

# Un modello di transizione di fase per le dislocazioni planari nei cristalli

Simone Cacace

Dipartimento di Matematica G.Castelnuovo  
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

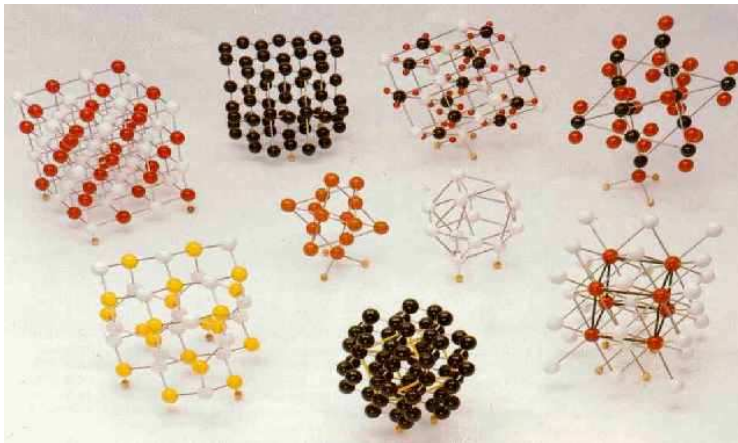
29 Gennaio 2008

- Dislocazioni nei Cristalli

- Dislocazioni nei Cristalli
- Il modello variazionale di Koslowski, Cuitiño e Ortiz

- Dislocazioni nei Cristalli
- Il modello variazionale di Koslowski, Cuitiño e Ortiz
- $\Gamma$ -convergenza del funzionale di energia

- Dislocazioni nei Cristalli
- Il modello variazionale di Koslowski, Cuitiño e Ortiz
- $\Gamma$ -convergenza del funzionale di energia
- Approssimazione Numerica

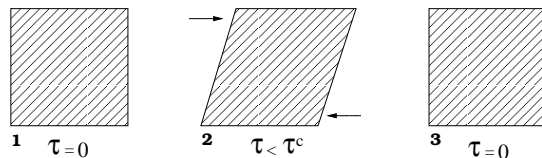


Materiali che presentano una struttura atomica estremamente ordinata  
(**reticolo cristallino**)

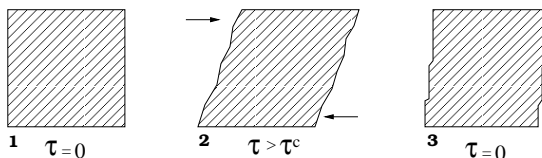
# Deformazioni elastiche e plastiche

Risposta di un materiale ad uno sforzo di taglio  $\tau$  applicato

## Comportamento Elastico



## Comportamento Plastico



$\tau^c =$  **tensione di snervamento** (caratteristica del materiale)

# Dislocazioni

**Difetti** del reticolo cristallino di carattere unidimensionale che **facilitano** lo scorrimento relativo degli atomi

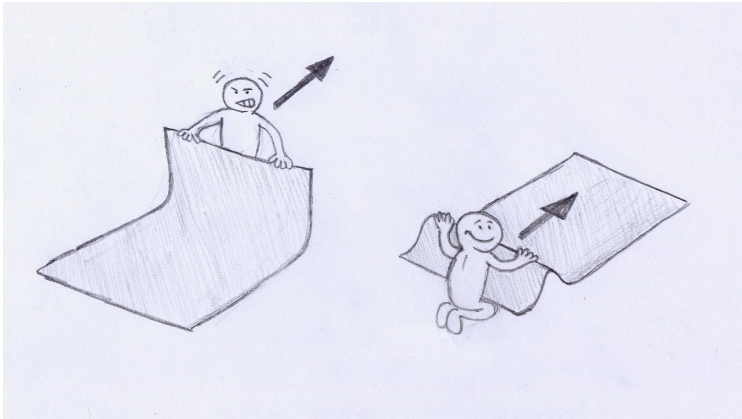
- Volterra (1905)
- Taylor, Orowan e Polyani (1934)



# Dislocazioni

**Difetti** del reticolo cristallino di carattere unidimensionale che **facilitano** lo scorrimento relativo degli atomi

- Volterra (1905)
- Taylor, Orowan e Polyani (1934)



# Slittamento cristallografico

In presenza di forze esterne la particolare geometria di un reticolo cristallino

# Slittamento cristallografico

In presenza di forze esterne la particolare geometria di un reticolo cristallino

- vincola le deformazioni plastiche del cristallo lungo dei piani preferenziali (**piani di slittamento**)

# Slittamento cristallografico

In presenza di forze esterne la particolare geometria di un reticolo cristallino

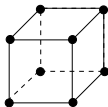
- vincola le deformazioni plastiche del cristallo lungo dei piani preferenziali (**piani di slittamento**)
- determina le direzioni lungo le quali è favorito lo scorrimento degli atomi (**sistemi di slittamento**)

# Slittamento cristallografico

In presenza di forze esterne la particolare geometria di un reticolo cristallino

- vincola le deformazioni plastiche del cristallo lungo dei piani preferenziali (**piani di slittamento**)
- determina le direzioni lungo le quali è favorito lo scorrimento degli atomi (**sistemi di slittamento**)

## Reticolo Cubico

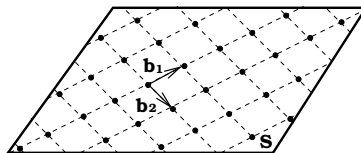
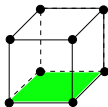


# Slittamento cristallografico

In presenza di forze esterne la particolare geometria di un reticolo cristallino

- vincola le deformazioni plastiche del cristallo lungo dei piani preferenziali (**piani di slittamento**)
- determina le direzioni lungo le quali è favorito lo scorrimento degli atomi (**sistemi di slittamento**)

## Reticolo Cubico

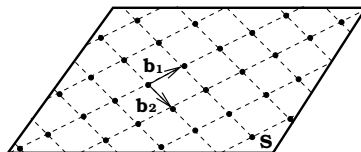
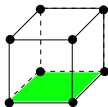


# Slittamento cristallografico

In presenza di forze esterne la particolare geometria di un reticolo cristallino

- vincola le deformazioni plastiche del cristallo lungo dei piani preferenziali (**piani di slittamento**)
- determina le direzioni lungo le quali è favorito lo scorrimento degli atomi (**sistemi di slittamento**)

## Reticolo Cubico



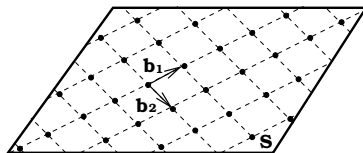
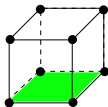
$$\text{slittamento} = u_1 \mathbf{b}_1 + u_2 \mathbf{b}_2 \quad u_1, u_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$$

# Slittamento cristallografico

In presenza di forze esterne la particolare geometria di un reticolo cristallino

- vincola le deformazioni plastiche del cristallo lungo dei piani preferenziali (**piani di slittamento**)
- determina le direzioni lungo le quali è favorito lo scorrimento degli atomi (**sistemi di slittamento**)

## Reticolo Cubico



$$\text{slittamento} = u_1 \mathbf{b}_1 + u_2 \mathbf{b}_2 \quad u_1, u_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$$

