Interpolazione di funzioni su griglie sparse

Markus Fischer

Università di Heidelberg

Università di Roma “La Sapienza”, 26 febbraio 2008

Il problema

Funzione reale su ipercubo d-dimensionale: $f : [0,1]^d \rightarrow \mathbb{R}$
Informazione disponibile su f della forma

$$f(x^i) = y^i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

ove $n \in \mathbb{N}$ è il numero di cardinalità dell'informazione.

Il problema

Funzione reale su ipercubo d-dimensionale: $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$
Informazione disponibile su f della forma

$$f(x^i) = y^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

ove $n \in \mathbb{N}$ è il numero di cardinalità dell'informazione.

Obiettivo: ricostruire f in base all'informazione data.

Il problema

Funzione reale su ipercubo d-dimensionale: $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$
Informazione disponibile su f della forma

$$f(x^i) = y^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

ove $n \in \mathbb{N}$ è il numero di cardinalità dell'informazione.

Obiettivo: ricostruire f in base all'informazione data.

Due sottoproblemi:

1. Nodi x^i fissati. Da scegliere il metodo di interpolazione.

Il problema

Funzione reale su ipercubo d-dimensionale: $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$
Informazione disponibile su f della forma

$$f(x^i) = y^i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

ove $n \in \mathbb{N}$ è il numero di cardinalità dell'informazione.

Obiettivo: ricostruire f in base all'informazione data.

Due sottoproblemi:

1. Nodi x^i fissati. Da scegliere il metodo di interpolazione.
2. Scegliere la posizione dei nodi (più un metodo opportuno di interpolazione).

Il problema

Funzione reale su ipercubo d-dimensionale: $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$
Informazione disponibile su f della forma

$$f(x^i) = y^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

ove $n \in \mathbb{N}$ è il numero di cardinalità dell'informazione.

Obiettivo: ricostruire f in base all'informazione data.

Due sottoproblemi:

1. Nodi x^i fissati. Da scegliere il metodo di interpolazione.
2. Scegliere la posizione dei nodi (più un metodo opportuno di interpolazione).

Qui il secondo sottoproblema.

Errore di approssimazione

Sia $\mathbf{B}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ limitata}\}$ con norma $\|.\|_\infty$.

Informazione di cardinalità n rappresentata da

$$I_n := \{\xi : \mathbf{B}(X) \to \mathbb{R}^n \mid \xi(f) = (f(x^1), \dots, f(x^n)),\ x^i \in X\}.$$

Errore di approssimazione

Sia $\mathbf{B}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ limitata}\}$ con norma $\|.\|_\infty$.

Informazione di cardinalità n rappresentata da

$$I_n := \{\xi : \mathbf{B}(X) \to \mathbb{R}^n \mid \xi(f) = (f(x^1), \ldots, f(x^n)),\ x^i \in X\}.$$

L'insieme degli algoritmi che usano informazione di cardinalità è

$$A_n := \{\Psi = \phi \circ \xi \mid \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbf{B}(X),\ \xi \in I_n\}.$$

Errore di approssimazione

Sia $\mathbf{B}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ limitata}\}$ con norma $\|.\|_\infty$.

Informazione di cardinalità n rappresentata da

$$I_n := \{\xi : \mathbf{B}(X) \to \mathbb{R}^n \mid \xi(f) = (f(x^1), \ldots, f(x^n)),\ x^i \in X\}.$$

L'insieme degli algoritmi che usano informazione di cardinalità è

$$A_n := \{\Psi = \phi \circ \xi \mid \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbf{B}(X),\ \xi \in I_n\}.$$

Sia $F \subset \mathbf{B}(X)$. Errore di approssimazione di un algoritmo Ψ per F:

$$\mathrm{err}_{App}(F, \Psi) := \sup_{f \in F} \|\Psi(f) - f\|_\infty .$$

Errore di approssimazione

Sia $\mathbf{B}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ limitata}\}$ con norma $\|.\|_\infty$.

