MAPPA TRACCIA E CLASSI CARATTERISTICHE PER FASCI COERENTI

Donatella Iacono

Novembre 2004

Queste note sono relative ad un seminario, tenuto all'Università degli Studi di Roma "La Sapienza", il 16 Novembre 2004.

L' **obiettivo** delle note è dare una definizione delle classi di Chern per un fascio coerente su una varietà X complessa e liscia.

Le note si basano essenzialmente su un lavoro di O'Brian, Toledo e Tong [6]. Un'altra definizione equivalente delle classi di Chern di un fascio coerente è stata data da I.H. Green nella sua tesi di dottorato, usando complessi simpliciali di fibrati. La tesi non è stata pubblicata ma Toledo e Tong ne danno una parziale descrizione in un loro lavoro [8].

In nessun modo pretendiamo di dare una descrizione completa e dettagliata dell'argomento e spesso ometteremo le dimostrazioni. Alcune parti saranno scritte in modo informale; suggerimenti, commenti e correzioni sono ben accetti.

Un ringraziamento particolare spetta ad Antonio Rapagnetta per la sua disponibilità nella preparazione del seminario.

1 Introduzione

All'interno dei seminari sulla congettura di Hodge, le classi di Chern di fasci coerenti verranno usati per descrivere un contro esempio su varietà di Kahler non proiettive di C. Voisin. Più precisamente, ricordiamo la congettura di Hodge. ("dopo Atiyah- Hirzebruch mettiamo $\mathbb{Q}$ e non $\mathbb{Z}$").

Congettura di Hodge. Siano X una varietà proiettiva e $\gamma \in {H_{\mathbb{Q}}}^{p,p}(X) = H^{2p}(X,\mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X)$. Esiste un ciclo algebrico $z \in {Z^p}_{\mathbb{Q}} = \{\sum q_i \Gamma_i,\ q_i \in \mathbb{Q} \text{ e } \Gamma_i \subset X \text{sottovarietà di codimensione p}\}$, tale che γ è associato a z (usando la dualità di Poincarrè)?

Ci sono esempi di varietà (tori complessi) Kahler non proiettivi, con classi di Chern di fibrati non banali e senza alcun ciclo analitico che può generarle. Così, esistono classi in coomologia non analitiche. Allora potremmo pensare che non sono i cicli i giusti generatori ma, ad esempio, classi di Chern di fibrati o di fasci. Il contro esempio che avevamo menzionato prima di C.Voisin, dà una risposta negativa: esistono varietà di Kaheler non proiettive, per le quali la mappa che ad ogni fascio coerente associa le classi di Chern, non surietta su $\oplus_p {H_{\mathbb{Q}}}^{p,p}(X)$.

Per comodità, ricordiamo la definizione di fascio coerente su X e di spazio di Stein.

Fasci Coerenti

Siano $\mathcal{O}_X$ il fascio dei germi delle funzioni olomorfe sulla varietà complessa liscia X,$\mathcal{O}_X^p = \mathcal{O}_X \oplus \overset{p}{\ldots} \oplus \mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_{X|U}$ la sua restrizione ad un aperto U di X; con queste notazioni abbiamo:

Definizione 1 *Una fascio $\mathcal{F}$ di $\mathcal{O}_X$-moduli è (analitico) coerente se per ogni punto x in X esiste un intorno U di x e $p_0, p_1 \in \mathbb{N}$ tale che si ha la seguente successione esatta*

$$ {\mathcal{O}_{X|U}}^{p_1} \longrightarrow {\mathcal{O}_{X|U}}^{p_0} \longrightarrow \mathcal{F}_{|U} \longrightarrow 0. \tag{1} $$

(i.e. Il fascio e l'insieme delle relazioni sono localmente finitamente generati).

Inoltre, un teorema di Oka (cf. pag 155 di [5]) ci garantisce che il nucleo di un omomorfismo $\mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q$ è finitamente generato, cioè la successione esatta (1) può essere "prolungata" (a meno di restringere l'aperto che noi indicheremo sempre con U):

$$ \ldots \longrightarrow {\mathcal{O}_{X|U}}^{p_2} \longrightarrow {\mathcal{O}_{X|U}}^{p_1} \longrightarrow {\mathcal{O}_{X|U}}^{p_0} \longrightarrow \mathcal{F}_{|U} \longrightarrow 0. $$

Infine, grazie al teorema di Syzyge di Hilbert, otteniamo una successione esatta finita con al più dim$X$-passi:

$$ 0 \longrightarrow {\mathcal{O}_{X|U}}^{p_d} \longrightarrow \ldots \longrightarrow {\mathcal{O}_{X|U}}^{p_1} \longrightarrow {\mathcal{O}_{X|U}}^{p_0} \longrightarrow \mathcal{F}_{|U} \longrightarrow 0 \qquad d \leq dim\, X. \tag{2} $$

Osservazione. Le risoluzioni sono solo locali.

