &= \{(x, y) : x = 0, y > 0\}, & y^- &= \{(x, y) : x = 0, y < 0\}, \\ G^+ &= \{(x, y) : x > 0, y = G(x)\}, & G^- &= \{(x, y) : x < 0, y = G(x)\}, \end{aligned}$$

ed indichiamo con I, II, III e IV le regioni del piano da esse delimitate come in Figura 7.7.

**PROPOSIZIONE 7.11.** *Ogni soluzione del sistema (7.8) è definita globalmente nel futuro. Inoltre ogni traiettoria non stazionaria attraversa ripetutamente le curve  $y^+$ ,  $G^+$ ,  $y^-$  e  $G^-$  passando in senso orario attraverso le regioni I, II, III e IV.*

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla direzione del campo vettoriale si deduce che ogni soluzione che al tempo iniziale si trova sulla curva  $y^+$  [risp.  $G^+$ ] deve entrare necessariamente nella regione I [risp. II]. Consideriamo ora una soluzione  $t \mapsto (x(t), y(t))$  con dato iniziale  $(x_0, y_0)$  contenuto nella regione I. Sia  $K$  il compatto delimitato dall'origine  $(0, 0)$ , dalle curve  $y^+$ ,  $G^+$  e dalla retta  $y = y_0$ . Poniamo:

$$T = \sup\{t > 0 : (x(s), y(s)) \in K \forall s \in [0, t]\}.$$

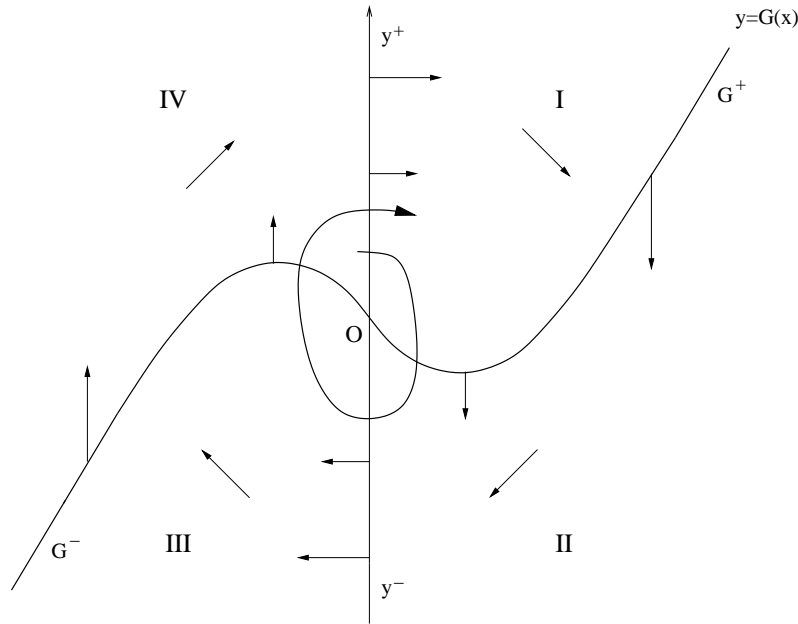


FIGURA 7.7. Le curve di fase ruotano in senso orario.

Dalla prima equazione in (7.8) si ha  $\dot{x}(t) \geq 0$  se  $t \in [0, T)$ , e quindi:

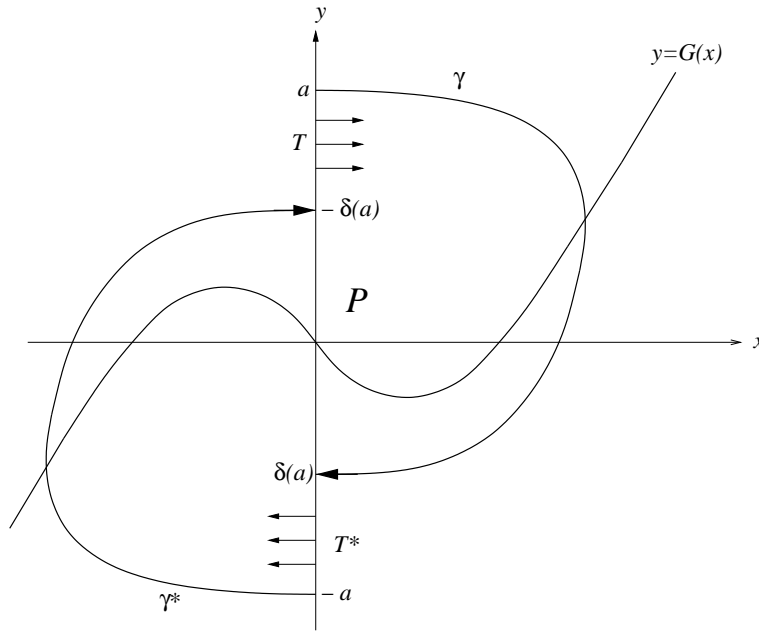
$$y(t) = y_0 - \int_0^t ds x(s) \leq y_0 - x_0 t \quad \forall t \in [0, T).$$

