

Un'introduzione alla descrizione matematica della formazione ed evoluzione delle dune di sabbia

Stefano Finzi Vita

Dipartimento di Matematica
Università di Roma La Sapienza

www.mat.uniroma1.it/people/finzi

Roma, 22 gennaio 2008

Outline

- 1 La sabbia (caratteristiche, interesse e applicazioni)

Outline

- 1 La sabbia (caratteristiche, interesse e applicazioni)
- 2 Le dune (formazione ed evoluzione)

Outline

- 1 La sabbia (caratteristiche, interesse e applicazioni)
- 2 Le dune (formazione ed evoluzione)
- 3 Modellizzazione matematica
 - Il modello di Herrmann-Kroy-Sauermann ('02)
 - Il modello di Momiji-Warren ('00) per le dune in equilibrio
 - Il modello di Hadeler-Kuttler ('03)
 - Primi test numerici e possibili estensioni del modello HK

Outline

- 1 La sabbia (caratteristiche, interesse e applicazioni)
- 2 Le dune (formazione ed evoluzione)
- 3 Modellizzazione matematica
 - Il modello di Herrmann-Kroy-Sauermann ('02)
 - Il modello di Momiji-Warren ('00) per le dune in equilibrio
 - Il modello di Hadeler-Kuttler ('03)
 - Primi test numerici e possibili estensioni del modello HK
- 4 Conclusioni

La materia granulare e i suoi fenomeni

Definizione (da Wikipedia)

La **materia granulare** (m.g.) è un insieme di particelle solide, di discrete dimensioni sufficienti a non renderle soggette a fluttuazioni o moti termici. Il limite inferiore di dimensioni è di circa $1 \mu\text{m}$, al di sotto del quale le particelle avrebbero caratteristiche colloidali. Il limite superiore non è ben definito (anche i blocchi di ghiaccio degli iceberg possono considerarsi m.g., dato che le leggi che ne governano il moto sono simili).

ESEMPI:

sabbia, polvere, zucchero, ghiaia, carbone, riso, caffè, fertilizzanti, cuscinetti a sfera, neve fresca.

Interesse e applicazioni

Le ricerche nel campo possono farsi risalire a [Charles-Augustin de Coulomb](#), che formulò nel 1779 la sua legge sull'attrito sulla base di studi su particelle solide granulari.

- Conoscere a fondo le proprietà fondamentali dei materiali granulari può dare sviluppo a molte ricerche di frontiera della fisica moderna, e ha un notevole interesse per diverse applicazioni ([nell'industria chimica](#), [farmaceutica](#), [alimentare](#), [metallurgica](#), [nell'agricoltura](#), [nell'edilizia](#), [nella produzione di energia](#))

Interesse e applicazioni

Le ricerche nel campo possono farsi risalire a [Charles-Augustin de Coulomb](#), che formulò nel 1779 la sua legge sull'attrito sulla base di studi su particelle solide granulari.

- Conoscere a fondo le proprietà fondamentali dei materiali granulari può dare sviluppo a molte ricerche di frontiera della fisica moderna, e ha un notevole interesse per diverse applicazioni ([nell'industria chimica](#), [farmaceutica](#), [alimentare](#), [metallurgica](#), [nell'agricoltura](#), [nell'edilizia](#), [nella produzione di energia](#))
- Questi materiali sono molto diffusi in natura: la migliore comprensione di fenomeni naturali come [la migrazione delle dune](#), [i processi di erosione o deposizione](#), [le frane e le valanghe](#), può essere anche di grande utilità per programmi di salvaguardia ambientale

Comportamento

- Il comportamento che un materiale ha quando è suddiviso in granelli più o meno fini è assai diverso da quello di un solido, un liquido o un gas.
- I m.g. mostrano cioè caratteristiche simili ai fluidi newtoniani ma dissipano la loro energia molto rapidamente, e mostrano, a seconda della loro energia, caratteristiche di solidi, liquidi o gas.
- Ad esempio quando l'energia di un insieme di granuli è bassa questi sono immobili e il loro insieme si comporta come un solido. Acquisendo energia (ad esempio agitando il contenitore) i granuli cominceranno a scorrere fra di loro come un liquido; ma questo moto cesserà immediatamente se si cessa di fornire energia, e la superficie libera non tornerà uniforme e orizzontale.

Diverse scale

- A livello **microscopico** (interazioni tra i singoli granelli) la meccanica classica basta a descriverne il comportamento

Diverse scale

- A livello **microscopico** (interazioni tra i singoli granelli) la meccanica classica basta a descriverne il comportamento
- A livello **mesoscopico e macroscopico** compaiono nuovi e interessanti fenomeni (*metastabilità, valanghe, segregazione, formazione di patterns*) difficili da descrivere e comprendere pienamente

Diverse scale

- A livello **microscopico** (interazioni tra i singoli granelli) la meccanica classica basta a descriverne il comportamento
- A livello **mesoscopico e macroscopico** compaiono nuovi e interessanti fenomeni (*metastabilità, valanghe, segregazione, formazione di patterns*) difficili da descrivere e comprendere pienamente
- La materia granulare è un esempio dei cosiddetti **Sistemi Critici Auto-Organizzati**, definiti come
Grandi sistemi dinamici interattivi che evolvono naturalmente verso uno stato critico in cui un piccolo evento può condurre a una catastrofe ([Bak-Tang-Wiesenfeld '88](#))

La sabbia

- La sabbia è il classico esempio di materiale granulare. In geologia il termine indica una precisa classe granulometrica (granuli di diametro tra **0,06 mm** e **2 mm**). Particelle più piccole rientrano nella categoria della polvere, particelle più grandi sono definite ciottoli o blocchi. La sabbia proviene prevalentemente dall'erosione di rocce sedimentarie preesistenti.

La sabbia

- La sabbia è il classico esempio di materiale granulare. In geologia il termine indica una precisa classe granulometrica (granuli di diametro tra **0,06 mm** e **2 mm**). Particelle più piccole rientrano nella categoria della polvere, particelle più grandi sono definite ciottoli o blocchi. La sabbia proviene prevalentemente dall'erosione di rocce sedimentarie preesistenti.
- Nel trasporto i granelli sono soggetti ad abrasione nell'impatto tra loro e tendono ad arrotondare gli spigoli del loro bordo. Quindi un granello ben arrotondato ha probabilmente viaggiato molto, mentre un granello angoloso si è mosso solo localmente.

La sabbia

- La sabbia è il classico esempio di materiale granulare. In geologia il termine indica una precisa classe granulometrica (granuli di diametro tra **0,06 mm** e **2 mm**). Particelle più piccole rientrano nella categoria della polvere, particelle più grandi sono definite ciottoli o blocchi. La sabbia proviene prevalentemente dall'erosione di rocce sedimentarie preesistenti.
- Nel trasporto i granelli sono soggetti ad abrasione nell'impatto tra loro e tendono ad arrotondare gli spigoli del loro bordo. Quindi un granello ben arrotondato ha probabilmente viaggiato molto, mentre un granello angoloso si è mosso solo localmente.
- I granelli di un campione possono avere tutti circa la stessa dimensione, oppure avere taglie anche molto diverse tra loro. Questa composizione spesso dipende dal fluido da cui sono trasportati: vento, acqua o ghiaccio.

Vento + sabbia = il fascino delle dune







Caratteristiche

- Le **dune** sono colline di sabbia modellate dai venti e quindi soggette a continui spostamenti e ridimensionamenti dipendenti dalla direzione e forza del vento. Sono caratteristiche dei deserti sabbiosi e delle coste sabbiose.

Caratteristiche

- Le **dune** sono colline di sabbia modellate dai venti e quindi soggette a continui spostamenti e ridimensionamenti dipendenti dalla direzione e forza del vento. Sono caratteristiche dei deserti sabbiosi e delle coste sabbiose.
- Possono essere immobili (se fossilizzate) o mobili, quando il vento supera una velocità di soglia (circa 4 m/s). La loro velocità è in genere inversamente proporzionale alla loro altezza, ma non supera poche decine di metri per anno.

Caratteristiche

- Le **dune** sono colline di sabbia modellate dai venti e quindi soggette a continui spostamenti e ridimensionamenti dipendenti dalla direzione e forza del vento. Sono caratteristiche dei deserti sabbiosi e delle coste sabbiose.
- Possono essere immobili (se fossilizzate) o mobili, quando il vento supera una velocità di soglia (circa 4 m/s). La loro velocità è in genere inversamente proporzionale alla loro altezza, ma non supera poche decine di metri per anno.
- Hanno altezze variabili da 1 a 500 metri, e la loro forma dipende dalla quantità di sabbia disponibile e dalla variazione della direzione del vento.