In generale lo slittamento degli atomi non è uniforme

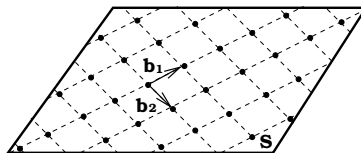
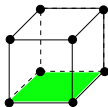


# Slittamento cristallografico

In presenza di forze esterne la particolare geometria di un reticolo cristallino

- vincola le deformazioni plastiche del cristallo lungo dei piani preferenziali (**piani di slittamento**)
- determina le direzioni lungo le quali è favorito lo scorrimento degli atomi (**sistemi di slittamento**)

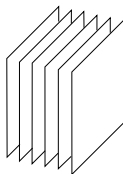
## Reticolo Cubico



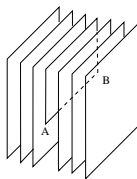
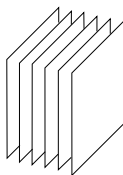
$$\text{slittamento} = u_1 \mathbf{b}_1 + u_2 \mathbf{b}_2 \quad u_1, u_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$$

In generale lo slittamento degli atomi non è uniforme  $\implies$  **Dislocazioni**

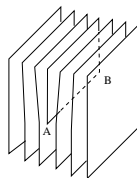
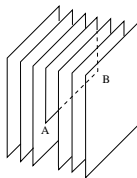
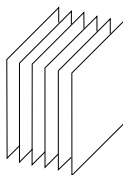
# Dislocazione a spigolo



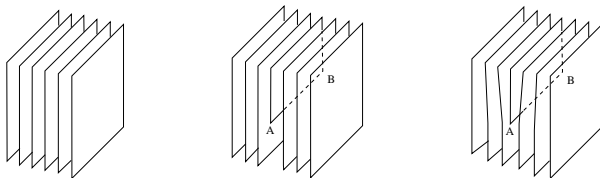
# Dislocazione a spigolo



# Dislocazione a spigolo

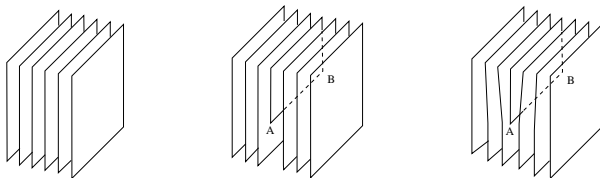


# Dislocazione a spigolo



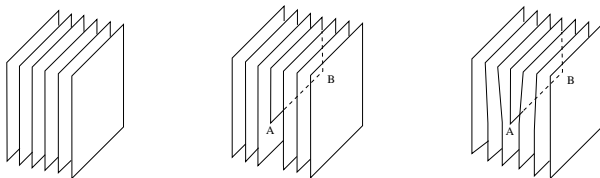
La zona deformata intorno alla linea  $AB$  è detta **core** della dislocazione

# Dislocazione a spigolo

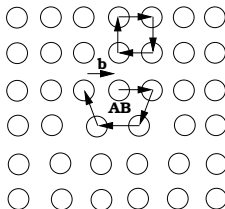


La zona deformata intorno alla linea  $AB$  è detta **core** della dislocazione  
Una dislocazione può essere definita tramite un **vettore di Burgers**

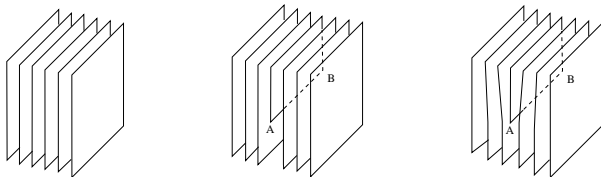
# Dislocazione a spigolo



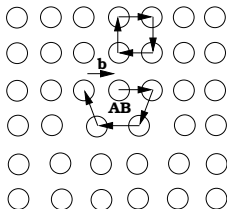
La zona deformata intorno alla linea  $AB$  è detta **core** della dislocazione  
Una dislocazione può essere definita tramite un **vettore di Burgers**



# Dislocazione a spigolo



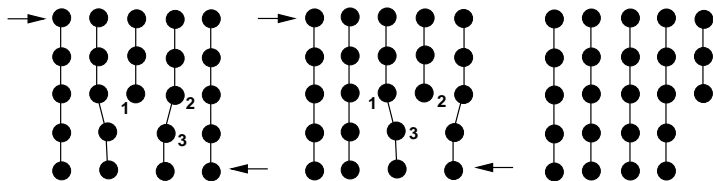
La zona deformata intorno alla linea  $AB$  è detta **core** della dislocazione  
Una dislocazione può essere definita tramite un **vettore di Burgers**



La dislocazione a spigolo è **ortogonale** al suo vettore di Burgers  **$\mathbf{b}$**



# Dislocazioni e Plasticità



# Il modello variazionale 2D di Koslowski, Cuitiño e Ortiz

Si considera un cristallo elastico, periodico e infinito che possiede

# Il modello variazionale 2D di Koslowski, Cuitiño e Ortiz

Si considera un cristallo elastico, periodico e infinito che possiede

- un singolo piano di slittamento  $S$  (su cui avviene la deformazione plastica)

# Il modello variazionale 2D di Koslowski, Cuitiño e Ortiz

Si considera un cristallo elastico, periodico e infinito che possiede

- un singolo piano di slittamento  $S$  (su cui avviene la deformazione plastica)
- $N$  sistemi di slittamento attivi su  $S$  (determinati dalla struttura cristallina)

# Il modello variazionale 2D di Koslowski, Cuitiño e Ortiz

Si considera un cristallo elastico, periodico e infinito che possiede

- un singolo piano di slittamento  $S$  (su cui avviene la deformazione plastica)
- $N$  sistemi di slittamento attivi su  $S$  (determinati dalla struttura cristallina)

$$\text{slittamento} = \sum_{i=1}^N u_i \mathbf{b}_i \quad u = (u_1, \dots, u_N) : S \rightarrow \mathbb{R}^N$$

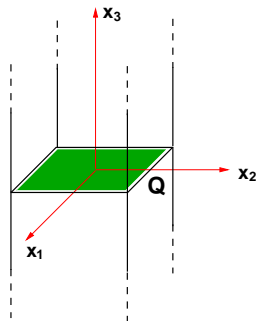
# Il modello variazionale 2D di Koslowski, Cuitiño e Ortiz

Si considera un cristallo elastico, periodico e infinito che possiede

- un singolo piano di slittamento  $S$  (su cui avviene la deformazione plastica)
- $N$  sistemi di slittamento attivi su  $S$  (determinati dalla struttura cristallina)

$$\text{slittamento} = \sum_{i=1}^N u_i \mathbf{b}_i \quad u = (u_1, \dots, u_N) : S \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Sistema di riferimento:



# Il modello variazionale 2D di Koslowski, Cuitiño e Ortiz

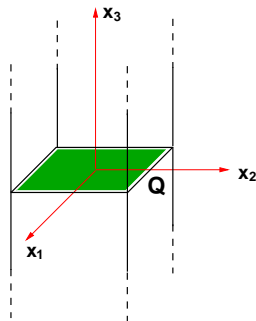
Si considera un cristallo elastico, periodico e infinito che possiede