Essendo  $y(t) \geq \min\{G^+(x) : x > 0\}$  per ogni  $t \in [0, T)$ , concludiamo che  $T < +\infty$  necessariamente. Dunque la soluzione abbandona  $K$  in un tempo finito. Ma per la direzione del campo vettoriale sulla frontiera di  $K$  ciò avviene necessariamente attraversando  $G^+$ , ovvero entrando nella regione II. Consideriamo ora una soluzione  $t \mapsto (x(t), y(t))$  con dato iniziale  $(x_0, y_0)$  contenuto nella regione II. Dal sistema (7.8) ricaviamo  $\dot{x}(t) < 0$  ed  $y(t) \geq y_0 - x_0 t$  fintanto che la soluzione giace nella regione II. Ciò significa che essa non può esplodere in un tempo finito senza prima abbandonare tale regione. Sia quindi:

$$\bar{T} = \sup\{t > 0 : (x(s), y(s)) \in \text{II} \forall s \in [0, t]\}.$$

Vogliamo dimostrare che  $\bar{T} < +\infty$ . Assumiamo per assurdo che  $\bar{T} = +\infty$ . Allora  $x(t)$  ed  $y(t)$  sono monotone decrescenti su tutto l'asse positivo dei tempi. Giungiamo ad una contraddizione se mostriamo che  $(x(+\infty), y(+\infty)) \in y^-$ . Osserviamo dapprima che se fosse  $y(+\infty) = -\infty$  la prima equazione in (7.8) implicherebbe l'assurdo  $\dot{x}(+\infty) = -\infty$ . Se fosse  $x(+\infty) > 0$  dalla seconda equazione in (7.8) si avrebbe  $y(+\infty) = -\infty$  e quindi nuovamente un assurdo. Infine, essendo l'origine delle coordinate una sorgente segue che  $y(+\infty) < 0$ . In conclusione  $(x(+\infty), y(+\infty)) \in y^-$ .

La dimostrazione delle analoghe affermazioni per le regioni III e IV è del tutto simile.  $\square$

FIGURA 7.8. La regione invariante  $P$ .

Dalla proposizione precedente rimane definita la mappa  $\delta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^-$  tale che  $\delta(a)$  è l'ordinata della prima intersezione con il semiasse  $y^-$  della curva soluzione di dati iniziali  $(0, a)$ .

PROPOSIZIONE 7.12. *Se  $a$  è sufficientemente grande allora  $|\delta(a)| < a$ .*

L'esistenza di un'orbita periodica è ora un semplice corollario della proposizione precedente e del teorema di Poincaré-Bendixson. Osserviamo preliminarmente che la simmetria della funzione  $G$  implica che se  $t \mapsto (x(t), y(t))$  è soluzione del sistema (7.10) allora anche  $t \mapsto (-x(t), -y(t))$  è soluzione. Ne segue che, fissato  $a$  sufficientemente grande, si hanno gli archi di traiettoria  $\gamma$  e  $\gamma^*$  come in Figura 7.8. Allora la regione finita  $P$  delimitata dalle curve  $\gamma, \gamma^*$  e dai segmenti  $T, T^*$  è positivamente invariante. Essendo l'unico punto singolare una sorgente, il teorema di Poincaré-Bendixson garantisce l'esistenza di un'orbita periodica in  $P$ .

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 7.12. Decomponiamo l'arco di traiettoria dal punto  $A = (0, a)$  al punto  $D = (0, \delta(a))$  nei tre archi orientati,  $\gamma_1 = AB$ ,  $\gamma_2 = BC$  e  $\gamma_3 = CD$ , essendo  $B$  e  $C$  le intersezioni della retta  $x = a$  con il suddetto arco (vedi Figura 7.9). Ricordando che  $W(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ , si ha:

$$\frac{1}{2} (|\delta(a)|^2 - a^2) = W(0, \delta(a)) - W(0, a) = \int_{\gamma_1} dW + \int_{\gamma_2} dW + \int_{\gamma_3} dW.$$

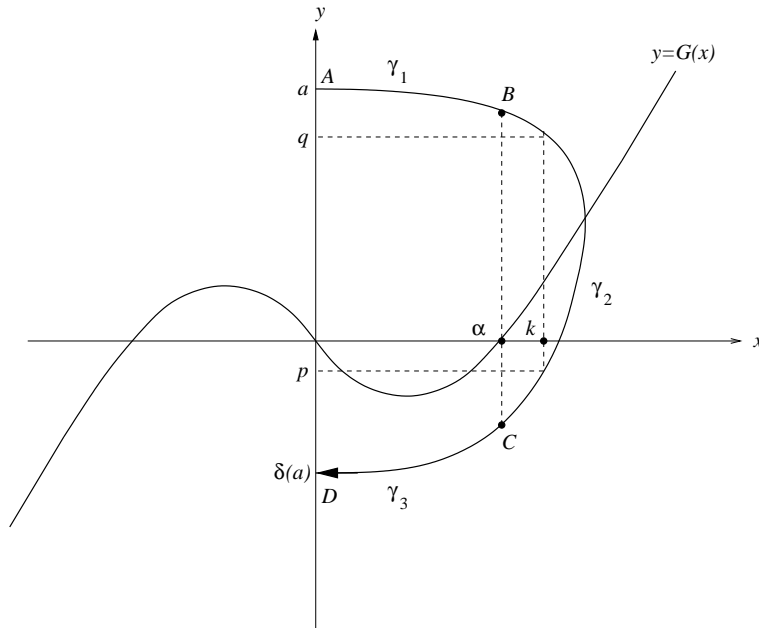


FIGURA 7.9.