Spazi di Stein

Per quanto riguarda la definizione di spazi di Stein rimandiamo al libro di Grauert [2]. A noi interessano le seguenti proprietà:

- L'intersezione di un numero finito di spazi di Stein è ancora di Stein.
- Palle e polidischi di $\mathbb{C}$ sono spazi di Stein, ne segue che per ogni punto di uno spazio complesso esiste una base di intorni costituita da spazi di Stein.
- Nella categoria dei fasci coerenti e dei morfismi di fasci su una varietà di Stein, un fascio localmente libero è un oggetto proiettivo.

Un ricoprimento finito di uno spazio complesso è un *ricoprimento di Stein* se ogni aperto del ricoprimento è di Stein. Ne segue che ogni ricoprimento localmente finito di uno spazio complesso X ammette un raffinamento di Stein.

Teorema 1 *Siano X spazio di Stein e $\mathcal{U}$ un ricoprimento di Stein di X. Allora per ogni fascio coerente $\mathcal{F}$ su X, si ha $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$, per ogni $q \geq 1$.* $\diamondsuit$

A questo punto siamo in grado di dare la definizione di classi di Chern di un fascio coerente su una varietà X proiettiva.

X varietà proiettiva

Nel caso in cui X sia una varietà proiettiva, allora definire le classi di Chern di un fascio coerente è più semplice del caso generale.

Infatti, grazie ad un teorema di Serre (cf. pag 121 di [4]), per ogni fascio coerente $\mathcal{F}$ su una varietà proiettiva esiste un intero n tale che $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(n)$ è generato da un numero finito di sezioni globali. In altre parole, esiste N tale che globalmente abbiamo la seguente successione esatta:

$$\bigoplus_N \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(n) \longrightarrow 0$$

ovvero

$$\bigoplus_N \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_X(n) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Infine, come abbiamo visto prima, possiamo applicare il teorema di Syzyge ed il teorema di Oka, per avere una risoluzione globale finita di $\mathcal{F}$ con fasci localmente liberi:

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^d \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{E}^1 \longrightarrow \mathcal{E}^0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

A questo punto, usando sempre la teoria di Serre, possiamo associare ad ogni fascio localmente libero un fibrato vettoriale e quindi definire le classi di Chern di $\mathcal{F}$ usando le classi di Chern dei fibrati. Più precisamente, sia $c(E^i) = \sum_{j=0}^{n_i} c_j(E^i)t^j$ la classe totale di Chern del fibrato vettoriale E^i associato ad $\mathcal{E}^i$. Allora possiamo definire la classe totale di Chern di $\mathcal{F}$

$$c(\mathcal{F}) = c(E^0)c(E^1)^{-1} \dots c(E^d)^{(-1)^d}.$$

Una descrizione più dettagliata si trova in [3].

In generale, se X non è proiettiva non esiste una risoluzione globale ma solo locale, come abbiamo visto in (2). Per questo, potremo definire complessi di fibrati solo localmente (complessi che saranno diversi da aperto ad aperto).

Il nostro obiettivo è riuscire a definire una mappa traccia; per far questo abbiamo bisogno di definire le cocatene twistanti, prima però introduciamo i complessi di fibrati vettoriali.

Complessi di fibrati

Se $(E^\cdot, d_E)$ ed $(F^\cdot, d_F)$ sono complessi di spazi vettoriali finiti, possiamo definire il complesso $Hom^\cdot(E,F)$, dove $Hom^n(E,F) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} Hom(E^p, F^{p+n})$, e differenziale

$$\Delta f = d_F f + (-1)^{\deg f + 1} f d_E. \tag{3}$$

Siano, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto della varietà complessa X ed $E^\cdot_\alpha = \{E^r_\alpha\}_{r\in\mathbb{Z}}$ un complesso di fibrati vettoriali olomorfi su U_α, tale che per ogni α solo un numero finito di fibrati E^r_α è non zero.

Definiamo ora due complessi.