Caratteristiche

- Le **dune** sono colline di sabbia modellate dai venti e quindi soggette a continui spostamenti e ridimensionamenti dipendenti dalla direzione e forza del vento. Sono caratteristiche dei deserti sabbiosi e delle coste sabbiose.
- Possono essere immobili (se fossilizzate) o mobili, quando il vento supera una velocità di soglia (circa 4 m/s). La loro velocità è in genere inversamente proporzionale alla loro altezza, ma non supera poche decine di metri per anno.
- Hanno altezze variabili da 1 a 500 metri, e la loro forma dipende dalla quantità di sabbia disponibile e dalla variazione della direzione del vento.
- Grandi distese desertiche dove è possibile uno studio sul campo sono presenti in Marocco, Libia, Egitto, Namibia, ma anche in California, Nevada, Brasile, Perù, e perfino su Marte.

Interesse

E' importante comprendere il comportamento delle dune. Esse non sono in genere immobili, ma è molto difficile ottenere modelli matematici in grado di predirne il movimento.

Possibili applicazioni:

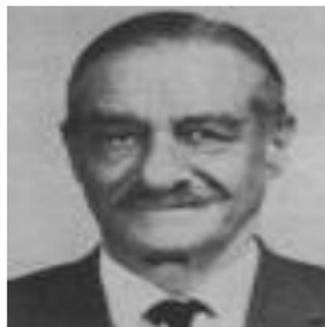
- prevenzione dalle ostruzioni di vie di comunicazione o centri abitati
- previsione delle tempeste di sabbia
- studio dei fondali sabbiosi di fiumi e coste
- ricerca spaziale (sulla superficie di Marte ci sono moltissime dune, e anche se l'atmosfera è diversa, la fisica che regola i granelli è la stessa)

"Chi dice duna dice danno"



Un pioniere: Ralph Alger BAGNOLD (1896-1990)

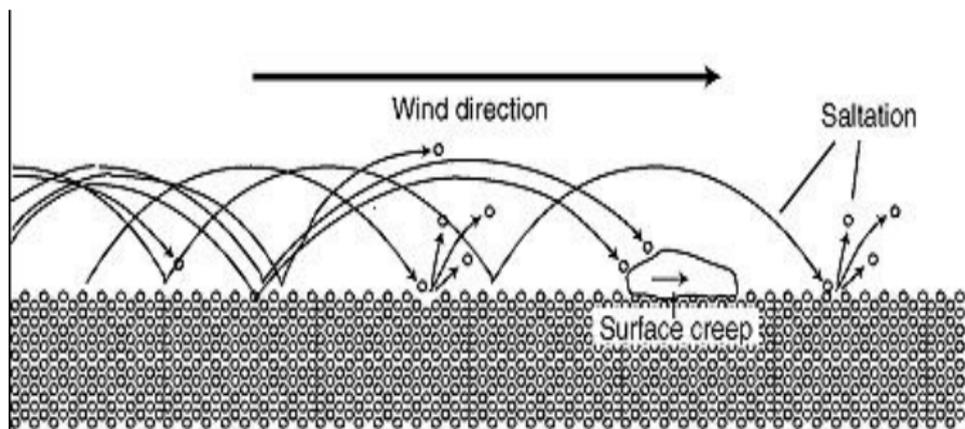
- Ingegnere dell'esercito britannico, tra le due guerre esplorò a fondo i deserti della Libia, del Sinai e dell'India
- Tornato in patria, condusse esperimenti nella galleria del vento e pubblicò il libro *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes* (1941, ripubblicato nel 1954), tuttora considerato un testo fondamentale, usato dalla Nasa per le esplorazioni di Marte
- Nella II Guerra Mondiale organizzò un reparto mobile (*Long Range Desert Group*) che con veicoli in grado di muoversi velocemente nel deserto condusse azioni di spionaggio e pirateria nei confronti delle truppe italiane e tedesche.



Il moto della sabbia sotto l'azione del vento

Nel libro di Bagnold si studia come la sabbia è raccolta, trasportata e accumulata dal vento su di una superficie piana in mucchi organizzati che possono mantenere la propria identità e spostarsi.

I granelli trasportati dal vento cadendo urtano altri granelli provocandone il sollevamento ([saltation](#)). L'angolo di incidenza sarà in genere sempre lo stesso. Se il vento è intenso e la sabbia disomogenea, gli urti possono anche provocare un movimento superficiale dei granelli più grossi non in grado di sollevarsi ([surface creep](#) o [reptation](#)).



Il moto della sabbia sotto l'azione del vento (2)

In funzione del diametro d dei granelli:

- $d < 0.06\text{mm}$: *suspension*. I granelli sollevati dal vento restano in aria anche per lungo tempo e possono viaggiare anche per lunghe distanze.

Il moto della sabbia sotto l'azione del vento (2)

In funzione del diametro d dei granelli:

- $d < 0.06\text{mm}$: *suspension*. I granelli sollevati dal vento restano in aria anche per lungo tempo e possono viaggiare anche per lunghe distanze.
- $0.1\text{mm} < d < 0.3\text{mm}$: *saltation*. Se il vento è debole i granelli rimbalzano per pochi centimetri e il fenomeno si esaurisce. Se è sostenuto (sopra una soglia critica) l'energia ricevuta dal vento dopo l'impatto supera quella persa nell'impatto e il movimento si autoalimenta (*flusso saturato*) in uno strato tra 1cm e 5cm sopra la superficie. Un granello che salta ad alta velocità può muovere per impatto granelli di diametro 6 volte superiore o di peso 200 volte superiore al proprio.

Il moto della sabbia sotto l'azione del vento (2)

In funzione del diametro d dei granelli:

- $d < 0.06\text{mm}$: *suspension*. I granelli sollevati dal vento restano in aria anche per lungo tempo e possono viaggiare anche per lunghe distanze.
- $0.1\text{mm} < d < 0.3\text{mm}$: *saltation*. Se il vento è debole i granelli rimbalzano per pochi centimetri e il fenomeno si esaurisce. Se è sostenuto (sopra una soglia critica) l'energia ricevuta dal vento dopo l'impatto supera quella persa nell'impatto e il movimento si autoalimenta (*flusso saturato*) in uno strato tra 1cm e 5cm sopra la superficie. Un granello che salta ad alta velocità può muovere per impatto granelli di diametro 6 volte superiore o di peso 200 volte superiore al proprio.
- $d > 0.4\text{mm}$: *surface creep*. I granelli più pesanti rotolano sulla superficie spinti dagli urti ricevuti da quelli più piccoli.

Consistenza e forma delle dune

- Salire su di una duna può essere molto difficile: il trucco è sapere da che lato salire. Sul lato controvento la sabbia è compatta, i granelli sono ben compressi e quindi si può camminare. Invece sul lato opposto, sottovento, i granelli vengono accumulati caoticamente con molti spazi tra gli uni e gli altri e quindi si affonda inesorabilmente (*slip face*).

Consistenza e forma delle dune

- Salire su di una duna può essere molto difficile: il trucco è sapere da che lato salire. Sul lato controvento la sabbia è compatta, i granelli sono ben compressi e quindi si può camminare. Invece sul lato opposto, sottovento, i granelli vengono accumulati caoticamente con molti spazi tra gli uni e gli altri e quindi si affonda inesorabilmente (*slip face*).
- Non tutte le dune sono uguali, ne esistono di molti tipi diversi. A volte sono isolate, altre volte riunite in veri mari di dune, grandi anche centinaia di chilometri quadrati. La forma dipende dalla variabilità in intensità e direzione del vento e dalla disponibilità di sabbia. Esistono dune **barcane**, **longitudinali** (seif dune), **transverse**, **lineari**, **stellate**, ...

Consistenza e forma delle dune

- Salire su di una duna può essere molto difficile: il trucco è sapere da che lato salire. Sul lato controvento la sabbia è compatta, i granelli sono ben compressi e quindi si può camminare. Invece sul lato opposto, sottovento, i granelli vengono accumulati caoticamente con molti spazi tra gli uni e gli altri e quindi si affonda inesorabilmente (*slip face*).
- Non tutte le dune sono uguali, ne esistono di molti tipi diversi. A volte sono isolate, altre volte riunite in veri mari di dune, grandi anche centinaia di chilometri quadrati. La forma dipende dalla variabilità in intensità e direzione del vento e dalla disponibilità di sabbia. Esistono dune **barcane**, **longitudinali** (seif dune), **transverse**, **lineari**, **stellate**, ...
- Al crescere dell'intensità del vento il versante upwind si allunga e si spiana, mentre quello downwind diventa sempre più ripido (la duna tende ad assomigliare a un enorme gradino).