Osserviamo che la curva  $\gamma_1$  [risp.  $\gamma_3$ ] è il grafico di una funzione  $y_1(x) > G(x)$  [risp.  $y_3(x) < G(x)$ ], con  $x \in [0, \alpha]$ . Dalla (7.10) ed essendo  $\dot{x} = y - G(x)$  si ha:

$$I(a) \doteq \int_{\gamma_1} dW + \int_{\gamma_3} dW = \int_0^\alpha dx \frac{-xG(x)}{y_1(x) - G(x)} + \int_0^\alpha dx \frac{-xG(x)}{G(x) - y_3(x)}.$$

La curva  $\gamma_2$  è invece il grafico di una funzione  $x_2(y) \geq \alpha$ ,  $y \in [y_3(\alpha), y_1(\alpha)]$ . Dalla (7.10) ed essendo  $\dot{y} = -x$ ,

$$J(a) \doteq \int_{\gamma_2} dW = - \int_{y_3(\alpha)}^{y_1(\alpha)} dy G(x_2(y)).$$

La funzione  $I(a)$  è positiva e converge a zero per  $a \rightarrow +\infty$ . È infatti evidente che il minimo (su  $[0, \alpha]$ ) delle funzioni  $y_1(x) - G(x)$  e  $G(x) - y_3(x)$  diverge per  $a \rightarrow +\infty$ . La funzione  $J(a)$  è invece negativa e converge a  $-\infty$  per  $a \rightarrow +\infty$ . Infatti, fissato  $k > \alpha$  come in Figura 7.9, si ha  $|J(a)| \geq G(k)|p - q|$  con  $G(k) > 0$  e  $|p - q| \rightarrow +\infty$  per  $a \rightarrow +\infty$ . Concludiamo che per  $a$  grande  $I(a) + J(a) < 0$ , ovvero  $|\delta(a)| < a$ .  $\square$

In realtà da un'analisi più accurata delle proprietà di monotonia della mappa  $a \mapsto \delta(a)$ , si può dimostrare che l'orbita periodica trovata è unica, dunque un attrattore globale. Più precisamente si può vedere che  $I(a)$  e  $J(a)$  sono entrambe monotone decrescenti, cosicché esiste un unico punto  $a^* > 0$  tale che  $\delta(a^*) = -a^*$ . D'altra parte l'applicazione  $\sigma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tale che  $\sigma(a) = -\delta(-\delta(a))$  fornisce l'ordinata del primo ritorno sul semiasse  $y^+$  della curva soluzione di dati iniziali  $(0, a)$ , cosicché si ha un'orbita periodica per  $(0, a)$  se e solo se  $a$  è un punto fisso di  $\sigma$ , ovvero  $\delta(a) = -a$ .

### 7.6. Soluzione degli esercizi

SOLUZIONE ES. 7.1. Il compatto  $K = \gamma \cup U$  è invariante. Supponiamo per assurdo che  $U$  non contenga né punti singolari né cicli. Per il teorema di Poincaré-Bendixson, si deduce che  $\gamma = L_\omega(x) = L_\alpha(x)$  per ogni  $x \in U$ . Ma allora, fissata una sezione trasversale locale  $S$  di un punto  $y \in \gamma$ , possiamo determinare due sequenze di tempi divergenti,  $t_k, s_k \nearrow +\infty$  tali che  $\varphi^{t_k}(x), \varphi^{-s_k}(x) \in S$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e  $\varphi^{t_k}(x), \varphi^{-s_k}(x) \rightarrow y$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Giungiamo in tal modo ad una contraddizione poiché le successive intersezioni di un'orbita con una sezione locale devono formare una successione monotona lungo la sezione stessa.

SOLUZIONE ES. 7.2. Supponiamo per assurdo che  $K$  non contenga un punto singolare. Allora, applicando iterativamente il teorema di Poincaré-Bendixson, possiamo determinare una successione di cicli  $\gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tale che  $\gamma_{n+1}$  è contenuto nella regione finita  $\Gamma_n$  delimitata da  $\gamma_n$ . Possiamo inoltre assumere che  $|\Gamma_n| \rightarrow \beta$  essendo  $\beta$  l'estremo inferiore delle aree racchiuse da cicli contenuti in  $K$ . Per compattezza esiste una successione convergente  $\{x_n; k \in \mathbb{N}\}$  tale che  $x_n \in \gamma_n$ . Il limite  $x$  di tale successione deve necessariamente appartenere ad un ciclo  $\gamma$ , poiché altrimenti sarebbe attratto da qualche ciclo limite e, per la Proposizione 7.7, anche qualche  $x_n$  lo sarebbe. Inoltre, detta  $\Gamma$  la regione finita racchiusa da  $\gamma$ , deve aversi  $|\Gamma_n| \rightarrow |\Gamma|$  per  $n \rightarrow +\infty$  (provarlo!) cosicché  $|\Gamma| = \beta$ . Ne consegue che  $\Gamma$  non contiene né punti singolari né cicli, in contraddizione con il risultato del precedente esercizio.