$C^\cdot(\mathcal{U}, E^\cdot) = \sum_{p,q} C^p(\mathcal{U}, E^q)$ è lo spazio vettoriale bigraduato delle cocatene a coefficienti nel fibrato $E^\cdot_\alpha$. Più precisamente, un elemento $c^{p,q} \in C^p(\mathcal{U}, E^q)$ consiste di sezioni olomorfe $c^{p,q}_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ del fibrato $E^q_{\alpha_0}$ su ogni intersezione non vuota $U_{\alpha_0\cdots\alpha_p} = U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p}$.

Se abbiamo anche un altro complesso di fibrati vettoriali olomorfi $F^\cdot_\alpha$, possiamo definire un nuovo complesso.

$C^\cdot(\mathcal{U}, Hom^\cdot(E,F)) = \sum_{p,q} C^p(\mathcal{U}, Hom^q(E,F))$ è lo spazio vettoriale bigraduato delle cocatene a coefficienti che sono mappe di fibrati vettoriali olomorfi $E^\cdot_\alpha \longrightarrow F^\cdot_\alpha$. Più precisamente, un elemento $u^{p,q} \in C^p(\mathcal{U}, Hom^q(E,F))$ dà una sezione olomorfa $u^{p,q}_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ di $Hom^q(E_{\alpha_p}, F_{\alpha_0})$ su ogni intersezione non vuota $U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$.

Osservazione. Nelle definizioni precedenti l'ordine degli indici è importante, il motivo sarà pù chiaro tra un attimo quando definiremo la composizione.

Se abbiamo anche un terzo complesso di fibrati vettoriali olomorfi $G^{\cdot}_{\alpha}$, possiamo definire il prodotto dato essenzialmente dalla composizione di mappe:

$$C^{\cdot}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(F,G)) \times C^{\cdot}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(E,F)) \longrightarrow C^{\cdot}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(E,G)) \tag{4}$$

tale che, se $u^{p,q} \in C^p(\mathcal{U}, Hom^q(F,G))$ e $v^{r,s} \in C^r(\mathcal{U}, Hom^s(E,F))$ allora $(u^{p,q}, v^{r,s}) \longrightarrow (u \cdot v)^{p+r,q+s}$, dove

$$(u \cdot v)_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+r}} = (-1)^{qr} u_{\alpha_p \cdots \alpha_p} \circ v_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+r}} \tag{5}$$

e il termine a destra è la composizione di mappe (spesso ometteremo $\circ$, ma non $\cdot$). Effettivamente, per come abbiamo definito i complessi la composizione

$$E^h_{\alpha_{p+r}} \overset{v_{\alpha_p \cdots \alpha_{p+r}}}{\longrightarrow} E^{h+s}_{\alpha_p} \overset{u_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}}{\longrightarrow} E^{h+s+q}_{\alpha_0}.$$

è ben definita.

In particolare, per $E^{\cdot} = F^{\cdot} = G^{\cdot}$, $C^{\cdot}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(E,E))$ con il prodotto $\cdot$ diventa un algebra associativa e lo spazio $C^{\cdot}(\mathcal{U}, E^{\cdot})$ è un modulo sinistro con il seguente prodotto:

$$C^p(\mathcal{U}, Hom^q(E,E)) \times C^r(\mathcal{U}, E^s) \longrightarrow C^{p+r}(\mathcal{U}, E^{q+s}).$$

tale che $(f^{p,q}, c^{r,s}) \longrightarrow (f \cdot c)^{p+r,q+s}$, dove

$$(f \cdot c)_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+r}} = (-1)^{qr} f_{\alpha_p \dots \alpha_p} c_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+r}}$$

e il termine a destra è la valutazione.

Su questi spazi vettoriali possiamo definire un **differenziale** δ **di bigrado (1,0)**, detto anche "differenziale di Čech cancellato", dato dalle seguenti formule:

$$(\delta v)_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+1}} = \sum_{k=1}^{p} v_{\alpha_0 \cdots \check{\alpha_k} \cdots \alpha_{p+1}}|_{U_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+1}}} \qquad \text{se } v \in C^p(\mathcal{U}, Hom^q(E,F)); \tag{6}$$

$$(\delta c)_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+1}} = \sum_{k=1}^{p+1} c_{\alpha_0 \cdots \check{\alpha_k} \cdots \alpha_{p+1}}|_{U_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+1}}} \qquad \text{se } c \in C^p(\mathcal{U}, E^q). \tag{7}$$

Osservazione. Le sommatorie non partono da 0 ed arrivano una volta a p ed una volta a $p+1$ e ciò è legato alla definizione di cocatena che abbiamo dato.