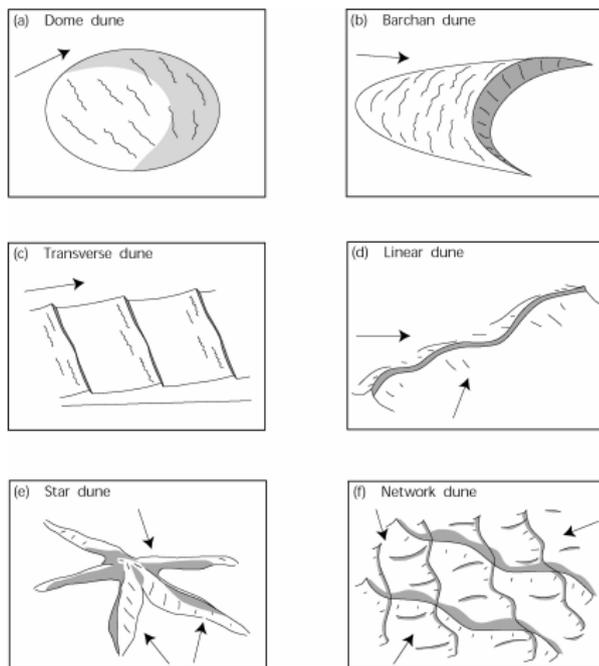


Figure 2.1: Schematic views of typical dunes: (a) dome dune, (b) barchan dune, (c) transverse dune, (d) linear dune, (e) star dune and (f) network dune ((a)–(e) after McKee, 1979b; (f) after Cooke *et al.*, 1993).

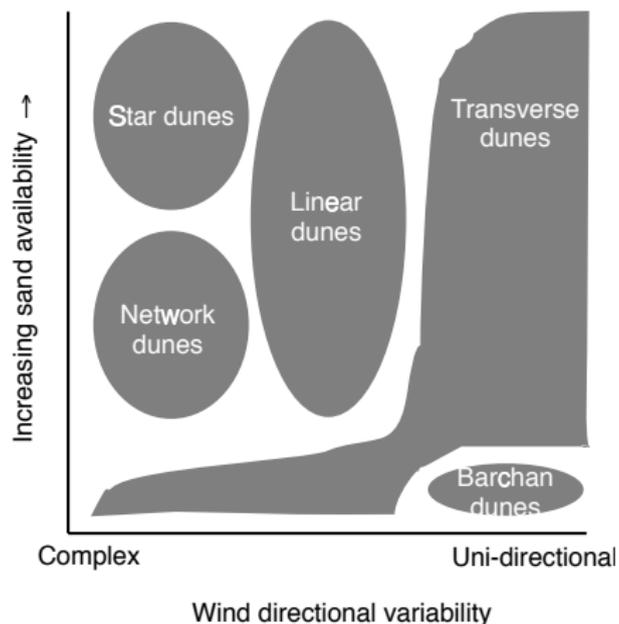


Figure 2.2: Dune type diagram with regard to sand availability and wind-direction variability (after Livingstone and Warren, 1996, figure 5.22).

Ripples

Nei materiali granulari disomogenei il movimento superficiale può esibire un'alternanza di accumulo ed erosione (come nei fenomeni di traffico) che tende ad organizzarsi in modo regolare ([ripples](#), "ondulazioni").

La distanza tra due creste successive cresce coll'intensità del moto (tra 2 e 12 cm), ma oltre una certa soglia il fenomeno sparisce (la superficie torna piana).



[per un modello matematico dei ripples v. ad es. [L. Prigozhin, '99](#)]

Booming dunes



The massive white dunes of Sand Mountain, southeast of Fallon, Nevada. This is one of the few "booming dunes" in the United States.

Le dune "cantano"

"Quando l'uomo cavalca di notte per quel deserto [...] molte volte ode istormenti in aria e propriamente tamburi"

(**Marco Polo**, Il Milione, 1300 ca)

Su di una grande duna, nel silenzio del deserto, può capitare di sentire la montagna di sabbia gemere, o persino produrre un rumore simile a quello di un'orchestra di tamburi o di un autotreno in corsa. Le dune riescono a produrre suoni che raggiungono i 100-105 db e si propagano anche a chilometri di distanza. In passato si pensava che il suono dipendesse dal forte vento del deserto. Ora si ritiene dovuto alle vibrazioni del letto di sabbia provocate dalle collisioni sincronizzate dei granelli di una stessa duna causate ad es. da una valanga. Si è anche scoperto che lo strato di silicio, ferro e manganese che ricopre i granelli dopo circa un mese di "canto" si deteriora e scompare, e i granelli restano muti.

[**B. Andreotti**, Laboratorio di Fisica e Meccanica degli ambienti eterogenei, CNRS, Parigi, <http://www.pmmh.espci.fr/~andreotti>]

Dune barcane



Dune barcane

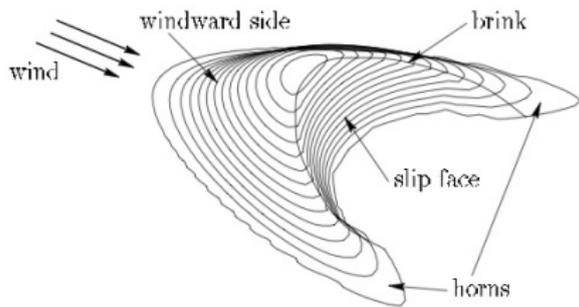


FIG. 1: Sketch of a barchan dune. Sand is eroded by the wind on the upwind or “stoss” side and transported to the brink. Strong deposition occurs due to flow separation behind the brink. On the downwind or “lee” side, sand slides down at the angle of repose (about $32^\circ - 35^\circ$) over a concave slip face.

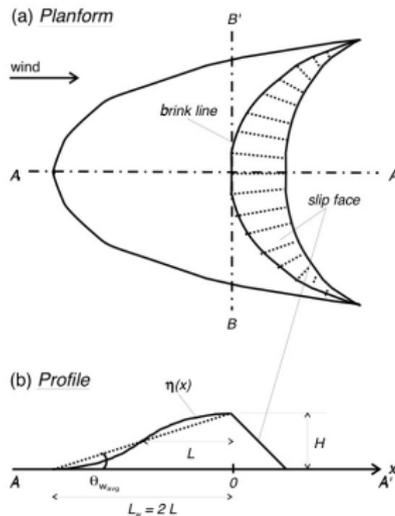
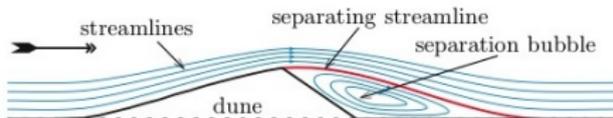
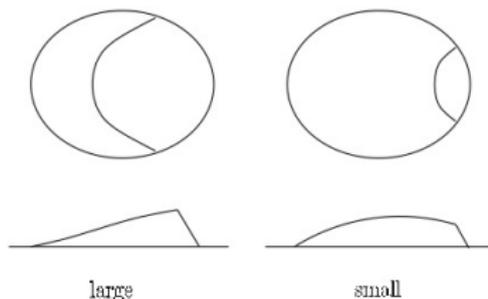


Figure 3.1: Schematic views of a barchan dune (a) from top and (b) from side.

Dune barcane

Le dune barcane non sono *shape invariant*:

- La forma della sezione centrale (AA') parallela alla direzione del vento dipende dall'altezza: la pendenza media del lato controvento cresce con H (angolo $5^\circ - 15^\circ$), quella del lato sottovento è sempre pari alla tangente dell'angolo di riposo (34° circa)
- La forma della sezione perpendicolare alla direzione del vento (BB') non dipende dall'altezza
- Nelle barcane piccole ($H < 3m$) il bordo non coincide con la cresta
- Nelle barcane grandi ($H > 3m$) bordo e cresta coincidono



Dune longitudinali (seif dune)



Dune longitudinali (seif dune)

Sono in genere prodotte dall'azione periodica di un vento bi-direzionale sulla tradizionale forma a barcana.