Informazione di cardinalità n rappresentata da

$$I_n := \{\xi : \mathbf{B}(X) \to \mathbb{R}^n \mid \xi(f) = (f(x^1), \ldots, f(x^n)),\ x^i \in X\}.$$

L'insieme degli algoritmi che usano informazione di cardinalità è

$$A_n := \{\Psi = \phi \circ \xi \mid \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbf{B}(X),\ \xi \in I_n\}.$$

Sia $F \subset \mathbf{B}(X)$. Errore di approssimazione di un algoritmo Ψ per F:

$$\mathrm{err}_{App}(F, \Psi) := \sup_{f \in F} \|\Psi(f) - f\|_\infty.$$

Errore di approssimazione con informazione di cardinalità n per F:

$$\mathrm{err}_{App}(F, n) := \inf_{\Psi \in A_n} \mathrm{err}_{App}(F, \Psi).$$

La maledizione della dimensionalità

Funzioni lipschitziane

Sia $F_d := \{f : [0,1]^d \to \mathbb{R} \mid |f(x) - f(y)| \leq \max |x_i - y_i|\}$. Allora

$$\mathrm{err}_{App}(F_d, n) \approx \frac{1}{2} n^{-1/d}.$$

La maledizione della dimensionalità

Funzioni lipschitziane – maledizione!

Sia $F_d := \{f : [0,1]^d \to \mathbb{R} \mid |f(x) - f(y)| \leq \max |x_i - y_i|\}$. Allora

$$\mathrm{err}_{App}(F_d, n) \approx \frac{1}{2} n^{-1/d}.$$

La maledizione della dimensionalità

Funzioni lipschitziane – maledizione!

Sia $F_d := \{f : [0,1]^d \to \mathbb{R} \mid |f(x) - f(y)| \leq \max |x_i - y_i|\}$. Allora

$$\mathrm{err}_{App}(F_d, n) \approx \frac{1}{2} n^{-1/d}.$$

Classi di Hölder

Siano $k \in \mathbb{N}_0$, $\beta \in (0,1]$. Poniamo

$$\mathbf{C}_d^{k,\beta} := \{f : [0,1]^d \to \mathbb{R} \mid |D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq \max |x_i - y_i|^\beta, \ |\alpha| = k\}.$$

Allora esistono costanti $0 < c_d < C_d < \infty$ tali che

$$c_d \cdot n^{-(k+\alpha)/d} \leq \mathrm{err}_{App}(\mathbf{C}_d^{k,\beta}, n) \leq C_d \cdot n^{-(k+\alpha)/d}.$$

La maledizione della dimensionalità

Funzioni lipschitziane – maledizione!

Sia $F_d := \{f : [0,1]^d \to \mathbb{R} \mid |f(x) - f(y)| \leq \max |x_i - y_i|\}$. Allora

$$\mathrm{err}_{App}(F_d, n) \approx \frac{1}{2} n^{-1/d}.$$

Classi di Hölder – maledizione a meno che non $k \sim d$

Siano $k \in \mathbb{N}_0$, $\beta \in (0,1]$. Poniamo

$$\mathbf{C}_d^{k,\beta} := \{f : [0,1]^d \to \mathbb{R} \mid |D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq \max |x_i - y_i|^\beta,\ |\alpha| = k\}.$$

Allora esistono costanti $0 < c_d < C_d < \infty$ tali che

$$c_d \cdot n^{-(k+\alpha)/d} \leq \mathrm{err}_{App}(\mathbf{C}_d^{k,\beta}, n) \leq C_d \cdot n^{-(k+\alpha)/d}.$$

La costruzione di Smolyak

Idee:

- Metodo d-dimensionale da prodotti tensoriali di operatori unidimensionali.