Nel caso $C^{p+1}(\mathcal{U}, E^q)$ vogliamo sezioni di $E^q_{\alpha_0}$ e quindi α_0 non può scomparire dal secondo membro. Nel caso di elementi in $C^{p+1}(\mathcal{U}, Hom^q(E, F))$ vogliamo sezioni di $Hom^q(E_{\alpha_{p+1}}, F_{\alpha_0})$ e così nella sommatoria non possiamo togliere il primo e l'ultimo termine.

Gli operatori δ così definiti godono della proprietà $\delta^2 = 0$ e sono derivazioni graduate rispetto al prodotto $\cdot$ prima definito, cioè

$$\delta(u \cdot v) = (\delta u) \cdot v + (-1)^{\deg u} u \cdot (\delta v).$$

dove $\deg u$ è il grado totale di u ($u^{p,q}$ ha grado totale $p + q$).

2 Cocatene Twistanti

A questo punto possiamo dare la definizione di *cocatena twistante* a che ci servirà per definire un complesso $C^{\cdot}_a(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(E, E))$ e la mappa traccia:

$$\tau_a : C^{\cdot}_a(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(E, E)) \longrightarrow C^{\cdot}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X).$$

Definizione 2 *Siano $\mathcal{U}$ ed $E^{\cdot}$ come nella sezione precedente. Una cocatena twistante (olomorfa) a consiste di una cocatena $a = \sum_{k \geq 0} a^{k,1-k}$, con $a^{k,1-k}$ elemento di $C^k(\mathcal{U}, Hom^{1-k}(E, E))$, tale che $a^{1,0}_{\alpha\alpha}$ sia l'identità per ogni α e sia soddisfatta la seguente relazione:*

$$\delta a + a \cdot a = 0 \tag{8}$$

Per comodità, ricordiamo che se $a^{k,1-k}$ è elemento di $C^k(\mathcal{U}, Hom^{1-k}(E, E))$, allora su ogni intersezione non vuota $U_{\alpha_0 \cdots \alpha_k}$, $a^{k,1-k}_{\alpha_0 \cdots \alpha_k}$ è una sezione olomorfa di $Hom^{1-k}(E_{\alpha_k}, E_{\alpha_0})$.

L'equazione (8), è equivalente alle equazioni

$$\delta a^{k-1,2-k} + \sum_{i=0}^{k} a^{i,1-i} \cdot a^{k-i,1-(k-i)} = 0 \tag{9}$$

per ogni $k \geq 0$ e $a^{k,1-k}$ è definito zero per $k < 0$.

Notiamo che **una cocatena twistante ha grado totale 1** e verrà indicata con $(\mathcal{U}, E^{\cdot}, a)$.

A questo punto, vogliamo mostrare come si può associare, in maniera abbastanza naturale, una cocatena twistante ad un fascio coerente $\mathcal{F}$, per far questo enunciamo un lemma che ci sarà utile in seguito.

Lemma 1 *Sia U una varietà di Stein e siano $E^\cdot$ ed $F^\cdot$ complessi finiti di fibrati olomorfi e di mappe di fibrati olomorfi su U, tali che $E^p = 0$ per $p < 0$ ed $F^\cdot$ è esatto in grado negativo. Allora il complesso delle sezioni olomorfe di $Hom^\cdot(E, F)$ su U è aciclico in grado negativo.* $\diamondsuit$

Inoltre, ricordiamo la definizione di omotopia tra morfismi di complessi.

Definizione 3 *Siano $(M^\cdot, d_M)$ e $(N^\cdot, d_N)$ due complessi e $\psi^\cdot, \phi^\cdot : M^\cdot \longrightarrow N^\cdot$ morfsmi di complessi. $\psi^\cdot$ e $\phi^\cdot$ sono omotopi se esiste una collezione di morfismi di $H^\cdot : M^\cdot \longrightarrow N^{\cdot -1}$ (detta omotopia), tale che*

$$H^{i+1} \circ d_M^i + d_N^{i-1} \circ H^i = \psi^i - \phi^i \ \forall i \geq 0. \tag{10}$$