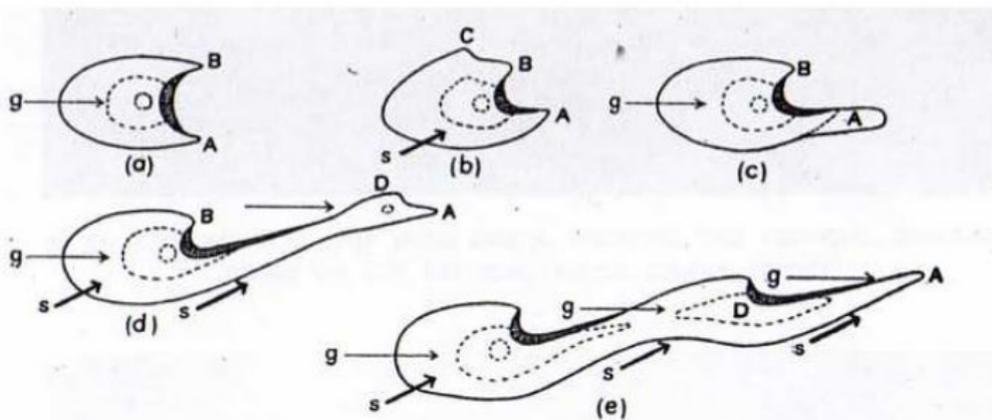
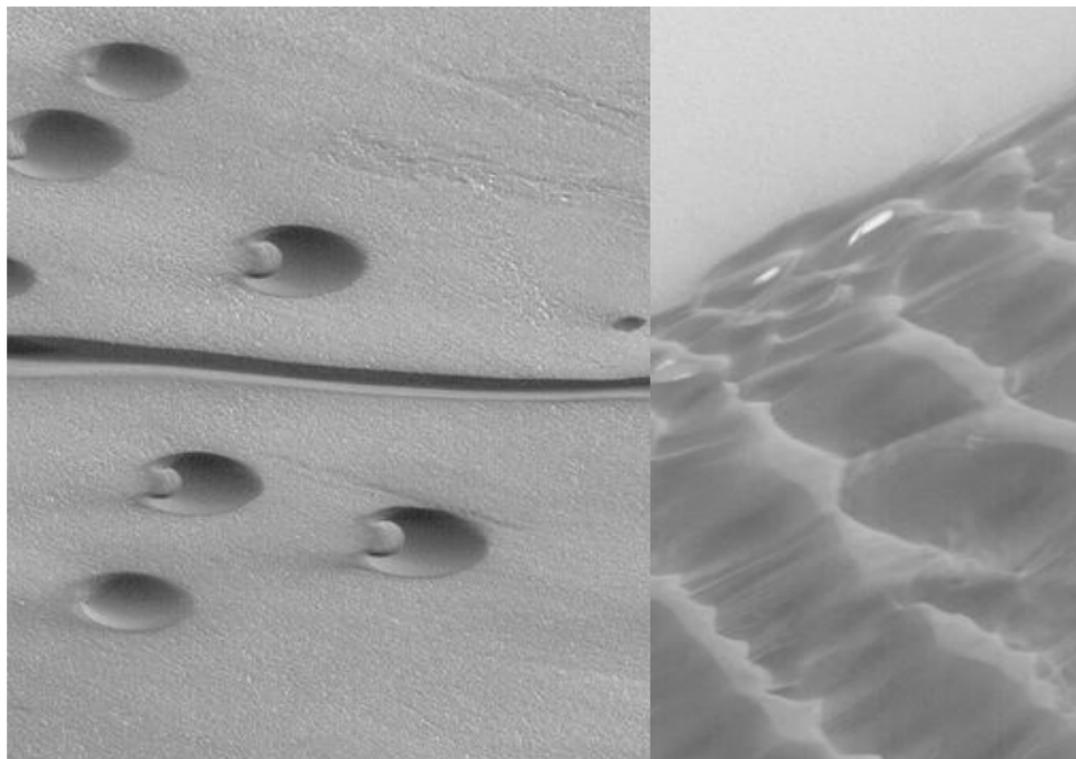


FIG. 78.—TRANSITION FROM BARCHAN TO SEIF DUNE FORM DUE TO A BI-DIRECTIONAL WIND

Dune di Marte: foto NASA, dal Mars Global Surveyor



La dinamica delle dune: modelli matematici



Uno schema iterativo per la modellistica

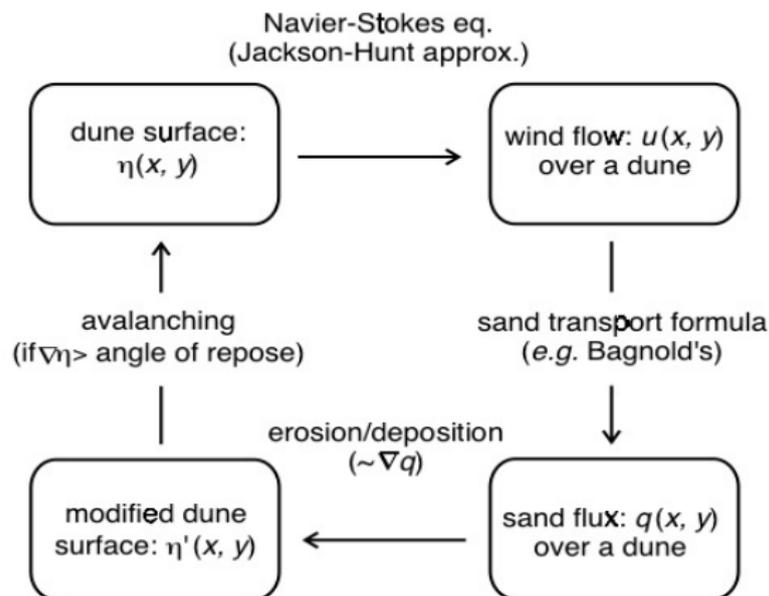


Figure 2.3: Flow chart for dune modelling in the conventional method. If $\eta'(x + dx, y + dx) = \eta(x, y)$, the dune is at equilibrium. The dune migration speed is $c_d = (dx/dt, dy/dt)$.

Lo schema iterativo di Herrmann-Kroy-Sauerermann per la formazione e la dinamica delle dune

- 1 Dal profilo alla sollecitazione di taglio (*shear stress*) attraverso un modello per il flusso del vento [Jackson-Hunt ('75)] :
 $h(x, t) \Rightarrow \tau(x, t)$
- 2 Dalla sollecitazione di taglio al flusso superficiale di sabbia [formule di Bagnold (41'), Lettau-Lettau ('78), Sorensen (91')] :
 $\tau(x, t) \Rightarrow q(x, t)$
- 3 Dal flusso di sabbia al nuovo profilo (erosione/deposizione) mediante la legge di conservazione della massa :
 $q(x, t) \Rightarrow h(x, t)$
- 4 Trattamento del versante sottovento (*slip face*). Valanghe se si supera l'angolo di riposo (BCRE o simili, $|\nabla h| \leq \alpha$)

(1) Fluidodinamica dell'aria

L'aria è un fluido Newtoniano, il cui stato è descritto dai campi di velocità e pressione (a temperatura e densità costanti). La sua evoluzione temporale è regolata dall'equazione di Navier-Stokes incomprimibile, il cui carattere è legato al numero di Reynolds

$$Re = \frac{Lv}{\nu}$$

dove L e v sono la lunghezza e la velocità caratteristiche e ν la viscosità.

Low $Re \Rightarrow$ flusso laminare

High $Re (> 6000) \Rightarrow$ **flusso turbolento**

I fenomeni di trasporto di sabbia nei deserti avvengono solo in regime di flusso turbolento (forti fluttuazioni in tempo e spazio, vortici).

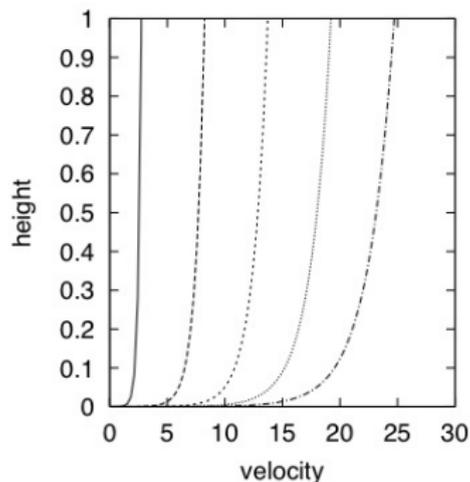
Una duna può essere vista come una perturbazione della superficie della sabbia che causa una perturbazione del flusso dell'aria (si suppone che il vento soffi sempre nella stessa direzione).

(1) Il profilo della velocità del vento sopra una superficie

$$v(z) = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0}$$

dove

- $k \approx 0,4$ costante di Von Karman
- $u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_a}}$ shear velocity
- τ shear stress
- $\rho_a \simeq 1,225 \text{Kg}/\text{m}^3$ densità dell'aria
- z quota sul livello del suolo
- $z_0 \simeq 10^{-5} \text{m}$ ruvidità



(1) Il modello di Jackson-Hunt ('75)

L'uso di NS è troppo oneroso computazionalmente (specie in 3D).
Versioni semplificate sono inserite in software commerciali (es. FLUENT).
Per un uso iterativo si preferisce quindi usare un modello introdotto nel '75 da Jackson e Hunt nel caso 2D (poi esteso in 3D).