La costruzione di Smolyak

Idee:

- Metodo d-dimensionale da prodotti tensoriali di operatori unidimensionali.
- Struttura gerarchica degli operatori unidimensionali $\rightsquigarrow$ struttura gerarchica a dimensione d.

La costruzione di Smolyak

Idee:

- Metodo d-dimensionale da prodotti tensoriali di operatori unidimensionali.
- Struttura gerarchica degli operatori unidimensionali $\rightsquigarrow$ struttura gerarchica a dimensione d.
- Approssimazione di funzioni d-variate con prodotti di funzioni di dimensioni più basse.

L'algoritmo di Smolyak

"Algoritmo" [Smolyak, 1963]:

Siano $\mathcal{U}^i$, $i \in \mathbb{N}$, operatori lineari. Poniamo $\Delta^i := \mathcal{U}^i - \mathcal{U}^{i-1}$, $\mathcal{U}^0 := 0$.

L'algoritmo di Smolyak

"Algoritmo" [Smolyak, 1963]:

Siano $\mathcal{U}^i$, $i \in \mathbb{N}$, operatori lineari. Poniamo $\Delta^i := \mathcal{U}^i - \mathcal{U}^{i-1}$, $\mathcal{U}^0 := 0$.

L'algoritmo di Smolyak a dimensione d di livello $q-d$ è dato da

$$\mathcal{A}(q,d) := \sum_{\vec{i}\in\mathbb{N}^d, |\vec{i}|\leq q} \left(\Delta^{i_1} \otimes \ldots \otimes \Delta^{i_d}\right), \quad q \geq d,$$

ove $|\vec{i}| := i_1 + \ldots + i_d$ per $\vec{i} \in \mathbb{N}^d$.

L'algoritmo di Smolyak

Proprietà di $\mathcal{A}(q,d) = \sum_{|\vec{i}|\leq q} (\Delta^{i_1} \otimes \ldots \otimes \Delta^{i_d})$:

L'algoritmo di Smolyak

Proprietà di $\mathcal{A}(q,d) = \sum_{|\vec{i}|\leq q} (\Delta^{i_1} \otimes \ldots \otimes \Delta^{i_d})$:

$$\mathcal{A}(q,d) \;=\; \sum_{q-d+1\leq|\vec{i}|\leq q} (-1)^{q-|\vec{i}|} \binom{d-1}{q-|\vec{i}|} \left(\mathcal{U}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{U}^{i_d}\right),$$

L'algoritmo di Smolyak

Proprietà di $\mathcal{A}(q,d) = \sum_{|\vec{i}|\leq q}(\Delta^{i_1} \otimes \ldots \otimes \Delta^{i_d})$:

$$\mathcal{A}(q,d) = \sum_{q-d+1\leq|\vec{i}|\leq q} (-1)^{q-|\vec{i}|} \binom{d-1}{q-|\vec{i}|} \left(\mathcal{U}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{U}^{i_d}\right),$$

$$\mathcal{A}(q,d) = \sum_{k=d-1}^{q-1} \left(\mathcal{A}(k,d-1) \otimes \Delta^{q-k}\right),$$

L'algoritmo di Smolyak

Proprietà di $\mathcal{A}(q,d) = \sum_{|\vec{i}|\leq q} (\Delta^{i_1} \otimes \ldots \otimes \Delta^{i_d})$:

$$\mathcal{A}(q,d) = \sum_{q-d+1\leq|\vec{i}|\leq q} (-1)^{q-|\vec{i}|} \binom{d-1}{q-|\vec{i}|} \left(\mathcal{U}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{U}^{i_d}\right),$$

$$\mathcal{A}(q,d) = \sum_{k=d-1}^{q-1} \left(\mathcal{A}(k,d-1) \otimes \Delta^{q-k}\right),$$

$$\mathcal{A}(q,d) = \mathcal{A}(q-1,d) + \sum_{\vec{i}\in\mathbb{N}^d, |\vec{i}|=q} \left(\Delta^{i_1} \otimes \ldots \otimes \Delta^{i_d}\right).$$