Sia, ora, $\mathcal{F}$ un fascio coerente su X. Se $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di Stein ed abbiamo una risoluzione localmente libera di $\mathcal{F}$

$$\cdots \xrightarrow{a_\alpha^{0,1}} \mathcal{E}_\alpha^{-1} \xrightarrow{a_\alpha^{0,1}} \mathcal{E}_\alpha^0 \longrightarrow \mathcal{F}|_{U_\alpha} \longrightarrow 0 \tag{11}$$

su ogni aperto U_α, allora esiste una estensione delle mappe $a^{0,1}$ ad una cocatena twistante a, per $\mathcal{U}$ e i complessi di fibrati vettoriali $E_\alpha^\cdot$, corrispondenti ai fasci $\mathcal{E}_\alpha^\cdot$. Per abuso di notazione riscriviamo la (11) con i fibrati al posto dei fasci

$$\cdots \xrightarrow{a_\alpha^{0,1}} E_\alpha^{-1} \xrightarrow{a_\alpha^{0,1}} E_\alpha^0 \longrightarrow \mathcal{F}|_{U_\alpha} \longrightarrow 0. \tag{12}$$

Per $k = 0$, le mappe $a_\alpha^{0,1}$ sono date.

Per $k = 1$, le mappe $a_{\alpha\beta}^{1,0} \in C^1(\mathcal{U}, Hom^0(E, E))$ sono costruite sollevando l'identità di $\mathcal{F}|_{U_{\alpha\beta}}$ a mappe di complessi delle risoluzioni proiettive $\mathcal{E}_\alpha^\cdot|_{U_{\alpha\beta}}$ ed $\mathcal{E}_\beta^\cdot|_{U_{\alpha\beta}}$ (le risoluzioni localmente libere sono proiettive per le proprietà degli spazi di Stein). Abbiamo quindi

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "a_\beta^{0,1}"] & E_\beta^{-1}|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[r, "a_\beta^{0,1}"] \arrow[d, "a_{\alpha\beta}^{1,0}"] & E_\beta^0|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[r, "a_\beta^{0,1}"] \arrow[d, "a_{\alpha\beta}^{1,0}"] & \mathcal{F}|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
{} \arrow[r, "a_\alpha^{0,1}"] & E_\alpha^{-1}|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[r, "a_\alpha^{0,1}"] & E_\alpha^0|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[r, "a_\alpha^{0,1}"] & \mathcal{F}|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Per $k = 1$, la condizione (9) si riduce a $a_{\alpha\beta}^{1,0} \cdot a_\beta^{0,1} + a_\alpha^{0,1} \cdot a_{\alpha\beta}^{1,0} = 0$ ed è verificata, dato che $a_{\alpha\beta}^{1,0}$ sono mappe di complessi ($\cdot$ è la composizione a meno del segno stabilito da (5)). L'esistenza di $a^{2,-1}$, che soddisfa (9), segue dal fatto che i sollevamenti $a_{\alpha\gamma}^{1,0}$ e $a_{\alpha\beta}^{1,0} a_{\beta\gamma}^{1,0}$ dell'identità di $\mathcal{F}|U_{\alpha\beta\gamma}$ sono morfismi di complessi omotopi: $a_{\alpha\beta\gamma}^{2,-1}$ è l'omotopia definita su le triple intersezioni. La condizione di omotopia (10) (in questo caso $d_M = a^{0,1}_\gamma$ e $d_N = a^{0,1}_\alpha$ coincide con quella di cocatena twistante (9) per $k = 2$, ovvero $a^{2,-1}_{\alpha\beta\gamma}a^{0,1}_\gamma + a^{0,1}_\alpha a^{2,-1}_{\alpha\beta\gamma} = a^{1,0}_{\alpha\beta}a^{1,0}_{\beta\gamma} - a^{1,0}_{\alpha\gamma}$.

In generale $a^{m,1-m}$ è costruito per induzione. Per comodità, scriviamo a^i in luogo di $a^{i,1-i}$ e supponiamo che $a^0, a^1, \dots a^{m-1}$ siano stati costruiti per $m > 2$ e che, per ogni $0 \le k \le m-1$, soddisfino (9). Dobbiamo costruire a^m che deve soddisfare (9), ovvero

$$a^0 \cdot a^m + a^m \cdot a^0 = -(\delta a^{m-1} \sum_{p=1}^{m-1} a^p \cdot a^{m-p}). \tag{13}$$