- Fornisce (attraverso trasformate di Fourier) una soluzione analitica dello shear stress per il flusso del vento attorno ad un ostacolo regolare (come una collinetta di sabbia):

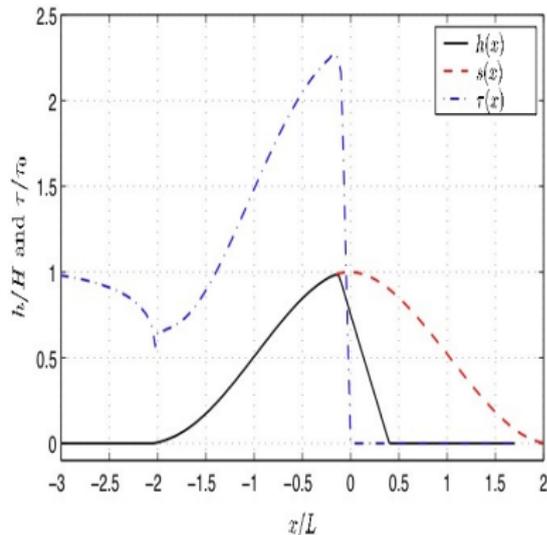
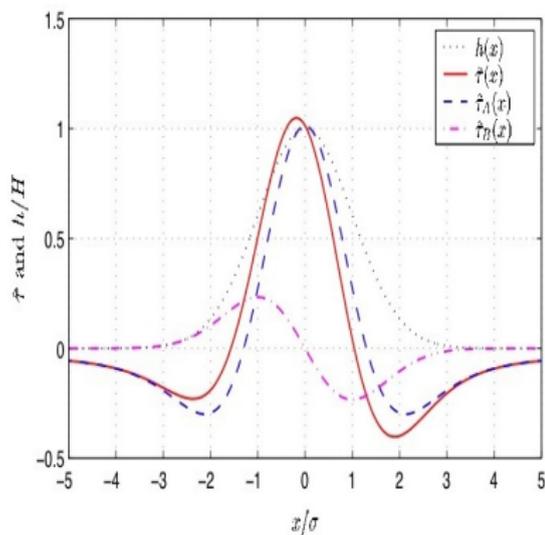
$$\tau(x) = \tau_0 \left(1 + A \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{x-\xi} d\xi + Bh \right] \right) = \tau_A(x) + \tau_B(x)$$

τ_A (non locale simmetrico determinato dalle variazioni di pressione)

τ_B (locale antisimmetrico determinato dagli effetti inerziali)

- Si applica solo al caso di pendenze poco ripide, quindi al lato controvento delle dune (per quello sottovento occorre una strategia di *wind separation*).

(1) Shear stress per un profilo gaussiano e *wind separation*



⇒ deposizione al piede del versante upwind e sulla cima !

(2) Il flusso di sabbia (descrizione microscopica)

Il vento esercita sui granelli le forze

- F_d (**drag force**) orizzontale in direzione del flusso
- F_l (**lift force**) verso l'alto

a cui si oppone

- F_g (**gravitational force**) verso il basso

Perché inizi il movimento dei granelli l'intensità del vento deve superare una certa soglia (minimal shear stress). Per l'impatto di altri granelli invece lo shear stress minimale è più basso (u_{*t}).

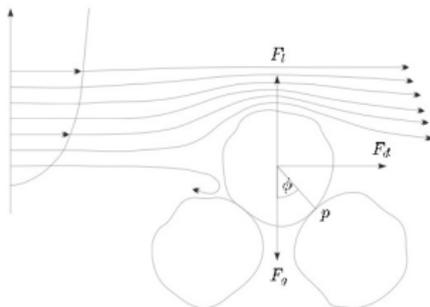


Figure 1.8: The grain starts to roll when the drag and lift forces exceed the gravitational force. This can be expressed by a momentum balance with respect to the pivot point p .

(2) Il flusso di sabbia (descrizione macroscopica)

$$q(x, t) = f(u_*, u_{*t}, d, \dots)$$

flusso di sabbia per unità di lunghezza e di tempo.

$$u_* \gg u_{*t} \quad \Rightarrow \quad q \propto u_*^3$$

Formule introdotte per il flusso di sabbia (saturato)

- Bagnold ('41). Realistico solo per grandi velocità del vento.

$$q_B = c_B \frac{\rho_a}{g} \sqrt{\frac{d}{D}} u_*^3 \quad (D = 250 \mu m)$$

(2) Il flusso di sabbia (descrizione macroscopica)

$$q(x, t) = f(u_*, u_{*t}, d, \dots)$$

flusso di sabbia per unità di lunghezza e di tempo.

$$u_* \gg u_{*t} \quad \Rightarrow \quad q \propto u_*^3$$

Formule introdotte per il flusso di sabbia (saturato)

- Bagnold ('41). Realistico solo per grandi velocità del vento.

$$q_B = c_B \frac{\rho_a}{g} \sqrt{\frac{d}{D}} u_*^3 \quad (D = 250 \mu m)$$

- Lettau&Lettau ('78). Introduce una soglia inferiore al flusso.

$$q_L = c_L \frac{\rho_a}{g} u_*^2 (u_* - u_{*t})$$

(2) Il flusso di sabbia (descrizione macroscopica)

$$q(x, t) = f(u_*, u_{*t}, d, \dots)$$

flusso di sabbia per unità di lunghezza e di tempo.

$$u_* \gg u_{*t} \quad \Rightarrow \quad q \propto u_*^3$$

Formule introdotte per il flusso di sabbia (saturato)

- Bagnold ('41). Realistico solo per grandi velocità del vento.

$$q_B = c_B \frac{\rho_a}{g} \sqrt{\frac{d}{D}} u_*^3 \quad (D = 250 \mu\text{m})$$

- Lettau&Lettau ('78). Introduce una soglia inferiore al flusso.

$$q_L = c_L \frac{\rho_a}{g} u_*^2 (u_* - u_{*t})$$

- Sørensen (91).

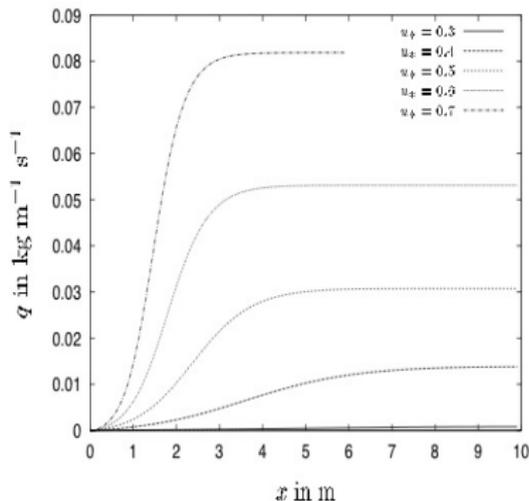
$$q_S = c_S \frac{\rho_a}{g} u_* (u_* - u_{*t}) (u_* + 7.6u_{*t} + 2.05)$$

(2) Il flusso di sabbia (fase transiente)

Su di una superficie piana supponendo ad esempio una velocità dei granelli di 4 m/s, occorrono circa 2 secondi (T_S) e 10 metri (l_S) per raggiungere la saturazione nel processo della saltation (e quindi non esistono dune stabili più basse di 1,5 m).

Per tenerne conto è stata introdotta un'equazione per l'evoluzione del flusso:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{l_S} q \left(1 - \frac{q}{q_S} \right)$$



(3) Erosione/deposizione con conservazione della massa

Per chiudere il modello completo che lega le tre variabili h, τ e q , occorre da quest'ultima ricavare il nuovo profilo modificato. Per questo è sufficiente richiedere la conservazione della massa

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\rho_s} \nabla q$$

dove $\rho_s \simeq 2650 \text{ Kg/m}^3$ è la densità della sabbia (quarzo).

Se la duna si sposta senza cambiare la sua forma ad una velocità v_d , avremo

$$\frac{\partial h}{\partial t} = v_d \nabla h$$

che insieme alla precedente equazione dà

$$v_d = \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial q}{\partial h} = \frac{q_b}{\rho_s H},$$

e quindi si ritrova che la velocità delle dune è inversamente proporzionale alla loro altezza (q_b : flusso sul bordo, H : altezza della duna).

(4) Il lato sottovento. Effetti della pendenza critica

Quando nel versante sottovento la pendenza supera quella critica ($\nabla h > \tan 34^\circ$) iniziano a prodursi delle valanghe fino ad un nuovo equilibrio. In questo caso è solo la gravità e non il vento a produrre il flusso di sabbia.

- In 2D il versante si può semplicemente ricostruire con una linea retta a pendenza critica a partire dall'altezza del bordo.

(4) Il lato sottovento. Effetti della pendenza critica

Quando nel versante sottovento la pendenza supera quella critica ($\nabla h > \tan 34^\circ$) iniziano a prodursi delle valanghe fino ad un nuovo equilibrio. In questo caso è solo la gravità e non il vento a produrre il flusso di sabbia.

- In 2D il versante si può semplicemente ricostruire con una linea retta a pendenza critica a partire dall'altezza del bordo.
- In 3D occorre utilizzare un modello ad hoc, ad es. BCRE, Hadeler-Kuttler o simili.

L'approccio di Momiji-Warren ('00)

- Per lo studio del profilo di una duna in equilibrio, si può usare la condizione che i flussi di sabbia lontano dalla duna debbono equivalersi ($q(-\infty) = q(\infty)$). A partire dall'altezza della duna (H), dal diametro medio dei granelli (D_g) e dalla shear velocity upwind ($u_*(-\infty)$) si può così determinare la shear velocity $u_*(0)$ sulla cresta.