SOLUZIONE ES. 7.3. Supponiamo per assurdo che  $\mathcal{D}$  contenga un ciclo  $\gamma$  e sia  $\Gamma$  la regione finita aperta da esso delimitata. Il flusso del campo vettoriale attraverso la frontiera  $\Gamma$  è dunque nullo. Giungiamo in tal modo ad una contraddizione poiché, per il teorema della divergenza, tale flusso è uguale a  $\int_\Gamma dy \operatorname{div} v(y) \neq 0$ .

### 7.7. Nota bibliografica

Per gli argomenti trattati in questo capitolo si può fare riferimento ai testi sotto riportati.

- 1) VI. Arnold. *Equazioni differenziali ordinarie*. Mosca: Edizioni Mir, 1978.
- 2) E.A. Coddington, N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. (International series in pure and applied mathematics). New York: McGraw-Hill, 1955.
- 3) J. Guckenheimer, P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. (Applied Mathematical Sciences **42**). Berlin: Springer, 1993.
- 4) A. Katok, B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. (Encyclopedia of mathematics and its applications **54**). Cambridge: Cambridge U.P., 1995.

- 5) J.K. Hale. *Ordinary differential equations*. (Pure and applied mathematics **21**). New York: Wiley-Interscience, 1969.
- 6) M.W. Hirsch, S. Smale. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. (Pure and applied mathematics. A series of Monographs and Textbooks). San Diego: Academic Press, 1974.



## Teoremi fondamentali sulle equazioni differenziali ordinarie

### A.1. Stime preliminari e condizione di Lipschitz

Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  tali che  $\alpha < \beta$ . Indichiamo con  $C^0((\alpha, \beta); \mathbb{R}^n)$  l'insieme delle applicazioni  $\phi$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  (ovvero delle funzioni vettoriali  $\phi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) le cui componenti  $\phi_i$  sono funzioni continue nell'intervallo  $(\alpha, \beta)$ . Analogamente definiamo  $C^0([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$ ,  $C^0((\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$  e  $C^0([\alpha, \beta); \mathbb{R}^n)$ .

Per ogni intero positivo  $k$ , sia  $C^k((\alpha, \beta); \mathbb{R}^n)$  il sottoinsieme di  $C^0((\alpha, \beta); \mathbb{R}^n)$  delle applicazioni  $\phi$  le cui componenti  $\phi_i$  sono funzioni derivabili  $k$  volte con derivate continue nell'intervallo  $(\alpha, \beta)$ . Gli insiemi  $C^k([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$ ,  $C^k((\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$  e  $C^k([\alpha, \beta); \mathbb{R}^n)$  vengono definiti analogamente. Ovviamente le derivate agli estremi dell'intervallo sono da intendersi in modo opportuno: per esempio

$$\dot{\phi}_i(\alpha) = \frac{d\phi_i}{dt}(\alpha) \doteq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\phi_i(\alpha + h) - \phi_i(\alpha)}{h}.$$

Stabiliamo alcune disuguaglianze che utilizzeremo in seguito. Ricordiamo infine che la norma uniforme di  $\varphi \in C^0([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$  è definita da:

$$\|\varphi\|_0 \doteq \max\{|\varphi(t)| : t \in [\alpha, \beta]\},$$

( $|u|$  indica la norma euclidea del vettore  $u \in \mathbb{R}^n$ ). Sia assegnata  $\varphi \in C^1([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$ . Consideriamo dapprima il caso in cui

$$\varphi(t) \neq 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta).$$

In tal caso la derivata di  $|\varphi(t)|$  esiste su tutto  $(\alpha, \beta)$  e dalla definizione di norma si ha precisamente:

$$\frac{d|\varphi(t)|}{dt} = \frac{\langle \varphi(t), \dot{\varphi}(t) \rangle}{|\varphi(t)|}, \tag{A.1}$$

e perciò, per la disuguaglianza di Cauchy-Swartz,

$$\left| \frac{d|\varphi(t)|}{dt} \right| \leq |\dot{\varphi}(t)|. \tag{A.2}$$

Siano ora  $t, t_0 \in (\alpha, \beta)$ . Integrando ambo i membri della (A.1) ed utilizzando (A.2) otteniamo:

$$\left| |\varphi(t)| - |\varphi(t_0)| \right| \leq \left| \int_{t_0}^t d\tau |\dot{\varphi}(\tau)| \right|. \tag{A.3}$$

Per la continuità della funzione norma, la disuguaglianza (A.3) sussiste in tutto  $[\alpha, \beta]$ .

Consideriamo ora il caso generale in cui non necessariamente  $\varphi(t) \neq 0$  nell'intervallo aperto  $(\alpha, \beta)$ . Ovviamente le stesse argomentazioni restano valide in ogni possibile sottointervallo  $[\alpha_1, \beta_1]$  dove  $\varphi(t) \neq 0$  ed eventualmente  $\varphi(\alpha_1) = 0$  oppure  $\varphi(\beta_1) = 0$ . Si conclude quindi che la disuguaglianza (A.3) è vera in tutto  $[\alpha, \beta]$  anche nel caso generale.

Ponendo  $\varphi(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$  dalla (A.3) segue in particolare:

$$\left| \int_{t_0}^t d\tau f(\tau) \right| \leq \left| \int_{t_0}^t d\tau |f(\tau)| \right|. \quad (\text{A.4})$$

(disuguaglianza ben nota per  $n = 1$ ).