- un singolo piano di slittamento  $S$  (su cui avviene la deformazione plastica)
- $N$  sistemi di slittamento attivi su  $S$  (determinati dalla struttura cristallina)

$$\text{slittamento} = \sum_{i=1}^N u_i \mathbf{b}_i \quad u = (u_1, \dots, u_N) : S \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Sistema di riferimento:

- Piano di slittamento  $\longrightarrow S = \{x_3 = 0\}$



# Il modello variazionale 2D di Koslowski, Cuitiño e Ortiz

Si considera un cristallo elastico, periodico e infinito che possiede

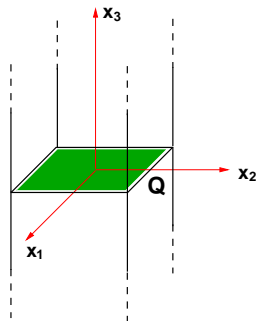
- un singolo piano di slittamento  $S$  (su cui avviene la deformazione plastica)
- $N$  sistemi di slittamento attivi su  $S$  (determinati dalla struttura cristallina)

$$\text{slittamento} = \sum_{i=1}^N u_i \mathbf{b}_i \quad u = (u_1, \dots, u_N) : S \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Sistema di riferimento:

- Piano di slittamento  $\longrightarrow S = \{x_3 = 0\}$
- Cella di periodicità  $\longrightarrow Q \times \mathbb{R}$

$$Q = (-1/2, 1/2)^2 \subset \mathbb{R}^2$$





# L'energia del cristallo

Si scrive in funzione dello slittamento  $u$  come somma di due contributi

$$E(u) = E^{elast.}(u) + E^{core}(u)$$

# L'energia del cristallo

Si scrive in funzione dello slittamento  $u$  come somma di due contributi

$$E(u) = E^{elast.}(u) + E^{core}(u)$$

- $E^{elast.}$ : energia elastica a lungo raggio indotta dallo slittamento

# L'energia del cristallo

Si scrive in funzione dello slittamento  $u$  come somma di due contributi

$$E(u) = E^{elast.}(u) + E^{core}(u)$$

- $E^{elast.}$ : energia elastica a lungo raggio indotta dallo slittamento
- $E^{core}$ : energia d'interazione a corto raggio che penalizza gli slittamenti non compatibili con il reticolo cristallino  
(misura le deformazioni del reticolo in corrispondenza dei **core** delle dislocazioni).

# Energia elastica a lungo raggio

$$E^{elast.}(u) = \int_Q \int_Q (u(x) - u(y))^T \mathbb{J}(x - y) (u(x) - u(y)) dx dy$$

# Energia elastica a lungo raggio

$$E^{elast.}(u) = \int_Q \int_Q (u(x) - u(y))^T \mathbb{J}(x - y)(u(x) - u(y)) dx dy$$

Il nucleo  $\mathbb{J}$  dipende dalla struttura cristallina e soddisfa le seguenti proprietà:

# Energia elastica a lungo raggio

$$E^{elast.}(u) = \int_Q \int_Q (u(x) - u(y))^T \mathbb{J}(x - y)(u(x) - u(y)) dx dy$$

Il nucleo  $\mathbb{J}$  dipende dalla struttura cristallina e soddisfa le seguenti proprietà:

- $\mathbb{J}(t) \in \mathbb{M}^{N \times N}$

$$E^{elast.}(u) = \int_Q \int_Q (u(x) - u(y))^T \mathbb{J}(x - y)(u(x) - u(y)) dx dy$$

Il nucleo  $\mathbb{J}$  dipende dalla struttura cristallina e soddisfa le seguenti proprietà:

- $\mathbb{J}(t) \in \mathbb{M}^{N \times N}$
- $\mathbb{J}$  definisce una forma quadratica positiva equivalente al quadrato della seminorma  $H^{\frac{1}{2}}$ :

$$\frac{c_1}{|t|^3} |\xi|^2 \leq \xi^T \mathbb{J}(t) \xi \leq \frac{c_2}{|t|^3} |\xi|^2$$

# Energia dei *Core* delle dislocazioni

Descritta da un potenziale quadratico a tratti che misura la distorsione del reticolo cristallino indotta dagli slittamenti  $u \notin \mathbb{Z}^N$ .



# Energia dei *Core* delle dislocazioni

Descritta da un potenziale quadratico a tratti che misura la distorsione del reticolo cristallino indotta dagli slittamenti  $u \notin \mathbb{Z}^N$ .

$$E^{core}(u) = \frac{1}{\varepsilon} \int_Q \text{dist}^2(u(x), \mathbb{Z}^N) dx$$

# Energia dei *Core* delle dislocazioni

Descritta da un potenziale quadratico a tratti che misura la distorsione del reticolo cristallino indotta dagli slittamenti  $u \notin \mathbb{Z}^N$ .

$$E^{core}(u) = \frac{1}{\varepsilon} \int_Q \text{dist}^2(u(x), \mathbb{Z}^N) dx$$

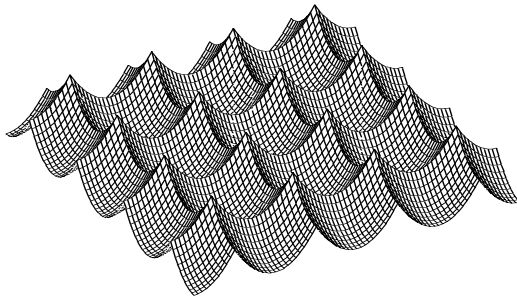
$\varepsilon \sim$  distanza tra gli atomi del cristallo

# Energia dei *Core* delle dislocazioni

Descritta da un potenziale quadratico a tratti che misura la distorsione del reticolo cristallino indotta dagli slittamenti  $u \notin \mathbb{Z}^N$ .

$$E^{core}(u) = \frac{1}{\varepsilon} \int_Q \text{dist}^2(u(x), \mathbb{Z}^N) dx$$

$\varepsilon \sim$  distanza tra gli atomi del cristallo



$$\text{dist}^2(u(x), \mathbb{Z}^N) = \min_{\xi(x) \in \mathbb{Z}^N} |u(x) - \xi(x)|^2$$

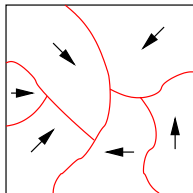
$$\text{dist}^2(u(x), \mathbb{Z}^N) = \min_{\xi(x) \in \mathbb{Z}^N} |u(x) - \xi(x)|^2$$

campo di fase  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) : S \rightarrow \mathbb{Z}^N$

$$\text{dist}^2(u(x), \mathbb{Z}^N) = \min_{\xi(x) \in \mathbb{Z}^N} |u(x) - \xi(x)|^2$$

**campo di fase**  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) : S \rightarrow \mathbb{Z}^N$

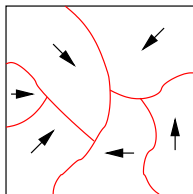
Le dislocazioni sono identificate con le discontinuità **di salto** di  $\xi$



$$\text{dist}^2(u(x), \mathbb{Z}^N) = \min_{\xi(x) \in \mathbb{Z}^N} |u(x) - \xi(x)|^2$$