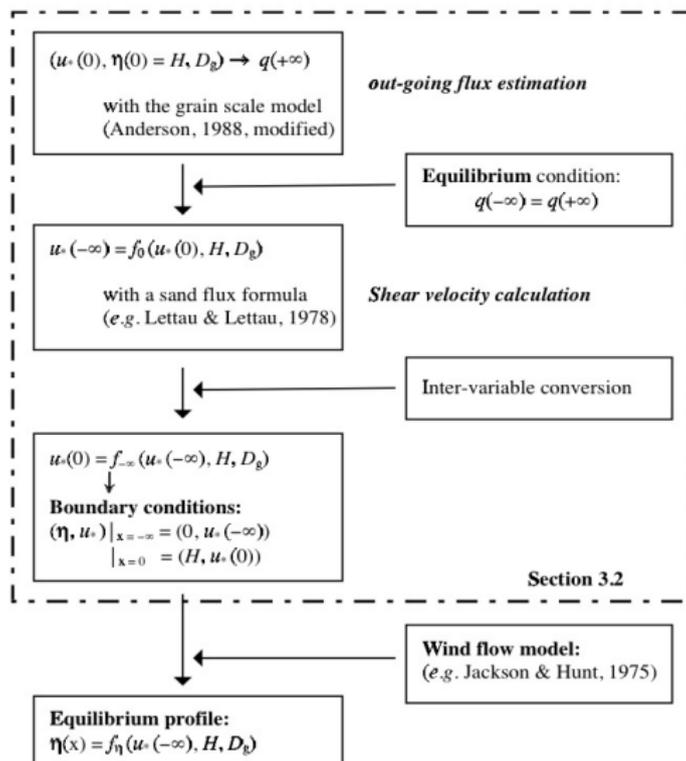
L'approccio di Momiji-Warren ('00)

- Per lo studio del profilo di una duna in equilibrio, si può usare la condizione che i flussi di sabbia lontano dalla duna debbono equivalersi ($q(-\infty) = q(\infty)$). A partire dall'altezza della duna (H), dal diametro medio dei granelli (D_g) e dalla shear velocity upwind ($u_*(-\infty)$) si può così determinare la shear velocity $u_*(0)$ sulla cresta.
- A questo punto risolvendo un problema inverso di fluidodinamica (ad es. col modello di Jackson-Hunt) si può determinare il profilo upwind della duna, supposto di una forma regolare (coseno o Gaussiana).

L'approccio di Momiji-Warren ('00)

- Per lo studio del profilo di una duna in equilibrio, si può usare la condizione che i flussi di sabbia lontano dalla duna debbono equivalersi ($q(-\infty) = q(\infty)$). A partire dall'altezza della duna (H), dal diametro medio dei granelli (D_g) e dalla shear velocity upwind ($u_*(-\infty)$) si può così determinare la shear velocity $u_*(0)$ sulla cresta.
- A questo punto risolvendo un problema inverso di fluidodinamica (ad es. col modello di Jackson-Hunt) si può determinare il profilo upwind della duna, supposto di una forma regolare (coseno o Gaussiana).
- Questo approccio è in grado di spiegare perché dune più alte sono più ripide controvento. Infatti al crescere di H aumenta la quantità di sabbia che oltre la cresta viene catturata dalla slip face (la **Sand Trapping Efficiency** della duna) e quindi diminuisce il flusso di sabbia all'infinito ($q(\infty)$). Per mantenere la condizione di equilibrio dei flussi è quindi necessario un incremento della pendenza media del lato upwind che provoca l'aumento della shear velocity in cresta e di conseguenza riduce la S.T.E. della duna.

L'approccio di Momiji-Warren ('00)



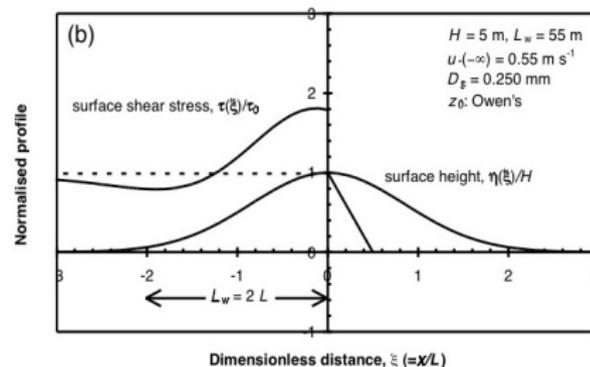
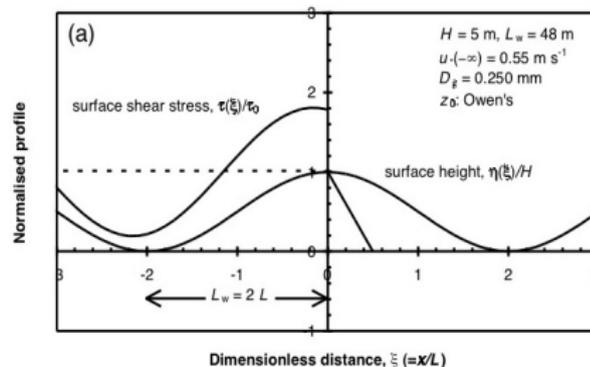
Il profilo centrale di una barcana in equilibrio

- Cosine hill**

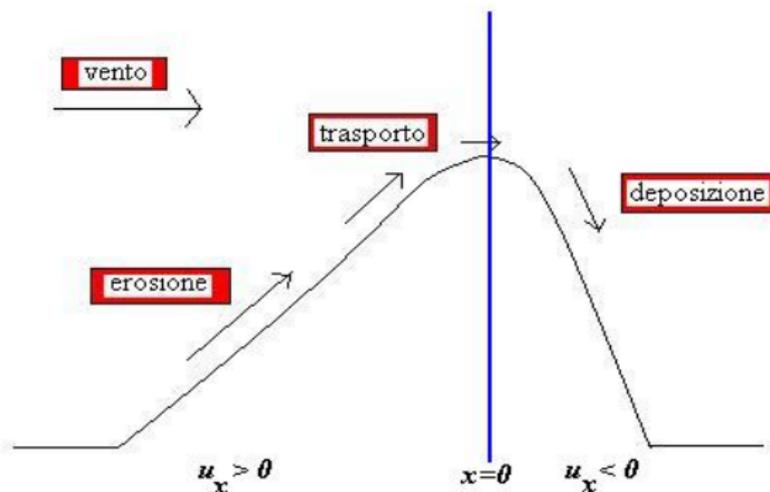
$$h(x) = \frac{H}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + 1 \right]$$

- Gaussian hill**

$$h(x) = H \exp\left\{-\left(\frac{x}{L}\right)^2 \ln(2)\right\}$$



Il modello di Hadeler-Kuttler: come avanza una duna



Un semplice modello 2D per le dune viaggianti

Consideriamo anche in questo caso il profilo della duna costituito dalla sovrapposizione di uno **strato a riposo** u e di uno **strato mobile** w trasportato dal vento. Ipotesi:

- vento orizzontale (da sinistra a destra) a velocità costante v
- una singola cresta viaggia a velocità c (da determinare) dipendente da v e da:
 - ▶ γ : velocità di trasporto dello strato mobile
 - ▶ ε : spessore di w rispetto a u
 - ▶ σ : tasso di erosione del versante controvento
 - ▶ δ : tasso di deposizione del versante protetto dal vento

Il sistema di equazioni è allora dato da [Haderler-Kuttler, 2003]:

$$(D) \begin{cases} u_t = \begin{cases} -\sigma u & \text{if } u_x > 0, \\ \delta w & \text{if } u_x < 0, \end{cases} \\ w_t + \gamma w_x = \begin{cases} \sigma u & \text{if } u_x > 0, \\ -\delta w & \text{if } u_x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Conservazione della massa

Il sistema (D) conserva la massa (il volume) totale della duna:

$$\frac{dM}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} (u + w)_t dx = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} w_x dx = 0 ,$$

poiché w va a zero a $\pm\infty$.

Se il modello viene ristretto ad un intervallo (a, b) limitato, la proprietà precedente diventa

$$\frac{dM}{dt} = -\gamma(w(b, t) - w(a, t)) ,$$

cioè la variazione di massa è data dalla differenza tra l'inflow in $x = a$ e l'outflow in $x = b$.

Una soluzione autosimilare per (D)

Il modello (D) possiede una soluzione autosimilare in $\mathbb{R} \times (0, T)$, che rappresenta la duna viaggiante a velocità costante c senza cambiare forma, cioè tale che $u(x, t) = U(x - ct)$, $w(x, t) = W(x - ct)$.