L'algoritmo di Smolyak

Proprietà di $\mathcal{A}(q,d) = \sum_{|\vec{i}|\leq q} (\Delta^{i_1} \otimes \ldots \otimes \Delta^{i_d})$:

$$\mathcal{A}(q,d) = \sum_{q-d+1\leq|\vec{i}|\leq q} (-1)^{q-|\vec{i}|} \binom{d-1}{q-|\vec{i}|} \left(\mathcal{U}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{U}^{i_d}\right),$$

$$\mathcal{A}(q,d) = \sum_{k=d-1}^{q-1} \left(\mathcal{A}(k,d-1) \otimes \Delta^{q-k}\right),$$

$$\mathcal{A}(q,d) = \mathcal{A}(q-1,d) + \sum_{\vec{i}\in\mathbb{N}^d, |\vec{i}|=q} \left(\Delta^{i_1} \otimes \ldots \otimes \Delta^{i_d}\right).$$

Interpolazione con informazione su nodi

Siano $\mathcal{U}^i$, $i \in \mathbb{N}$, operatori lineari della forma

$$\mathcal{U}^i(f) = \sum_{j=1}^{m_i} f(x_j^i)\, a_j^i,$$

ove $m_i \in \mathbb{N}$, $x_j^i \in [0,1]$, a_j^i funzioni di base, $j \in \{1, \ldots, m_i\}$.

Interpolazione con informazione su nodi

Siano $\mathcal{U}^i$, $i \in \mathbb{N}$, operatori lineari della forma

$$\mathcal{U}^i(f) = \sum_{j=1}^{m_i} f(x_j^i)\, a_j^i,$$

ove $m_i \in \mathbb{N}$, $x_j^i \in [0,1]$, a_j^i funzioni di base, $j \in \{1, \dots, m_i\}$.

$X^i := \{x_j^i \mid 1 \leq j \leq m_i\}$ nodi unidimensionali di grado i.

Interpolazione con informazione su nodi

Siano $\mathcal{U}^i$, $i \in \mathbb{N}$, operatori lineari della forma

$$\mathcal{U}^i(f) = \sum_{j=1}^{m_i} f(x_j^i)\, a_j^i,$$

ove $m_i \in \mathbb{N}$, $x_j^i \in [0,1]$, a_j^i funzioni di base, $j \in \{1, \ldots, m_i\}$.

$X^i := \{x_j^i \mid 1 \leq j \leq m_i\}$ nodi unidimensionali di grado i.

Prodotti tensoriali di operatori $\mathcal{U}^i$:

$$(\mathcal{U}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{U}^{i_d})(f) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{j_d=1}^{m_d} f(x_{j_1}^{i_1}, \ldots, x_{j_d}^{i_d})\, a_{j_1}^{i_1} \otimes \ldots \otimes a_{j_d}^{i_d}$$

almeno per funzioni f della forma $\sum f_1 \otimes \ldots \otimes f_d$.

Griglie sparse

Sia $X^i := \{x_j^i \mid 1 \leq j \leq m_i\}$ l'insieme dei nodi unidimensionali di grado $i \in \mathbb{N}$.

Griglie sparse

Sia $X^i := \{x^i_j \mid 1 \leq j \leq m_i\}$ l'insieme dei nodi unidimensionali di grado $i \in \mathbb{N}$.

La griglia sparsa a dimensione d di livello $q-d$ è data da

$$\mathcal{H}(q,d) := \bigcup_{\vec{i}\in\mathbb{N}^d, |\vec{i}|\leq q} X^{i_1} \times \ldots \times X^{i_d}, \quad q \geq d.$$

Griglie sparse

Sia $X^i := \{x^i_j \mid 1 \leq j \leq m_i\}$ l'insieme dei nodi unidimensionali di grado $i \in \mathbb{N}$.