**campo di fase**  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) : S \rightarrow \mathbb{Z}^N$

Le dislocazioni sono identificate con le discontinuità **di salto** di  $\xi$



**slittamento cristallografico**  $\iff$  **transizione di fase**

# Il funzionale di energia

$$E_\varepsilon(u) = \int_Q \int_Q (u(x) - u(y))^T \mathbb{J}(x - y) (u(x) - u(y)) \, dx \, dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_Q \text{dist}^2(u, \mathbb{Z}^N) \, dx$$



# Il funzionale di energia

$$E_\varepsilon(u) = \int_Q \int_Q (u(x) - u(y))^T \mathbb{J}(x - y) (u(x) - u(y)) \, dx \, dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_Q \text{dist}^2(u, \mathbb{Z}^N) \, dx$$

Funzionale con potenziale a **buche multiple** perturbato da un termine **non locale, singolare e anisotropo**

# Il funzionale di energia

$$E_\varepsilon(u) = \int_Q \int_Q (u(x) - u(y))^T \mathbb{J}(x - y) (u(x) - u(y)) dx dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_Q \text{dist}^2(u, \mathbb{Z}^N) dx$$

Funzionale con potenziale a **buche multiple** perturbato da un termine **non locale, singolare e anisotropo**

Alcuni riferimenti

- **Perturbazione locale** (integrale di Dirichlet)

Modica-Mortola, Modica, Sternberg

# Il funzionale di energia

$$E_\varepsilon(u) = \int_Q \int_Q (u(x) - u(y))^T \mathbb{J}(x-y)(u(x) - u(y)) dx dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_Q \text{dist}^2(u, \mathbb{Z}^N) dx$$

Funzionale con potenziale a **buche multiple** perturbato da un termine **non locale, singolare e anisotropo**

Alcuni riferimenti

- **Perturbazione locale** (integrale di Dirichlet)

Modica-Mortola, Modica, Sternberg

- **Perturbazione non locale regolare**

Alberti-Bellettini, Alberti-Bellettini-Cassandro-Presutti

# Il funzionale di energia

$$E_\varepsilon(u) = \int_Q \int_Q (u(x) - u(y))^T \mathbb{J}(x-y)(u(x) - u(y)) dx dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_Q \text{dist}^2(u, \mathbb{Z}^N) dx$$

Funzionale con potenziale a **buche multiple** perturbato da un termine **non locale, singolare** e **anisotropo**

Alcuni riferimenti

- **Perturbazione locale** (integrale di Dirichlet)  
Modica-Mortola, Modica, Sternberg
- **Perturbazione non locale regolare**  
Alberti-Bellettini, Alberti-Bellettini-Cassandro-Presutti
- **Perturbazione non locale singolare**  
Alberti-Bouchitté-Seppecher, Kurzke, Garroni-Müller

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $F_\varepsilon, F : X \rightarrow [0, +\infty]$ .

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $F_\varepsilon, F : X \rightarrow [0, +\infty]$ .

$F_\varepsilon$   $\Gamma(d)$ -converge a  $F$  se

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $F_\varepsilon, F : X \rightarrow [0, +\infty]$ .

$F_\varepsilon$   $\Gamma(d)$ -converge a  $F$  se

- Per ogni  $u \in X$  e per ogni successione  $\{u_\varepsilon\} \subseteq X$  tale che  $u_\varepsilon \xrightarrow{d} u$  risulta

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(u).$$

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $F_\varepsilon, F : X \rightarrow [0, +\infty]$ .

$F_\varepsilon$   $\Gamma(d)$ -converge a  $F$  se

- Per ogni  $u \in X$  e per ogni successione  $\{u_\varepsilon\} \subseteq X$  tale che  $u_\varepsilon \xrightarrow{d} u$  risulta

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(u).$$

- Per ogni  $u \in X$  esiste  $\{u_\varepsilon\} \subseteq X$  tale che  $u_\varepsilon \xrightarrow{d} u$  e risulta

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = F(u).$$

$u_\varepsilon$  è detta **successione ottimale**



La nozione di  $\Gamma$ -convergenza gode delle seguenti proprietà:

La nozione di  $\Gamma$ -convergenza gode delle seguenti proprietà:

- **Semicontinuità inferiore:**  
ogni  $\Gamma(d)$ -limite risulta essere sempre semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia generata dalla metrica  $d$ .

La nozione di  $\Gamma$ -convergenza gode delle seguenti proprietà:

- **Semicontinuità inferiore:**  
ogni  $\Gamma(d)$ -limite risulta essere sempre semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia generata dalla metrica  $d$ .
- **Stabilità rispetto alle perturbazioni continue:**  
se  $F_\varepsilon$   $\Gamma(d)$ -converge ad  $F$  e  $G$  è un funzionale  $d$ -continuo, allora  $F_\varepsilon + G$   $\Gamma(d)$ -converge ad  $F + G$ .

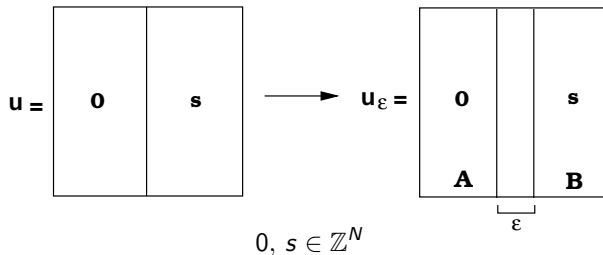
La nozione di  $\Gamma$ -convergenza gode delle seguenti proprietà:

- **Semicontinuità inferiore:**  
ogni  $\Gamma(d)$ -limite risulta essere sempre semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia generata dalla metrica  $d$ .
- **Stabilità rispetto alle perturbazioni continue:**  
se  $F_\varepsilon$   $\Gamma(d)$ -converge ad  $F$  e  $G$  è un funzionale  $d$ -continuo, allora  $F_\varepsilon + G$   $\Gamma(d)$ -converge ad  $F + G$ .
- **Stabilità dei punti di minimo e dei valori minimi:**  
se  $F_\varepsilon$   $\Gamma(d)$ -converge ad  $F$  e  $\{u_\varepsilon\}$  è una successione che minimizza  $F_\varepsilon$  su  $X$ , tale che  $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$ , allora  $u$  minimizza  $F$  su  $X$  e risulta

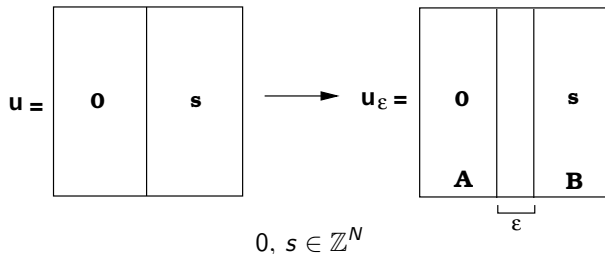
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \min_{v \in X} F_\varepsilon(v) = \min_{v \in X} F(v) = F(u).$$

Quanto "costa" una transizione di fase?

Quanto "costa" una transizione di fase?



Quanto "costa" una transizione di fase?