Nel seguito indichiamo con  $J_r(t)$  l'intorno simmetrico e chiuso del punto  $t \in \mathbb{R}$  di raggio  $r$ . Analogamente  $S_r(x)$  indica la palla chiusa in  $\mathbb{R}^n$  di centro  $x \in \mathbb{R}^n$  e raggio  $r$ . Infine  $\Omega$  denota un dominio aperto dello spazio  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  delle coordinate  $(t, x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

DEFINIZIONE A.1. Il campo  $v \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$  è detto localmente lipschitziano rispetto ad  $x$  e scriviamo  $v \in \text{Lip}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , se per ogni  $(t_0, x_0) \in \Omega$  esiste un suo intorno  $\mathcal{U}_0$ ,

$$\mathcal{U}_0 = \{(t, x) \in \Omega : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} = J_a(t_0) \times S_b(x_0) \quad (\text{A.5})$$

( $a, b > 0$ ) ed una costante positiva  $L$  tale che

$$|v(t, x) - v(t, x')| \leq L|x - x'|$$

per ogni  $(t, x), (t, x') \in \mathcal{U}_0$ .

LEMMA A.2 (Lemma di Lagrange). Sia  $v \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$  tale che la funzione jacobiana,

$$Dv(t, \cdot) \doteq \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(t, \cdot) \right\}_{i,j=1,\dots,n},$$

esiste continua:  $Dv(\cdot, \cdot) \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^{n^2})$ . Allora  $v$  è un campo lipschitziano in ogni compatto convesso  $[t_1, t_2] \times \mathcal{K} \subset \Omega$  (la costante di Lipschitz dipendendo solo da  $[t_1, t_2] \times \mathcal{K}$ ).

DIMOSTRAZIONE. Per la convessità di  $\mathcal{K}$ , comunque considerati due suoi punti  $x, y$  si ha che il segmento

$$p(\tau) = (1 - \tau)x + \tau y, \quad \tau \in [0, 1]$$

è anch'esso tutto contenuto in  $\mathcal{K}$ . Possiamo quindi scrivere:

$$v(t, y) - v(t, x) = \int_0^1 \frac{d}{d\tau} v(t, p(\tau)).$$

Eseguito la derivazione si ha:

$$\frac{d}{d\tau} v_i(t, p(\tau)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(t, p(\tau))(y_j - x_j), \quad i = 1, \dots, n.$$

Sia

$$M = \max_{i,j=1,\dots,n} \max \left\{ \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(t, x) \right| : (t, x) \in [t_1, t_2] \times \mathcal{K} \right\}.$$

Allora

$$\left[ \frac{d}{d\tau} v_i(t, p(\tau)) \right]^2 \leq nM^2 |x - y|^2$$

e quindi

$$\left| \frac{d}{d\tau} v(t, p(\tau)) \right| \leq nM |x - y|.$$

Concludendo, usando (A.4), si ha:

$$|v(t, x) - v(t, y)| \leq nM |x - y| \quad \forall t \in [t_1, t_2], \quad \forall x, y \in \mathcal{X}.$$

□

LEMMA A.3 (Lemma di Gronwall). *Siano  $F_i \in C^0((\tau_1, \tau_2); \mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2, 3$  tre funzioni positive e sia  $t_0 \in (\tau_1, \tau_2)$ . Supponiamo che in questo intervallo sia soddisfatta la disuguaglianza:*

$$F_1(t) \leq F_2(t) \left| \int_{t_0}^t ds F_1(s) \right| + F_3(t). \quad (\text{A.6})$$

Allora, nello stesso intervallo si ha

$$F_1(t) \leq F_2(t) \left| \int_{t_0}^t d\tau F_3(\tau) \exp \left[ \int_{\tau}^t ds F_2(s) \right] \right| + F_3(t) \quad (\text{A.7})$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo per definitezza il caso  $t > t_0$ . Poniamo

$$v(t) \doteq \int_{t_0}^t ds F_1(s).$$

Allora, usando (A.6),

$$\dot{v}(t) \leq F_2(t) v(t) + F_3(t).$$

Ancora con la sostituzione

$$v(t) = \zeta(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t ds F_2(s) \right] \quad (\text{A.8})$$

ricaviamo

$$\dot{\zeta}(t) \leq \exp \left[ - \int_{t_0}^t ds F_2(s) \right] F_3(t)$$

e quindi (essendo  $\zeta(t_0) = 0$ )

$$\zeta(t) \leq \int_{t_0}^t d\tau F_3(\tau) \exp \left[ \int_{\tau}^{t_0} ds F_2(s) \right].$$

Utilizzando (A.8) troviamo infine:

$$v(t) \leq \int_{t_0}^t d\tau F_3(\tau) \exp \left[ \int_{\tau}^t ds F_2(s) \right],$$

da cui (A.7) segue in virtù di (A.6). □

## A.2. Il teorema di esistenza ed unicità

Possiamo ora dimostrare il teorema principale del presente capitolo.

**TEOREMA A.4.** *Sia  $v \in \text{Lip}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  e  $(t_0, x_0)$  fissato in  $\Omega$ . Con riferimento al dominio  $\mathcal{U}_0 = J_a(t_0) \times S_b(x_0)$  in (A.5) sia*

$$M_0 = \max\{|v(t, x)| : (t, x) \in \mathcal{U}_0\}$$

e si ponga

$$m = \min \left\{ a; \frac{b}{M_0} \right\}.$$

Si consideri

$$\mathcal{W}_0 \doteq J_m(t_0) \times S_b(x_0). \quad (\text{A.9})$$

Esiste allora una funzione  $\phi \in C^1(J_m(t_0); S_b(x_0))$  soddisfacente

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) = v(t, \phi(t)) & \forall t \in J_m(t_0) \\ \phi(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

cioè una soluzione (locale, in  $\mathcal{W}_0$ ) del problema di Cauchy. Inoltre tale soluzione è unica.