La griglia sparsa a dimensione d di livello $q-d$ è data da

$$\mathcal{H}(q,d) := \bigcup_{\vec{i}\in\mathbb{N}^d, |\vec{i}|\leq q} X^{i_1} \times \ldots \times X^{i_d}, \quad q \geq d.$$

Ipotesi: nodi annidati, cioè $X^{i-1} \subset X^i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Griglie sparse

Sia $X^i := \{x_j^i \mid 1 \le j \le m_i\}$ l'insieme dei nodi unidimensionali di grado $i \in \mathbb{N}$.

La griglia sparsa a dimensione d di livello $q-d$ è data da

$$\mathcal{H}(q,d) := \bigcup_{\vec{i}\in\mathbb{N}^d, |\vec{i}|\le q} X^{i_1} \times \ldots \times X^{i_d}, \quad q \ge d.$$

Ipotesi: nodi annidati, cioè $X^{i-1} \subset X^i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Poniamo $\Delta X^i := X^i \setminus X^{i-1}$, $X^0 := \emptyset$. Allora per l'ipotesi sui nodi:

$$\mathcal{H}(q,d) = \bigcup_{|\vec{i}|=q} X^{i_1} \times \ldots \times X^{i_d} = \bigcup_{|\vec{i}|\le q} \Delta X^{i_1} \times \ldots \times \Delta X^{i_d}.$$

Griglie sparse da griglie unidimensionali uniformi

Scelta semplice: griglia uniforme su $[0,1]$ con bordo:

$$x_j^i := \begin{cases} 1/2 & \text{se } j = 1 = i, \\ (j-1)/(m_i-1) & \text{se } i > 1,\ j \in \{1, \ldots, m_i\}, \end{cases}$$

ove $m_1 := 1$, $m_i := 2^{i-1} + 1$ se $i > 1$ (*Clenshaw-Curtis*).

Griglie sparse da griglie unidimensionali uniformi

Scelta semplice: griglia uniforme su $[0, 1]$ con bordo:

$$x_j^i := \begin{cases} 1/2 & \text{se } j = 1 = i, \\ (j-1)/(m_i-1) & \text{se } i > 1,\ j \in \{1, \ldots, m_i\}, \end{cases}$$

ove $m_1 := 1$, $m_i := 2^{i-1} + 1$ se $i > 1$ (*Clenshaw-Curtis*).

Grafici: griglie sparse a dimensione 2, livelli da 0 a 5

Griglie sparse da griglie unidimensionali uniformi

Scelta semplice: griglia uniforme su $[0,1]$ con bordo:

$$x_j^i := \begin{cases} 1/2 & \text{se } j = 1 = i, \\ (j-1)/(m_i - 1) & \text{se } i > 1,\ j \in \{1, \ldots, m_i\}, \end{cases}$$

ove $m_1 := 1$, $m_i := 2^{i-1} + 1$ se $i > 1$ (*Clenshaw-Curtis*).

Grafici: griglie sparse a dimensione 2, livelli da 0 a 5

Grafici: griglie sparse a dimensione 3, livelli da 0 a 5

Interpolazione multilineare a tratti

Scelta semplice per le funzioni di base: $a_1^1 \equiv 1$,

$$a_j^i(t) := \begin{cases} 1-(m_i-1)\cdot|t-x_j^i| & \text{se } |t-x_j^i| < 1/(m_i-1) \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$t \in [0,1]$, $i > 1$, $j \in \{1,\dots,m_i\}$.

Interpolazione multilineare a tratti

Scelta semplice per le funzioni di base: $a_1^1 \equiv 1$,

$$a_j^i(t) := \begin{cases} 1 - (m_i - 1) \cdot |t - x_j^i| & \text{se } |t - x_j^i| < 1/(m_i - 1) \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$t \in [0, 1]$, $i > 1$, $j \in \{1, \ldots, m_i\}$.