$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \sim C \int_Q \int_Q \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|^2}{|x - y|^3} dx dy + \text{t.o.i.}$$
$$= C \int_A \int_B \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|^2}{|x - y|^3} dx dy + \text{t.o.i.} = C |\log \varepsilon| + \text{t.o.i.}$$

# $\Gamma$ -convergenza del funzionale di energia

$$F_\varepsilon(u) = \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int_Q \int_Q (u(x) - u(y))^T \mathbb{J}(x-y)(u(x) - u(y)) \, dx \, dy + \frac{1}{\varepsilon |\log \varepsilon|} \int_Q \text{dist}^2(u, \mathbb{Z}^N) \, dx$$



# $\Gamma$ -convergenza del funzionale di energia

$$F_\varepsilon(u) = \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int_Q \int_Q (u(x) - u(y))^T \mathbb{J}(x-y)(u(x) - u(y)) \, dx \, dy + \frac{1}{\varepsilon |\log \varepsilon|} \int_Q \text{dist}^2(u, \mathbb{Z}^N) \, dx$$

## Teorema (C.-Garroni)

### Compattezza

Se  $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq M$ , allora  $\exists a_\varepsilon \in \mathbb{Z}^N$  e  $u \in BV(Q, \mathbb{Z}^N)$  tali che (a meno di sottosuccessioni)

$$u_\varepsilon - a_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{in } L^1(Q)$$

### $\Gamma$ -convergenza

$\exists$  una sottosuccessione  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  ed una funzione  $\varphi : \mathbb{Z}^N \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$F_{\varepsilon_k}(u) \quad \Gamma(L^1)\text{-converge a} \quad F(u) = \int_{S_u} \varphi([u], n_u) \, d\mathcal{H}^1$$

$S_u$  = insieme dei salti di  $u$        $[u]$  = salto di  $u$        $n_u$  = versore normale su  $S_u$

# Problemi dell'approccio astratto

# Problemi dell'approccio astratto

- Il funzionale  $F$  dipende dalla sottosuccessione  $\varepsilon_k$  estratta

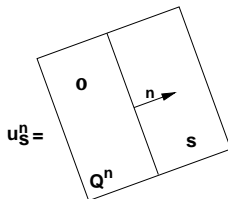
# Problemi dell'approccio astratto

- Il funzionale  $F$  dipende dalla sottosuccessione  $\varepsilon_k$  estratta
- $\varphi(s, n) = ?$

# Problemi dell'approccio astratto

- Il funzionale  $F$  dipende dalla sottosuccessione  $\varepsilon_k$  estratta
- $\varphi(s, n) = ?$

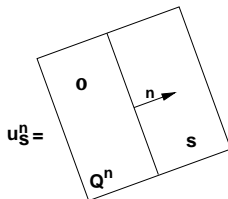
$$\forall (s, n) \in \mathbb{Z}^N \times S^1 \quad \varphi(s, n) = F(u_s^n, Q^n) \quad u_s^n(x) = s \chi_{\{x \cdot n > 0\}}$$



# Problemi dell'approccio astratto

- Il funzionale  $F$  dipende dalla sottosuccessione  $\varepsilon_k$  estratta
- $\varphi(s, n) = ?$

$$\forall (s, n) \in \mathbb{Z}^N \times S^1 \quad \varphi(s, n) = F(u_s^n, Q^n) \quad u_s^n(x) = s \chi_{\{x \cdot n > 0\}}$$



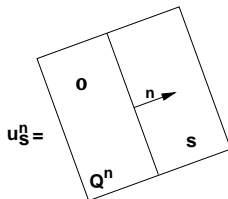
Non conosciamo le successioni ottimali:

$$u_\varepsilon \rightarrow u_s^n \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon, Q^n) = F(u_s^n, Q^n)$$

# Problemi dell'approccio astratto

- Il funzionale  $F$  dipende dalla sottosuccessione  $\varepsilon_k$  estratta
- $\varphi(s, n) = ?$

$$\forall (s, n) \in \mathbb{Z}^N \times S^1 \quad \varphi(s, n) = F(u_s^n, Q^n) \quad u_s^n(x) = s \chi_{\{x \cdot n > 0\}}$$



Non conosciamo le successioni ottimali:

$$u_\varepsilon \rightarrow u_s^n \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon, Q^n) = F(u_s^n, Q^n)$$

Completamente risolto in un caso scalare (Garroni-Müller)

# Un Caso Scalare

Un solo sistema di slittamento attivo

$$\text{slittamento} = u\mathbf{b}$$

dove  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$  è scalare e  $\mathbf{b}$  è un vettore di Burgers assegnato.



# Un Caso Scalare

Un solo sistema di slittamento attivo

$$\text{slittamento} = u\mathbf{b}$$

dove  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$  è scalare e  $\mathbf{b}$  è un vettore di Burgers assegnato.

Il funzionale si riduce a

$$F_\varepsilon(u, Q) = \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int_Q \int_Q J(x-y) |u(x) - u(y)|^2 dx dy + \frac{1}{\varepsilon |\log \varepsilon|} \int_Q \text{dist}^2(u, \mathbb{Z}) dx$$

# Un Caso Scalare

Un solo sistema di slittamento attivo

slittamento =  $u\mathbf{b}$

dove  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$  è scalare e  $\mathbf{b}$  è un vettore di Burgers assegnato.

Il funzionale si riduce a

$$F_\varepsilon(u, Q) = \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int_Q \int_Q J(x-y) |u(x) - u(y)|^2 dx dy + \frac{1}{\varepsilon |\log \varepsilon|} \int_Q \text{dist}^2(u, \mathbb{Z}) dx$$

Teorema (Garroni-Müller)

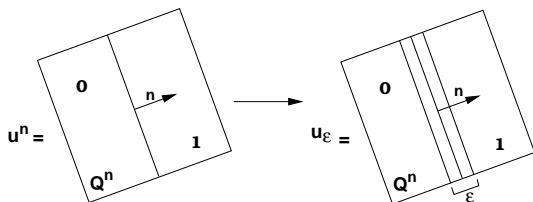
$$F_\varepsilon(u, Q) \Gamma(L^1)\text{-converge a } F(u, Q) = \int_{S_u \cap Q} \gamma(n_u) |[u]| \mathcal{H}^1$$

dove

$$\gamma(n) = 2 \int_{x \cdot n = 1} J(x) dx$$

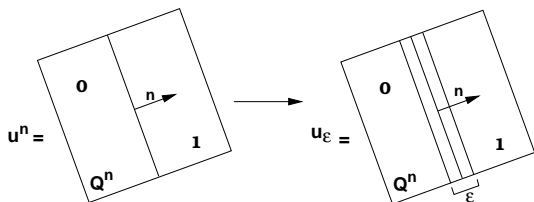
# Un Caso Scalare

**Successione ottimale:** è sufficiente considerare una qualunque mollificazione di  $u^n = \chi_{\{x \cdot n > 0\}}$ , i.e.  $u_\varepsilon = u^n * \phi_\varepsilon$



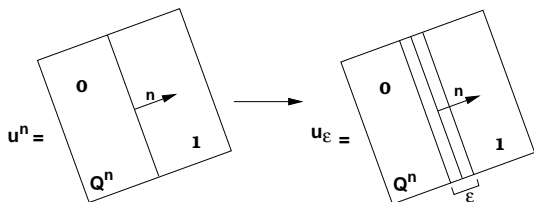
# Un Caso Scalare

**Successione ottimale:** è sufficiente considerare una qualunque mollificazione di  $u^n = \chi_{\{x \cdot n > 0\}}$ , i.e.  $u_\varepsilon = u^n * \phi_\varepsilon$



$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon, Q^n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int_{Q^n} \int_{Q^n} J(x-y) |u(x) - u(y)|^2 dx dy = \gamma(n) = F(u^n, Q^n)$$

**Successione ottimale:** è sufficiente considerare una qualunque mollificazione di  $u^n = \chi_{\{x \cdot n > 0\}}$ , i.e.  $u_\varepsilon = u^n * \phi_\varepsilon$



$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon, Q^n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int_{Q^n} \int_{Q^n} J(x-y) |u(x) - u(y)|^2 dx dy = \gamma(n) = F(u^n, Q^n)$$

- "profilo unidimensionale"

# Un Caso Vettoriale: il reticolo cubico

Due sistemi di slittamento attivi

$$\text{slittamento} = u_1 \mathbf{b}_1 + u_2 \mathbf{b}_2$$

dove  $u = (u_1, u_2) : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  sono due vettori di Burgers paralleli ai versori della base canonica di  $\mathbb{R}^2$ .