**DIMOSTRAZIONE.** Cominciamo con il dimostrare l'esistenza di una soluzione. Definiamo *applicazione di Picard* la mappa  $T$  che associa ad ogni funzione  $\varphi \in C^1(J_m(t_0); S_b(x_0))$  la funzione  $T\varphi$  definita da

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t ds v(s, \varphi(s)), \quad t \in J_m(t_0). \quad (\text{A.11})$$

Osserviamo che l'insieme  $C^1(J_m(t_0); S_b(x_0))$  è lasciato invariante dalla applicazione  $T$ . In effetti  $T\varphi$  è evidentemente differenziabile ed in particolare  $(T\varphi)(t) = v(t, \varphi(t))$ ; inoltre, utilizzando (A.4),

$$|(T\varphi)(t) - x_0| \leq M_0 m \leq b \quad \forall t \in J_m(t_0),$$

ovvero  $(T\varphi)(t) \in S_b(x_0)$  per ogni  $t \in J_m(t_0)$ .

Determiniamo una soluzione del problema di Cauchy (A.10) come limite della successione delle *approssimazioni di Picard* così definite. Scegliamo una qualsiasi funzione  $\phi_0 \in C^1(J_m(t_0); S_b(x_0))$  tale che  $\phi_0(t_0) = x_0$  ( $\phi_0(t) \equiv x_0$  ad esempio) e costruiamo la successione di funzioni  $\{\phi_k\}$  tale che:

$$\phi_1 = T\phi_0, \quad \phi_2 = T\phi_1 = T^2\phi_0, \quad \dots \quad \phi_k = T\phi_{k-1} = T^k\phi_0.$$

Denotiamo con  $e(t)$  la misura dell'errore,

$$e(t) \doteq \dot{\phi}_0(t) - v(t, \phi_0(t)),$$

e poniamo

$$\varepsilon \doteq \max\{|e(t)| : t \in J_m(t_0)\}.$$

Stimiamo  $|\phi_1(t) - \phi_0(t)|$ ; si ha, in base alla (A.4),

$$|\phi_1(t) - \phi_0(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t ds |\dot{\phi}_1(s) - \dot{\phi}_0(s)| \right|,$$

e quindi, essendo  $\dot{\phi}_1(s) = v(s, \phi_0(s))$ ,

$$|\phi_1(t) - \phi_0(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t ds e(s) \right| \leq \varepsilon |t - t_0|. \quad (\text{A.12})$$

Stimiamo ora  $|\phi_2(t) - \phi_1(t)|$ ; si ha analogamente

$$|\phi_2(t) - \phi_1(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t ds |v(s, \phi_1(s)) - v(s, \phi_0(s))| \right|. \quad (\text{A.13})$$

Essendo  $v$  lipschitziano, rafforziamo tale disuguaglianza con

$$|\phi_2(t) - \phi_1(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^t ds |\phi_1(s) - \phi_0(s)| \right|$$

e, tramite la (A.12), otteniamo ancora

$$|\phi_2(t) - \phi_1(t)| \leq \varepsilon L \frac{|t - t_0|^2}{2}. \quad (\text{A.14})$$

Ora per induzione è facile iterando il ragionamento provare che:

$$|\phi_k(t) - \phi_{k-1}(t)| \leq \varepsilon L^{k-1} \frac{|t - t_0|^k}{k!}. \quad (\text{A.15})$$

Ma allora la serie

$$\phi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_k(t) - \phi_{k-1}(t)]$$

è assolutamente ed uniformemente convergente, cioè esiste ed è una funzione continua il limite

$$\phi(t) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k(t). \quad (\text{A.16})$$

Si ha inoltre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} (T\phi_{k-1})(t) = x_0 + \int_{t_0}^t ds v(s, \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k(s)).$$

Concludiamo che  $\phi$  è soluzione continua dell'equazione integrale:

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t ds v(s, \phi(s)), \quad t \in J_m(t_0). \quad (\text{A.17})$$

Ma allora  $\phi$  è anche soluzione del problema di Cauchy (A.10). Infatti la continuità di  $\phi$  implica che il secondo membro della (A.17) è una funzione differenziabile; dunque anche  $\phi$  è differenziabile. Possiamo quindi derivare ambo i membri della (A.17) ed otteniamo  $\dot{\phi} = v(t, \phi(t))$ ; essendo  $\phi(t_0) = x_0$  ne segue che  $\phi$  è la soluzione cercata.