Funzioni di base a dimensione d:

$$a_{j_1}^{i_1} \otimes \ldots \otimes a_{j_d}^{i_d}(x) \;=\; a_{j_1}^{i_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot a_{j_d}^{i_d}(x_d), \quad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Struttura gerarchica delle funzioni di base

Struttura gerarchica a dimensione uno:

$$\mathcal{A}(q,1) \; = \; \sum_{j=1}^{q} \Delta^j \; = \mathcal{U}^q$$

somma telescopica per la costruzione di Smolyak.

Struttura gerarchica delle funzioni di base

Struttura gerarchica a dimensione uno:

$$\mathcal{A}(q,1) \; = \; \sum_{j=1}^{q} \Delta^j \; = \mathcal{U}^q$$

somma telescopica per la costruzione di Smolyak.

Struttura gerarchica a dimensione duo:

$$\mathcal{A}(q,2) \; = \; \sum_{j_1=1}^{q-1} \sum_{j_2=1}^{q-j_1} \Delta^{j_1} \otimes \Delta^{j_2}.$$

Introduzione

L'algoritmo di Smolyak

Griglie sparse e interpolazione multilineare a tratti

Errore di approssimazione

Riferimenti bibliografici

Un risultato generale

[Smolyak, 1963], [Schreiber, 2000]:

Teorema

Sia $d \in \mathbb{N}$. Per ogni $i \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{U}^i$ un operatore lineare $F^i \longrightarrow V^i$, ove $F^i \subset F$, $V^i \subset V$ sono spazi di Banach. Sia $I_1 : F \longrightarrow V$ lineare. Poniamo $I_d := I_1 \otimes \ldots \otimes I_1$.
Supponiamo che per ogni $l \in \{2, \ldots, d\}$ le norme tensoriali su $\otimes^l F$ e su $\otimes^l V$ siano uniformemente compatibili. Se esistono costanti B, c, K tali che $\|I_1 - \mathcal{U}^i\|_{F,V} \leq c\,B^i$, $\|I_1\|_{F,V} \leq K$, allora

$$\|I_d - \mathcal{A}(q,d)\|_{\otimes^d F, \otimes^d V} \;\leq\; c\,B^{q-d+1}\binom{q}{d-1}\max\{K, c(1+B)\}^{d-1}.$$

Errore di approssimazione su griglie sparse alla Clenshaw-Curtis

Sia $n(q, d) := \#\mathcal{H}(q, d)$ il numero dei nodi della griglia sparsa a dimensione d e di livello $q - d$.

Supponiamo che i nodi siano annidati e che $\#X^1 = m_1 = 1$, $\#X^i = m_i = 2^{i-1} + 1$ se $i > 1$ (Clenshaw-Curtis).

Errore di approssimazione su griglie sparse alla Clenshaw-Curtis

Sia $n(q,d) := \#\mathcal{H}(q,d)$ il numero dei nodi della griglia sparsa a dimensione d e di livello $q-d$.

Supponiamo che i nodi siano annidati e che $\#X^1 = m_1 = 1$, $\#X^i = m_i = 2^{i-1}+1$ se $i > 1$ (Clenshaw-Curtis).

Sotto le ipotesi del teorema, se $B = 2^{-k}$ per un $k \in \mathbb{N}$, allora con $n = n(q,d)$

$$\begin{aligned} & \|I_d - \mathcal{A}(q,d)\|_{\otimes^d F, \otimes^d V} \\ \leq\ & n^{-k}(2d + \log_2(n))^{(1+k)(d-1)} \frac{c}{(d-1)!^{k+1}} \max\{K, c(1+2^{-k})\}^{d-1}. \end{aligned}$$

Funzioni alle derivate parziali miste limitate

Lo spazio delle funzioni alle derivate parziali miste limitate di ordine k su $[0,1]^d$ è

$$F_d^k := \{f : [0,1]^d \to \mathbb{R} \mid \|f\|_{F_d^k} < \infty\},$$

ove $\|f\|_{F_d^k} := \max_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha|_\infty \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$.