# Un Caso Vettoriale: il reticolo cubico

Due sistemi di slittamento attivi

$$\text{slittamento} = u_1 \mathbf{b}_1 + u_2 \mathbf{b}_2$$

dove  $u = (u_1, u_2) : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  sono due vettori di Burgers paralleli ai versori della base canonica di  $\mathbb{R}^2$ .

Il funzionale si riduce a

$$F_\varepsilon(u, Q) = \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int_Q \int_Q (u(x) - u(y))^T \mathbb{J}(x-y) (u(x) - u(y)) \, dx \, dy + \frac{1}{\varepsilon |\log \varepsilon|} \int_Q \text{dist}^2(u, \mathbb{Z}^2) \, dx$$

# Un Caso Vettoriale: il reticolo cubico

Due sistemi di slittamento attivi

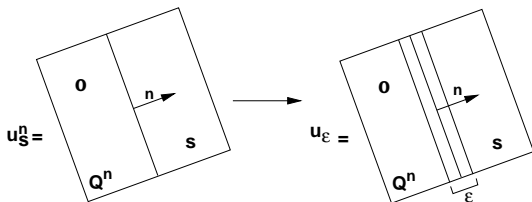
$$\text{slittamento} = u_1 \mathbf{b}_1 + u_2 \mathbf{b}_2$$

dove  $u = (u_1, u_2) : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  sono due vettori di Burgers paralleli ai versori della base canonica di  $\mathbb{R}^2$ .

Il funzionale si riduce a

$$F_\varepsilon(u, Q) = \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int_Q \int_Q (u(x) - u(y))^T \mathbb{J}(x-y) (u(x) - u(y)) dx dy + \frac{1}{\varepsilon |\log \varepsilon|} \int_Q \text{dist}^2(u, \mathbb{Z}^2) dx$$

Strategia del caso scalare:  $u_s^n = s \chi_{\{x \cdot n > 0\}}$  con  $s \in \mathbb{Z}^2$ ,  $n \in S^1$  e  $u_\varepsilon = u_s^n * \phi_\varepsilon$



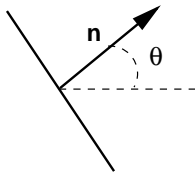


# Un Caso Vettoriale: il reticolo cubico

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon, Q^n) = s^T \gamma(n) s =: F_{flat}(u_s^n, Q^n)$$

# Un Caso Vettoriale: il reticolo cubico

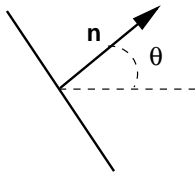
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon, Q^n) = s^T \gamma(n) s =: F_{flat}(u_s^n, Q^n)$$



$$\gamma(n) = 2 \int_{x \cdot n = 1} \mathbb{J}(x) dx = \gamma(\theta) = C \begin{pmatrix} 2(1 - \frac{1}{2}) \sin^2 \theta & \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta & 2(1 - \frac{1}{2}) \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

# Un Caso Vettoriale: il reticolo cubico

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon, Q^n) = s^T \gamma(n) s =: F_{flat}(u_s^n, Q^n)$$



$$\gamma(n) = 2 \int_{x \cdot n = 1} \mathbb{J}(x) dx = \gamma(\theta) = C \begin{pmatrix} 2(1 - \frac{1}{2}) \sin^2 \theta & \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta & 2(1 - \frac{1}{2}) \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

$\gamma(n)$  è definita positiva, ma la diagonale secondaria può cambiare segno

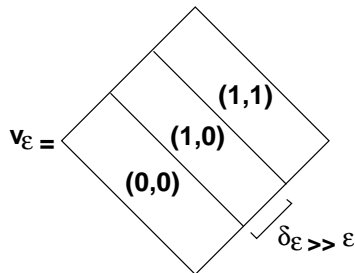
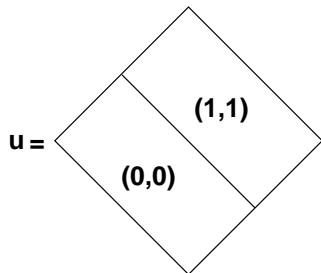
# Un Caso Vettoriale: il reticolo cubico

In alcune direzioni è più conveniente **separare** i salti:

# Un Caso Vettoriale: il reticolo cubico

In alcune direzioni è più conveniente **separare** i salti:

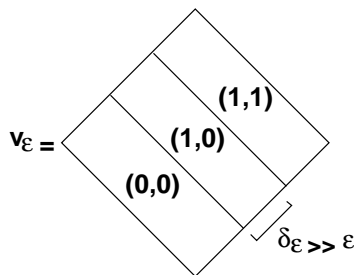
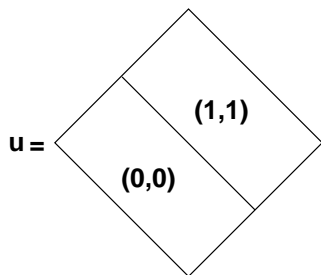
$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad s = (1,1)$$



# Un Caso Vettoriale: il reticolo cubico

In alcune direzioni è più conveniente **separare** i salti:

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad s = (1, 1)$$



$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u * \phi_\varepsilon, Q^n) = \gamma_{11}(\theta) + \gamma_{22}(\theta) + 2\gamma_{12}(\theta) > \gamma_{11}(\theta) + \gamma_{22}(\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon * \phi_\varepsilon, Q^n)$$

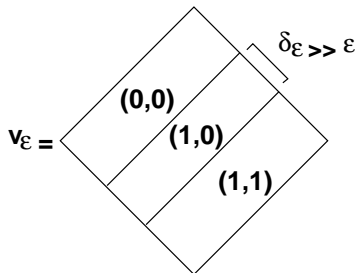
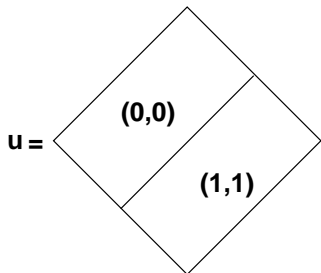
# Un Caso Vettoriale: il reticolo cubico

In alcune direzioni è più conveniente **concentrare** i salti:

# Un Caso Vettoriale: il reticolo cubico

In alcune direzioni è più conveniente **concentrare** i salti:

$$\theta = -\frac{\pi}{4}, \quad s = (1, 1)$$

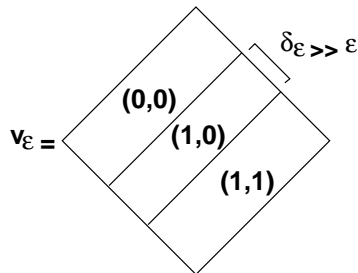
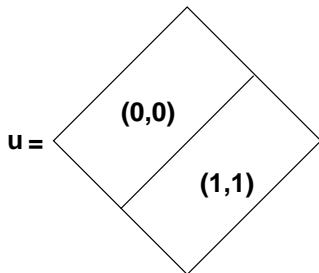




# Un Caso Vettoriale: il reticolo cubico

In alcune direzioni è più conveniente **concentrare** i salti:

$$\theta = -\frac{\pi}{4}, \quad s = (1, 1)$$



$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u * \phi_\varepsilon, Q^n) = \gamma_{11}(\theta) + \gamma_{22}(\theta) + 2\gamma_{12}(\theta) < \gamma_{11}(\theta) + \gamma_{22}(\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_\varepsilon * \phi_\varepsilon, Q^n)$$

# Un Caso Vettoriale: non ottimalità del profilo 1D

$$u_0 = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \mathbf{(0,0)} & \mathbf{(1,1)} \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

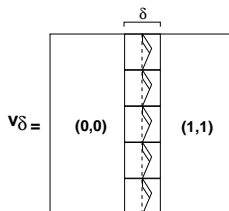
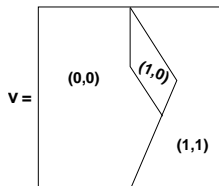
$$F_{flat}(u_0, Q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_0 * \phi_\varepsilon, Q) = \gamma_{11}(\mathbf{e}_1) + \gamma_{22}(\mathbf{e}_1)$$

# Un Caso Vettoriale: non ottimalità del profilo 1D

$$u_0 = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline (0,0) & (1,1) \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

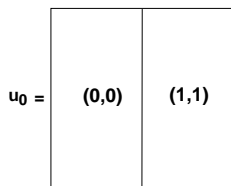
$$F_{flat}(u_0, Q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_0 * \phi_\varepsilon, Q) = \gamma_{11}(\mathbf{e}_1) + \gamma_{22}(\mathbf{e}_1)$$

Consideriamo



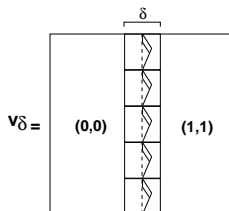
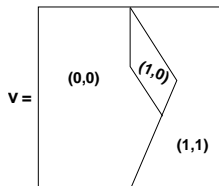
$$\lim_{\delta \rightarrow 0} v_\delta = u_0$$

# Un Caso Vettoriale: non ottimalità del profilo 1D



$$F_{flat}(u_0, Q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_0 * \phi_\varepsilon, Q) = \gamma_{11}(\mathbf{e}_1) + \gamma_{22}(\mathbf{e}_1)$$

Consideriamo



$$\lim_{\delta \rightarrow 0} v_\delta = u_0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(v_{\delta_\varepsilon} * \phi_\varepsilon, Q) < F_{flat}(u_0, Q)$$

Problema modello: funzionale 1D, scalare con potenziale a doppio pozzo  
(Alberti-Bouchitté-Seppecher)

Problema modello: funzionale 1D, scalare con potenziale a doppio pozzo  
(Alberti-Bouchitté-Seppecher)

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \frac{1}{|\log \varepsilon|} \left( \int_I \int_I \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2} dx dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_I W(u) dx \right) & \text{se } u \in H^{\frac{1}{2}}(I) \\ +\infty & \text{altrimenti in } L^1(I) \end{cases}$$

con  $I = (0, 1)$ ,  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $W : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $\{W = 0\} = \{0, 1\}$

Problema modello: funzionale 1D, scalare con potenziale a doppio pozzo (Alberti-Bouchitté-Seppecher)

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \frac{1}{|\log \varepsilon|} \left( \int_I \int_I \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2} dx dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_I W(u) dx \right) & \text{se } u \in H^{\frac{1}{2}}(I) \\ +\infty & \text{altrimenti in } L^1(I) \end{cases}$$

con  $I = (0, 1)$ ,  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $W : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $\{W = 0\} = \{0, 1\}$

$F_\varepsilon$   $\Gamma(L^1)$ -converge a

$$F(u) = \begin{cases} 2\mathcal{H}^0(Su) & \text{se } u \in BV(I, \{0, 1\}) \\ +\infty & \text{altrimenti in } L^1(I). \end{cases}$$

Per ogni  $g \in L^\infty(I)$  definiamo  $G : L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$  ponendo

$$G(u) = \int_I |u(x) - g(x)| dx.$$



Per ogni  $g \in L^\infty(I)$  definiamo  $G : L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$  ponendo

$$G(u) = \int_I |u(x) - g(x)| dx.$$

Dalle proprietà di stabilità della  $\Gamma$ -convergenza segue che

$$F_\varepsilon(u) + G(u) \xrightarrow{\Gamma(L^1)} F(u) + G(u)$$

e

$$\min_{u \in L^1(I)} \left( F_\varepsilon(u) + G(u) \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \min_{u \in L^1(I)} \left( F(u) + G(u) \right).$$

# Approssimazione Numerica

Per ogni  $h > 0$  indichiamo con  $\mathbb{I}_h$  la partizione uniforme di  $I = (0, 1)$  in sottointervalli di ampiezza  $h$  e consideriamo lo spazio degli elementi finiti lineari

$$V_h(I) = \{u : I \rightarrow \mathbb{R} : u \in C(\bar{I}), u|_{\mathbb{I}} \in \mathbb{P}_1(\mathbb{I}) \quad \forall \mathbb{I} \in \mathbb{I}_h\}.$$

# Approssimazione Numerica

Per ogni  $h > 0$  indichiamo con  $\mathbb{I}_h$  la partizione uniforme di  $I = (0, 1)$  in sottointervalli di ampiezza  $h$  e consideriamo lo spazio degli elementi finiti lineari

$$V_h(I) = \{ u : I \rightarrow \mathbb{R} : u \in C(\bar{I}), u|_{\mathbb{I}} \in \mathbb{P}_1(\mathbb{I}) \quad \forall \mathbb{I} \in \mathbb{I}_h \}.$$

Definiamo

$$F_{\varepsilon, h}(u) = \begin{cases} \frac{1}{|\log \varepsilon|} \left( \int_I \int_I \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_I W(u) dx \right) & \text{se } u \in V_h(I) \\ +\infty & \text{altrimenti in } L^1(I) \end{cases}$$

# Approssimazione Numerica

Per ogni  $h > 0$  indichiamo con  $\mathbb{I}_h$  la partizione uniforme di  $I = (0, 1)$  in sottointervalli di ampiezza  $h$  e consideriamo lo spazio degli elementi finiti lineari

$$V_h(I) = \{u : I \rightarrow \mathbb{R} : u \in C(\bar{I}), u|_{\mathbb{I}} \in \mathbb{P}_1(\mathbb{I}) \quad \forall \mathbb{I} \in \mathbb{I}_h\}.$$