Rimane da dimostrare l'unicità della soluzione, quanto meno nell'intervallo  $J_m(t_0)$ . Questo risultato è una immediata conseguenza del Lemma di Gronwall. Supponiamo che oltre alla  $\phi$  esista un'altra soluzione  $\psi$  del problema di Cauchy con gli stessi dati iniziali. Posto

$$\Delta(t) \doteq \phi(t) - \psi(t),$$

si ha

$$\dot{\Delta}(t) = v(t, \phi(t)) - v(t, \psi(t)).$$

Ne consegue

$$|\Delta(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t ds |v(s, \phi(s)) - v(s, \psi(s))| \right|$$

e quindi, essendo  $v$  lipschitziano,

$$|\Delta(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^t ds |\Delta(s)| \right|.$$

Si applichi ora la disuguaglianza di Gronwall: osservando che  $F_3(t) \equiv 0$  ne consegue  $\Delta(t) \equiv 0$ .  $\square$

### A.3. Dipendenza dai dati iniziali e dai parametri

Ci chiediamo come si comporta la soluzione se perturbiamo “di poco” il dato iniziale  $x_0$ . Premettiamo il seguente

LEMMA A.5. Sia  $v \in \text{Lip}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  e  $(t_0, x_0)$  fissato in  $\Omega$ . Siano  $a, b, \mathcal{U}_0, M_0$  ed  $m$  come nel Teorema A.4. Allora, per ogni  $x \in S_{b/2}(x_0)$  esiste unica la soluzione di dati iniziali  $(t_0, x)$  nel dominio  $J_{m/2}(t_0) \times S_b(x_0)$ .

DIMOSTRAZIONE. La prova è conseguenza del teorema di Cauchy ed è lasciata per esercizio.

Siamo ora in grado di affrontare il problema della continuità della soluzione rispetto ai dati iniziali.

TEOREMA A.6. Nelle ipotesi del lemma precedente, per  $x \in S_{b/2}(x_0)$  indichiamo con  $\phi(t, t_0, x)$  la soluzione di dati iniziali  $\phi(t_0, t_0, x) = x$  definita nell'intervallo  $J_{m/2}(t_0)$ . Allora, per ogni  $t, t' \in J_{m/2}(t_0)$  e  $x, x' \in S_{b/2}(x_0)$ ,

$$|\phi(t, t_0, x) - \phi(t', t_0, x')| \leq M_0 |t - t'| + |x - x'| e^{L|t - t_0|}.$$

con  $M_0$  come nel Teorema A.4. In particolare la mappa  $(t, x) \mapsto \phi(t, t_0, x)$  è continua.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $z(t) = \phi(t, t_0, x) - \phi(t, t_0, x')$ . Allora:

$$\begin{aligned} ||z(t)| - |z(t_0)|| &\leq \left| \int_{t_0}^t d\tau |v(\tau, \phi(\tau, t_0, x)) - v(\tau, \phi(\tau, t_0, x'))| \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t d\tau |z(\tau)| \right|, \end{aligned}$$

da cui:

$$|z(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^t d\tau |z(\tau)| \right| + |z(t_0)|.$$

Applicando il Lemma di Gronwall segue che  $|z(t)| \leq |z(t_0)| e^{L|t - t_0|}$ . D'altra parte:

$$|\phi(t, t_0, x') - \phi(t', t_0, x')| \leq \left| \int_t^{t'} d\tau |v(\tau, \phi(\tau, t_0, x'))| \right| \leq M_0 |t - t'|,$$

poiché  $(\tau, \phi(\tau, t_0, x')) \in \mathcal{U}_0$  per ogni  $(\tau, x') \in J_{m/2}(t_0) \times S_{b/2}(x_0)$ .  $\square$

TEOREMA A.7. *Assumiamo  $v \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ,  $k \geq 1$ . Allora per ogni  $(t_0, x_0) \in \Omega$  si possono determinare  $\delta, \varepsilon > 0$  tali che la soluzione  $\phi(t, t_0, x)$  è una funzione differenziabile (di classe  $C^k$ ) di  $(t, x)$  per  $|x - x_0| < \delta$  e  $|t - t_0| < \varepsilon$ .*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo solo il caso  $k = 1$ . Per il Teorema A.6 la soluzione locale  $(t, x) \mapsto \phi(t, t_0, x)$  è definita univocamente e continua per  $|x - x_0| < \delta$  e  $|t - t_0| < \varepsilon$  purché  $\delta \leq b/2$  ed  $\varepsilon \leq m/2$ . Essendo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, t_0, x) = v(t, \phi(t, t_0, x)),$$

la derivata parziale rispetto al tempo è una funzione continua nel complesso delle variabili  $(t, x)$ . Derivando formalmente l'equazione differenziale rispetto ai dati iniziali si ricava che la matrice jacobiana

$$X(t) \doteq D\phi(t, t_0, x) = \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(t, t_0, x) \right]_{i,j=1,\dots,n}$$

è soluzione della seguente equazione lineare omogenea non autonoma (detta *equazione delle variazioni*):

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = \mathbb{I} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

ovvero, più esplicitamente,

$$\begin{cases} \dot{X}_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^n A_{i,k}(t)X_{k,j}(t) \\ X_{i,j}(t_0) = \delta_{i,j} \end{cases}$$

avendo posto

$$A(t) \doteq Dv(t, \phi(t, t_0, x)) = \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(t, \phi(t, t_0, x)) \right]_{i,j=1,\dots,n}.$$