Se u_0 , w_0 indicano gli spessori degli strati in cresta ($x = 0$), allora :

$$\begin{cases} U(x) = \begin{cases} u_0 \exp(\lambda x) & \text{if } x < 0, \\ u_0 \exp(-\mu x) & \text{if } x > 0, \end{cases} \\ W(x) = \varepsilon U(x), \end{cases}$$

dove $\lambda = \frac{\sigma(1+\varepsilon)}{\varepsilon\gamma}$, $\mu = \frac{\delta(1+\varepsilon)}{\gamma}$, e, in accordo con i valori trovati da Bagnold,

$$c = \frac{\varepsilon\gamma}{1+\varepsilon} \simeq \frac{w_0\gamma}{u_0}$$

I parametri vivono a scale diverse

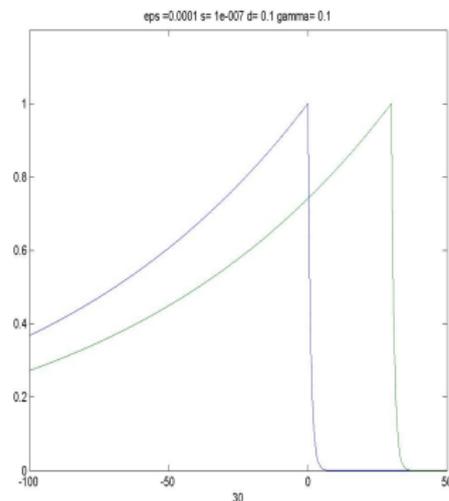
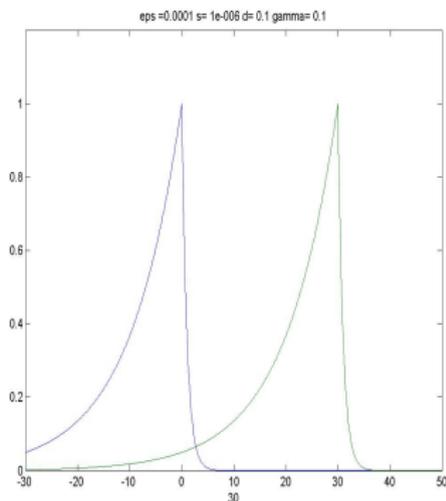
La taglia dei parametri è essenziale !

Per una simulazione realistica, ad esempio:

- $v = 1 \text{ m/sec}$
- $\gamma = 0.1 \text{ cm/sec}$
- $\varepsilon = 10^{-4} \text{ cm}$
- $c \cong \varepsilon\gamma = 10^{-5} \text{ cm/sec}$
- $\sigma < \varepsilon\delta \ (\Rightarrow \lambda < \mu)$

Ne segue che per una duna alta **10 metri** ci vogliono circa **55 ore** per uno spostamento di **2 cm.**, più di **11 giorni** per uno spostamento di **10 cm.** (sempre che il vento non smetta mai di soffiare, e nella stessa direzione !).

Esempi di dune viaggianti autosimilari per (D)



$$u_0 = 1, \varepsilon = 10^{-4}, \gamma = 0.1, \delta = 0.1, \sigma = 10^{-6}(\text{sx}), \sigma = 10^{-7}(\text{dx}), T = 3 \times 10^6.$$

Uno schema numerico per il modello HK

E' stato testato un semplice schema alle differenze finite per l'approssimazione di (D). Con ovvie notazioni:

$$\begin{cases} U_j^{n+1} = U_j^n + \Delta t(-\sigma D_j^n U_j^n + \delta(1 - D_j^n)W_j^n), \\ W_j^{n+1} = W_j^n - \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x}(W_j^n - W_{j-1}^n) + \Delta t(\sigma D_j^n U_j^n - \delta(1 - D_j^n)W_j^n), \\ U_j^0 = \bar{u}(x_j), W_j^0 = 0, \end{cases}$$

dove

$$D_j^n = \begin{cases} 1, & \text{se } U_j^n \geq U_{j-1}^n \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è la variabile che controlla se il nodo x_j è sul versante upwind o downwind della duna. Si suppone che $u(x, 0) = \bar{u}(x)$ e che $w(x, 0) = 0$ (il vento inizia a soffiare a $t = 0$).

Proprietà dello schema

- Lo schema è stabile se

$$\Delta t \leq \frac{2\Delta x}{2\gamma + \delta\Delta x}$$

stima più restrittiva della CFL, ma convergente ad essa per $\Delta x \rightarrow 0$
[Equivale a $\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 - \frac{\delta\Delta x}{2\gamma + \delta\Delta x}$].

Proprietà dello schema

- Lo schema è stabile se

$$\Delta t \leq \frac{2\Delta x}{2\gamma + \delta\Delta x}$$

stima più restrittiva della CFL, ma convergente ad essa per $\Delta x \rightarrow 0$
 [Equivale a $\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 - \frac{\delta\Delta x}{2\gamma + \delta\Delta x}$].

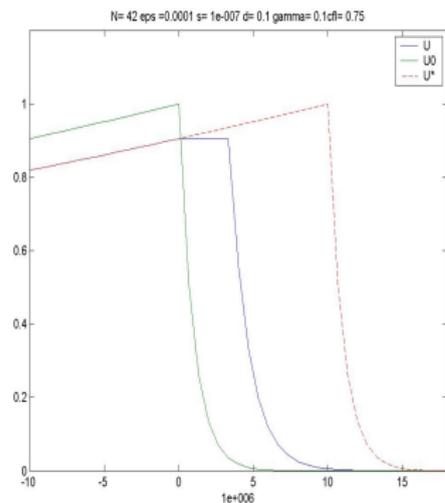
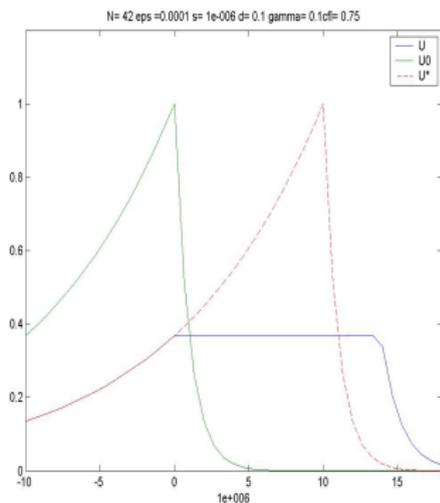
- Lo schema è conservativo. Per ogni n

$$\Delta x \sum_j (U_j^n + W_j^n) = \Delta x \sum_j (U_j^0 + W_j^0) - \gamma \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} (W_N^k - W_1^k)$$

cioè: massa finale = massa iniziale + \sum variazioni di flusso $\forall t^k$.

Test sulle dune viaggianti autosimilari

$$\bar{u}(x) = U(x), \bar{w}(x) = \varepsilon U(x)$$



$$\varepsilon = 10^{-4}, \quad \gamma = 0.1, \quad \delta = 0.1, \quad \sigma = 10^{-6}(\text{sx}), \quad \sigma = 10^{-7}(\text{dx}), \quad T = 10^6.$$

I risultati non sono soddisfacenti:

- 1 Lavorando su di un intervallo limitato, viene a mancare il movimento rigido corretto (si migliora spostando a sinistra l'estremo a).

I risultati non sono soddisfacenti:

- 1 Lavorando su di un intervallo limitato, viene a mancare il movimento rigido corretto (si migliora spostando a sinistra l'estremo a).
- 2 La soluzione numerica concorda perfettamente con quella esatta sul versante upwind fino ad $x = 0$ (posizione iniziale della cresta). Infatti se $x_j \leq 0$:

$$U_j^n = (1 - \sigma \Delta t) U_j^{n-1} = \dots = (1 - \sigma \Delta t)^n U_j^0 \simeq \simeq \exp(-\sigma n \Delta t) U_j^0 = u(x_j, t^n) .$$

I risultati non sono soddisfacenti:

- ① Lavorando su di un intervallo limitato, viene a mancare il movimento rigido corretto (si migliora spostando a sinistra l'estremo a).
- ② La soluzione numerica concorda perfettamente con quella esatta sul versante upwind fino ad $x = 0$ (posizione iniziale della cresta). Infatti se $x_j \leq 0$:

$$U_j^n = (1 - \sigma \Delta t) U_j^{n-1} = \dots = (1 - \sigma \Delta t)^n U_j^0 \simeq \simeq \exp(-\sigma n \Delta t) U_j^0 = u(x_j, t^n) .$$

- ③ Ma oltre $x = 0$ la cresta viene spianata ! Lo schema non riesce infatti a simulare il movimento corretto della cresta, perché questa è definita in modo implicito già nel modello continuo: $u(x, t) = u_0(x) \exp(-\sigma t)$ se $x < c(t)$, ma $c(t) = \operatorname{argmax}_x u(x, t)$!

Serve una formulazione diversa come problema di frontiera libera !