Definiamo

$$F_{\varepsilon, h}(u) = \begin{cases} \frac{1}{|\log \varepsilon|} \left( \int_I \int_I \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_I W(u) dx \right) & \text{se } u \in V_h(I) \\ +\infty & \text{altrimenti in } L^1(I) \end{cases}$$

- Se  $h = h(\varepsilon)$  tale che  $h \rightarrow 0$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , sotto quale condizione si ha

$$F_{\varepsilon, h(\varepsilon)}(u) \xrightarrow{\Gamma(L^1)} F(u) ?$$

# Approssimazione Numerica

Per ogni  $g \in L^\infty(I)$  sia  $g_\varepsilon \in C_0^\infty(I)$  tale che

$$g_\varepsilon \rightarrow g \text{ in } L^1(I), \quad \|g_\varepsilon\|_\infty \leq \|g\|_\infty, \quad \|g'_\varepsilon\|_\infty \leq C/\varepsilon.$$

Sia  $M = \max\{1, \|g\|_\infty\}$  e  $\mathcal{D}_h(I) := \{u \in V_h(I) : \|u\|_\infty \leq M\}$ .

# Approssimazione Numerica

Per ogni  $g \in L^\infty(I)$  sia  $g_\varepsilon \in C_0^\infty(I)$  tale che

$$g_\varepsilon \rightarrow g \text{ in } L^1(I), \quad \|g_\varepsilon\|_\infty \leq \|g\|_\infty, \quad \|g'_\varepsilon\|_\infty \leq C/\varepsilon.$$

Sia  $M = \max\{1, \|g\|_\infty\}$  e  $\mathcal{D}_h(I) := \{u \in V_h(I) : \|u\|_\infty \leq M\}$ .

Definiamo

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,h}(u) = \begin{cases} \frac{1}{|\log \varepsilon|} \left( \int_I \int_I \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2} dx dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_I \pi_h(W(u)) dx \right) & \text{se } u \in \mathcal{D}_h(I) \\ +\infty & \text{altrimenti in } L^1(I) \end{cases}$$

e

$$G_{\varepsilon,h}(u) = \int_I \pi_h(|u(x) - g_\varepsilon(x)|) dx.$$

dove  $\pi_h : C(\bar{I}) \rightarrow V_h(I)$  indica l'operatore di interpolazione di Lagrange.

# Approssimazione Numerica

Per ogni  $g \in L^\infty(I)$  sia  $g_\varepsilon \in C_0^\infty(I)$  tale che

$$g_\varepsilon \rightarrow g \text{ in } L^1(I), \quad \|g_\varepsilon\|_\infty \leq \|g\|_\infty, \quad \|g'_\varepsilon\|_\infty \leq C/\varepsilon.$$

Sia  $M = \max\{1, \|g\|_\infty\}$  e  $\mathcal{D}_h(I) := \{u \in V_h(I) : \|u\|_\infty \leq M\}$ .

Definiamo

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,h}(u) = \begin{cases} \frac{1}{|\log \varepsilon|} \left( \int_I \int_I \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2} dx dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_I \pi_h(W(u)) dx \right) & \text{se } u \in \mathcal{D}_h(I) \\ +\infty & \text{altrimenti in } L^1(I) \end{cases}$$

e

$$G_{\varepsilon,h}(u) = \int_I \pi_h(|u(x) - g_\varepsilon(x)|) dx.$$

dove  $\pi_h : C(\bar{I}) \rightarrow V_h(I)$  indica l'operatore di interpolazione di Lagrange.

- Se  $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , risulta

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,h(\varepsilon)}(u) + G_{\varepsilon,h(\varepsilon)}(u) \xrightarrow{\Gamma(L^1)} F(u) + G(u) ?$$

# Approssimazione Numerica: Implementazione

Poniamo

$$a(u, v) = \int_I \int_I \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^2} dx dy .$$



# Approssimazione Numerica: Implementazione

Poniamo

$$a(u, v) = \int_I \int_I \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^2} dx dy .$$

Se  $\{\phi_i\} \subset V_h(I)$  è una base per  $V_h$  allora ogni  $u \in V_h(I)$  si scrive come

$$u(x) = \sum_i u_i \phi_i(x) \quad \text{con } U := \{u_i\} \in \mathbb{R}^{N(h)}$$

e risulta

$$\int_I \int_I \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy = a(u, u) = U^T \mathbb{A} U$$

con

$$\mathbb{A} = (\mathbb{A}_{ij}) = (a(\phi_i, \phi_j))$$

# Approssimazione Numerica: Implementazione

Poniamo

$$a(u, v) = \int_I \int_I \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^2} dx dy .$$

Se  $\{\phi_i\} \subset V_h(I)$  è una base per  $V_h$  allora ogni  $u \in V_h(I)$  si scrive come

$$u(x) = \sum_i u_i \phi_i(x) \quad \text{con } U := \{u_i\} \in \mathbb{R}^{N(h)}$$

e risulta

$$\int_I \int_I \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy = a(u, u) = U^T \mathbb{A} U$$

con

$$\mathbb{A} = (\mathbb{A}_{ij}) = (a(\phi_i, \phi_j))$$

- Occorre una formula di quadratura (il nucleo  $|x - y|^{-2}$  è singolare!)

# Approssimazione Numerica: Implementazione

D'altra parte

$$\mathbb{W}(U) = \int_I \pi_h(W(u)) dx \quad \text{e} \quad \mathbb{G}_\varepsilon(U) = \int_I \pi_h(|u(x) - g_\varepsilon(x)|) dx$$

si calcolano col metodo dei trapezi.

# Approssimazione Numerica: Implementazione

D'altra parte

$$\mathbb{W}(U) = \int_I \pi_h(W(u)) dx \quad \text{e} \quad \mathbb{G}_\varepsilon(U) = \int_I \pi_h(|u(x) - g_\varepsilon(x)|) dx$$

si calcolano col metodo dei trapezi.

Allora occorre risolvere il seguente problema di minimo

$$\min_{\|U\|_\infty \leq M} \left( \frac{1}{|\log \varepsilon|} U^T \mathbb{A} U + \frac{1}{\varepsilon |\log \varepsilon|} \mathbb{W}(U) + \mathbb{G}_\varepsilon(U) \right)$$

utilizzando un metodo di discesa.

D'altra parte

$$\mathbb{W}(U) = \int_I \pi_h(W(u)) dx \quad \text{e} \quad \mathbb{G}_\varepsilon(U) = \int_I \pi_h(|u(x) - g_\varepsilon(x)|) dx$$

si calcolano col metodo dei trapezi.

Allora occorre risolvere il seguente problema di minimo

$$\min_{\|U\|_\infty \leq M} \left( \frac{1}{|\log \varepsilon|} U^T \mathbb{A} U + \frac{1}{\varepsilon |\log \varepsilon|} \mathbb{W}(U) + \mathbb{G}_\varepsilon(U) \right)$$

utilizzando un metodo di discesa.

- Estensione al caso 2D, vettoriale, anisotropo

# Un modello di transizione di fase per le dislocazioni planari nei cristalli

Simone Cacace

Dipartimento di Matematica G.Castelnuovo  
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

29 Gennaio 2008