L'esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy (A.18) per  $|t - t_0| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  piccolo a sufficienza, è conseguenza del Teorema A.4, applicato al campo vettoriale lineare  $V(t, X) = A(t)X$  su  $\mathbb{R}^{n^2}$  (identifichiamo qui in maniera canonica le matrici  $n \times n$  con i vettori di  $\mathbb{R}^{n^2}$ ). Indichiamo dunque con  $X(t)$  tale soluzione e dimostriamo che effettivamente la matrice jacobiana  $D\phi(t, t_0, x)$  esiste e coincide con  $X(t)$ . Utilizzando la forma integrale dell'equazione differenziale per  $\phi(t, t_0, \cdot)$  si ha, per ogni  $x, h$  tali che  $|x - x_0| < \delta$  e  $|x - x_0 - h| < \delta$ ,

$$\phi(t, t_0, x+h) - \phi(t, t_0, x) = h + \int_{t_0}^t ds [v(s, \phi(s, t_0, x+h)) - v(s, \phi(s, t_0, x))],$$

e quindi, poiché  $X(t) = \mathbb{I} + \int_{t_0}^t ds A(s)X(s)$ ,

$$\begin{aligned} & \phi(t, t_0, x+h) - \phi(t, t_0, x) - X(t)h \\ &= \int_{t_0}^t ds [v(s, \phi(s, t_0, x+h)) - v(s, \phi(s, t_0, x)) - A(s)X(s)h]. \end{aligned}$$

D'altra parte, per il teorema fondamentale del calcolo,

$$\begin{aligned} & v(s, \phi(s, t_0, x+h)) - v(s, \phi(s, t_0, x)) \\ &= \int_0^1 d\lambda Dv(s, \xi_\lambda(s)) [\phi(s, t_0, x+h) - \phi(s, t_0, x)], \end{aligned}$$

essendo  $\xi_\lambda(s) \doteq \lambda\phi(s, t_0, x+h) + (1-\lambda)\phi(s, t_0, x)$ . Definito  $\Delta(t) \doteq \phi(t, t_0, x+h) - \phi(t, t_0, x) - X(t)h$ , otteniamo:

$$\Delta(t) = \int_{t_0}^t ds \left[ \omega(s, h) + \int_0^1 d\lambda Dv(s, \xi_\lambda(s)) \Delta(s) \right], \quad (\text{A.19})$$

dove, ricordando la definizione di  $A(s)$ ,

$$\omega(s, h) = \int_0^1 d\lambda [Dv(s, \xi_\lambda(s)) - Dv(s, \phi(s, t_0, x))] X(s)h. \quad (\text{A.20})$$

Osserviamo ora che  $Dv(s, x)$  ed  $X(s)$  sono funzioni continue delle loro variabili. Ne segue in particolare che, applicando il Lemma di Gronwall alla (A.19), esiste una costante  $0 < C_t < \infty$  tale che

$$|\Delta(t)| \leq C_t \sup_{s \in I_t} |\omega(s, h)|,$$

essendo  $I_t$  l'intervallo chiuso di estremi  $t_0$  e  $t$  (dimostrarlo). Notiamo inoltre che  $\xi_\lambda(s) \rightarrow \phi(s, t_0, x)$  per  $h \rightarrow 0$  uniformemente in  $(\lambda, s) \in [0, 1] \times I_t$ , cosicché

$$|\omega(s, h)| \leq o(s, h)|h|,$$

con  $o(s, h) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ , uniformemente in  $s \in I_t$ . Concludiamo che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\Delta(t)|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\phi(t, t_0, x+h) - \phi(t, t_0, x) - X(t)h|}{|h|} = 0.$$

Altrimenti detto, la mappa  $x \mapsto \phi(t, t_0, x)$  è differenziabile ed inoltre la sua matrice jacobiana coincide con  $X(t)$ . Rimane da dimostrare la continuità della mappa  $(t, x) \mapsto D\phi(t, t_0, x)$ . Poiché essa è soluzione del sistema differenziale (A.18), questa è conseguenza del seguente teorema, la cui dimostrazione è lasciata come esercizio.  $\square$

**TEOREMA A.8.** *Supponiamo che il campo vettoriale differenziabile  $v$  dipenda da un parametro  $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}$ . Se  $v \in C^0(\Omega \times \Lambda; \mathbb{R}^n)$  allora per ogni  $(t_0, x_0, \lambda_0)$  la soluzione locale  $\phi(t, t_0, x, \lambda)$  dell'equazione  $\dot{x} = v(t, x, \lambda)$  di dati iniziali  $\phi(t_0, t_0, x, \lambda) = x$  è una funzione continua nel complesso delle variabili  $(t, x, \lambda)$  per  $|t - t_0|, |x - x_0|, |\lambda - \lambda_0|$  sufficientemente piccoli.*

[Suggerimento: si confronti con l'equazione differenziale  $\dot{y} = V(t, y)$ , essendo  $V: \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  il campo vettoriale di componenti  $V(t, y) = (v(t, x), 0)$  ove  $y = (x, \lambda)$ ].

#### A.4. Nota bibliografica

Per gli argomenti trattati in questo capitolo si può fare riferimento ai testi sotto riportati.

- 1) V.I. Arnold. *Equazioni differenziali ordinarie*. Mosca: Edizioni Mir, 1978.
- 2) E.A. Coddington, N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. (International series in pure and applied mathematics). New York: McGraw-Hill, 1955.
- 3) J.K. Hale. *Ordinary differential equations*. (Pure and applied mathematics **21**). New York: Wiley-Interscience, 1969.