Proprietà importanti:

Funzioni alle derivate parziali miste limitate

Lo spazio delle funzioni alle derivate parziali miste limitate di ordine k su $[0,1]^d$ è

$$F_d^k := \{f : [0,1]^d \to \mathbb{R} \mid \|f\|_{F_d^k} < \infty\},$$

ove $\|f\|_{F_d^k} := \max_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha|_\infty \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$.

Proprietà importanti:

- $\|.\|_{F_d^k}$ è una norma tensoriale: $f_1, \ldots, f_d$ univariate, allora $\|f_1 \otimes \ldots \otimes f_d\|_{F_d^k} = \|f_1\|_{F_1^k} \cdot \ldots \cdot \|f_d\|_{F_1^k}$.

Funzioni alle derivate parziali miste limitate

Lo spazio delle funzioni alle derivate parziali miste limitate di ordine k su $[0,1]^d$ è

$$F_d^k := \{f : [0,1]^d \to \mathbb{R} \mid \|f\|_{F_d^k} < \infty\},$$

ove $\|f\|_{F_d^k} := \max_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha|_\infty \le k} \|D^\alpha f\|_\infty$.

Proprietà importanti:

- $\|.\|_{F_d^k}$ è una norma tensoriale: $f_1, \ldots, f_d$ univariate, allora $\|f_1 \otimes \ldots \otimes f_d\|_{F_d^k} = \|f_1\|_{F_1^k} \cdot \ldots \cdot \|f_d\|_{F_1^k}$.
- $F_1^k \otimes \ldots \otimes F_1^k$ è denso in F_d^k.

Errore di approssimazione con interpolazione multilineare

Sia $A(q,d)$ l'algoritmo di Smolyak a dimensione d di livello $q-d$ con interpolazione multilineare a tratti.

Errore di approssimazione con interpolazione multilineare

Sia $A(q,d)$ l'algoritmo di Smolyak a dimensione d di livello $q-d$ con interpolazione multilineare a tratti.

Sia $k \in \{1,2\}$. Sia $F := \{f \in F_d^k \mid \|f\|_{F_d^k} \leq 1\}$.

Errore di approssimazione con interpolazione multilineare

Sia $A(q,d)$ l'algoritmo di Smolyak a dimensione d di livello $q-d$ con interpolazione multilineare a tratti.

Sia $k \in \{1,2\}$. Sia $F := \{f \in F_d^k \mid \|f\|_{F_d^k} \leq 1\}$.

Allora esiste una costante $c = c(k,d)$ tale che

$$\mathrm{err}_{App}(F, A(q,d)) \;\leq\; c \cdot n^{-k} \cdot (\log_2(n))^{(k+1)(d-1)},$$

ove $n = n(q,d)$ è il numero dei nodi (cardinalità dell'informazione).

Bibliografia I

V. Barthelmann, E. Novak and K. Ritter.
High dimensional polynomial interpolation on sparse grids.
Adv. Comput. Math., 12: 273–288, 2000.

H. J. Bungartz and M. Griebel.
Sparse grids.
Acta Numerica, 13: 147-269, 2004.

A. Klimke and B. Wohlmuth.
Algorithm 847: `spinterp`: piecewise multilinear hierarchical sparse grid interpolation in `MATLAB`.
ACM Trans. Math. Softw., 31(4): 561-579, 2005.

Bibliografia II

E. Novak.
Deterministic and Stochastic Error Bounds in Numerical Analysis.
Lecture Notes in Mathematics 1349, Springer, New York, 1988.

A. Schreiber.
Die Methode von Smolyak bei der multivariaten Interpolation.
Dissertation, Georg-August-Universität zu Göttingen, 2000.

S. A. Smolyak.
Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions.
Sov. Math., Dokl., 4: 240–243, 1963.