Un trucco

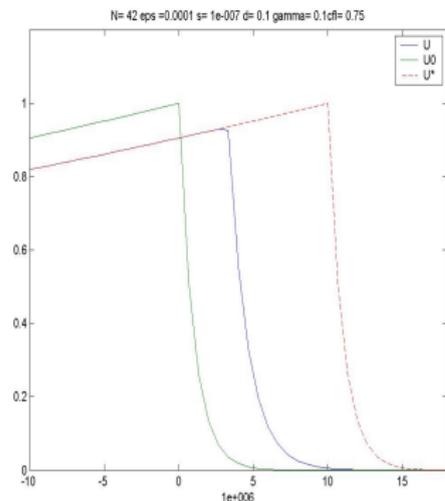
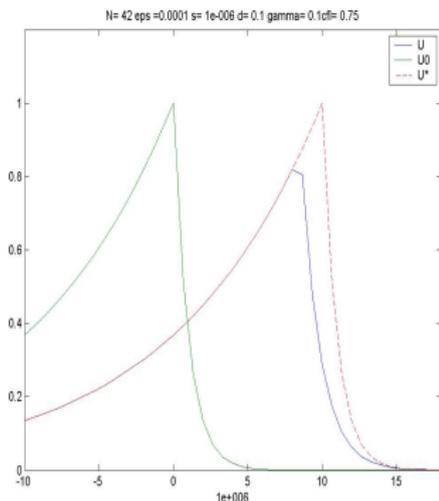
Uno stratagemma *ad hoc* per il test precedente è di calcolare ad ogni iterazione temporale la nuova posizione della cresta x_c^n (dove $(U_j^n + W_j^n)$ è massima) e di porre poi

$$U_j^{n+1} = \exp(\lambda x_j - \sigma t^n) \quad \forall x_j \leq x_c^n ;$$

in altre parole si impone la soluzione esatta sull'arco upwind approssimato. In questo modo per $a \rightarrow -\infty$ si ottengono soluzioni sempre più fedeli a quelle esatte (v. tabella seguente per $T = 2 \times 10^5$).

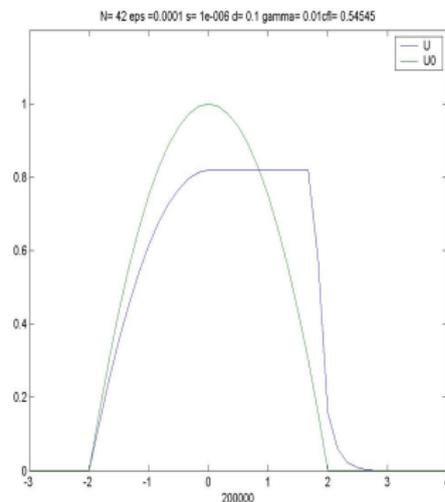
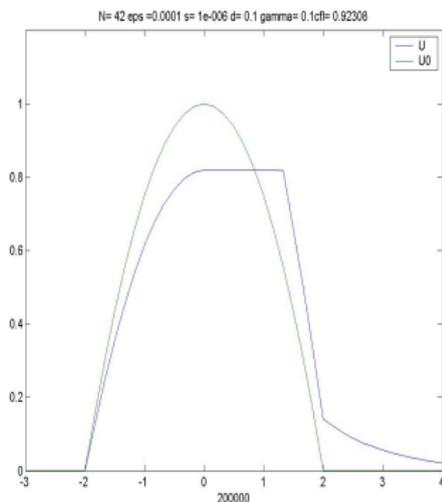
a	nodes	CFL	c_h	x_c	H_c
-6	168	0.96	$5 \cdot 10^{-6}$	1	0.904
-13	252	0.96	$7.5 \cdot 10^{-6}$	1.5	0.951
-20	336	0.96	$8.75 \cdot 10^{-6}$	1.75	0.975
-27	420	0.96	$9.16 \cdot 10^{-6}$	1.83	0.983
$-\infty$			$9.99 \cdot 10^{-6}$	2	1

Effetti della correzione



$$\varepsilon = 10^{-4}, \quad \gamma = 0.1, \quad \delta = 0.1, \quad \sigma = 10^{-6}(\text{sx}), \quad \sigma = 10^{-7}(\text{dx}), \quad T = 10^6.$$

Un altro test (duna iniziale parabolica)



$$\sigma = 10^{-6}, \delta = 0.1, \varepsilon = 10^{-4}, \gamma = 0.1(\text{sx}), \gamma = 0.01(\text{dx})$$

Il piede della duna non si sposta !

Verso un modello più realistico

Un'estensione del modello (D) che tenga conto anche dell'angolo di riposo nello spirito dei modelli BCRE (β costante positiva):

$$\left(\begin{array}{l} w_t + \gamma w_x = \sigma u \\ u_t = -\sigma u \end{array} \right) \quad \text{in } (-\infty, c(t))$$

$$\left(\begin{array}{l} w_t - (w u_x)_x = -(\beta(1 - |u_x|)) w \\ u_t = (\beta(1 - |u_x|)) w \end{array} \right) \quad \text{in } (c(t), +\infty)$$

$$(w + u)(c(t)^+) = (w + u)(c(t)^-)$$

dove $c(t)$ è la posizione al tempo t della cresta ($c(0) = 0$) da determinare.

- A destra della cresta il modello coincide con quello di HK per le pile di sabbia, senza termine di sorgente. Il ruolo di quest'ultima dovrebbe essere svolto dalla quantità $w(c(t))$ (la sabbia che traversa la cresta al tempo t). Oppure è necessario introdurre una funzione decrescente col ruolo della sabbia spinta dal vento oltre la cresta?

[Ricerche in corso con [M. Falcone](#) e [N. Igbida](#) (Univ. di Amiens)]

- A destra della cresta il modello coincide con quello di HK per le pile di sabbia, senza termine di sorgente. Il ruolo di quest'ultima dovrebbe essere svolto dalla quantità $w(c(t))$ (la sabbia che traversa la cresta al tempo t). Oppure è necessario introdurre una funzione decrescente col ruolo della sabbia spinta dal vento oltre la cresta?
- Raggiunta la pendenza critica ($u_x = -1$) si ha $u_t = 0$ e $w_t + w_x = 0$, cioè puro trasporto lineare dello strato mobile sopra uno strato rigido lineare mentre la cresta si sposta (effetto valanga).

[Ricerche in corso con [M. Falcone](#) e [N. Igbida](#) (Univ. di Amiens)]

- A destra della cresta il modello coincide con quello di HK per le pile di sabbia, senza termine di sorgente. Il ruolo di quest'ultima dovrebbe essere svolto dalla quantità $w(c(t))$ (la sabbia che traversa la cresta al tempo t). Oppure è necessario introdurre una funzione decrescente col ruolo della sabbia spinta dal vento oltre la cresta?
- Raggiunta la pendenza critica ($u_x = -1$) si ha $u_t = 0$ e $w_t + w_x = 0$, cioè puro trasporto lineare dello strato mobile sopra uno strato rigido lineare mentre la cresta si sposta (effetto valanga).
- E' ipotizzabile una duna viaggiante autosimilare in questo caso ?

[Ricerche in corso con [M. Falcone](#) e [N. Igbida](#) (Univ. di Amiens)]

- A destra della cresta il modello coincide con quello di HK per le pile di sabbia, senza termine di sorgente. Il ruolo di quest'ultima dovrebbe essere svolto dalla quantità $w(c(t))$ (la sabbia che traversa la cresta al tempo t). Oppure è necessario introdurre una funzione decrescente col ruolo della sabbia spinta dal vento oltre la cresta?
- Raggiunta la pendenza critica ($u_x = -1$) si ha $u_t = 0$ e $w_t + w_x = 0$, cioè puro trasporto lineare dello strato mobile sopra uno strato rigido lineare mentre la cresta si sposta (effetto valanga).
- E' ipotizzabile una duna viaggiante autosimilare in questo caso ?
- Sul versante upwind il modello genera solo profili convessi, mentre nella realtà avvicinandosi alla cresta la concavità cambia. Andrebbe cambiata la legge lineare per l'erosione $u_t = -\sigma u$ in una legge nonlineare $u_t = -\sigma(u)$. Lo stesso vale per gli altri parametri.

[Ricerche in corso con [M. Falcone](#) e [N. Igbida](#) (Univ. di Amiens)]

Conclusioni

- Al momento sembra mancare un modello chiuso (attraverso una singola equazione o un sistema di equazioni) relativamente semplice ma in grado di descrivere realisticamente la dinamica anche di una sola duna.
- Dovrebbe essere possibile modificare il modello HK in questa direzione, purché si riesca a definire in maniera implicita il movimento della cresta.
- Schemi numerici adeguati devono seguire queste modifiche modellistiche per validarle attraverso simulazioni convincenti.

"The answer, my friends, is blowing in the wind,"

FINE