Su una intersezione non vuota $U_{\alpha_0\cdots\alpha_m}$ il termine a sinistra in (13) coincide con $(-1)^m\Delta(a^m_{\alpha_0\cdots\alpha_m})$, dove Δ è il differenziale su $Hom^\cdot(E_{\alpha_m}, E_{\alpha_0})$, definito in (3). Infatti, applicando (3) abbiamo

$$\begin{aligned}(-1)^m\Delta(a^m_{\alpha_0\cdots\alpha_m}) &= (-1)^m(a^0a^m + (-1)^{\deg\, a^m+1}a^ma^0 \\ &= (-1)^m a^0a^m + a^ma^0.\end{aligned}$$

applicando (5) si ha

$$a^0 \cdot a^m + a^m \cdot a^0 = (-1)^m a^0a^m + a^ma^0,$$

Per quanto riguarda il termine a destra in (13), usando l'induzione si dimostra che è un Δ-cociclo su ogni $U_{\alpha_0\cdots\alpha_m}$; pertanto l'esistenza di a^m è ottenuta per aciclicità applicando il lemma 1, per l'aciclicità.

Il complesso $C^\cdot_a(\mathcal{U}, Hom^\cdot(E, E))$

La condizione $\delta a + a \cdot a = 0$ (8) può essere interpretata come la condizione necessaria per definire un differenziale D_a di grado totale 1 su $C^\cdot(\mathcal{U}, E^\cdot)$ dato dalla formula

$$D_a c = \delta c + a \cdot c.$$

Grazie alla compatibilità di δ con il prodotto $\cdot$, la condizione $D_a^2 = 0$ è equivalente alla (8). Infatti, $D_a(D_a c) = D_a(\delta c + a \cdot c) = \delta\delta c + \delta(a \cdot c) + a \cdot \delta c + a \cdot a \cdot c = \delta a \cdot c + (-1)^{\deg a} a \cdot \delta c + a \cdot \delta c + a \cdot a \cdot c = (\delta a + a \cdot a) \cdot c$.

Il complesso ottenuto da $C^\cdot(\mathcal{U}, E^\cdot)$ con il differenziale D_a verrà indicato con $C^\cdot_a(\mathcal{U}, E^\cdot)$.

Se oltre alla cocatena $(\mathcal{U}, E^\cdot, a)$ abbiamo anche la cocatena $(\mathcal{U}, F^\cdot, b)$ (relativa allo stesso ricoprimento $\mathcal{U}$ di X), possiamo definire un differenziale $D_{a,b}$ di grado totale 1 su $C^\cdot(\mathcal{U}, Hom^\cdot(E, F))$ dato dalla formula

$$D_{a,b}u = \delta u + b \cdot u + (-1)^{\deg u} u \cdot a. \tag{14}$$

La verifica di $D_{a,b}^2 = 0$ è analoga alla precedente; il complesso ottenuto da $C^{\cdot}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(E,F))$ con differenziale $D_{a,b}$ verrà indicato con $C^{\cdot}_{a,b}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(E,F))$ (oppure $C^{\cdot}_{a}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(E,E))$ per $D_{a,a}$).

Osservazione. Se $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di Stein della varietà complessa X e le cocatene $(\mathcal{U}, E^{\cdot}, a)$ ed $(\mathcal{U}, F^{\cdot}, b)$ sono associate, rispettivamente, ai fasci coerenti $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{F}$, allora la coomologia del complesso $C^{\cdot}_{a,b}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(E,F))$ può essere identificata con $\mathrm{Ext}(X; \mathcal{E}, \mathcal{F})$ (cf. [7]).

Se $(\mathcal{U}, G^{\cdot}, c)$ è una terza cocatena twistante, il prodotto (5) induce il prodotto (accoppiamento di Yoneda)

$$\mathrm{Ext}^p(X; \mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \mathrm{Ext}^q(X; \mathcal{E}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(X; \mathcal{E}, \mathcal{G}).$$

Equivalenza tra cocatene twistanti

Siano $(\mathcal{U}, E^{\cdot}, a)$ e $(\mathcal{V}, F^{\cdot}, b)$ due cocatene twistanti su X, con $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$.

Definizione 4 *$(\mathcal{V}, F^{\cdot}, b)$ raffina $(\mathcal{U}, E^{\cdot}, a)$ o, in modo equivalente, $(\mathcal{U}, E^{\cdot}, a)$ estende $(\mathcal{V}, F^{\cdot}, b)$ se esiste una mappa di raffinamento $\phi : B \longrightarrow A$ nel senso usuale che $V_\beta \subset U_{\phi(\beta)}$, per ogni $\beta \in B$, e tale che $E^{\cdot}$ si restringe ad $F^{\cdot}$ rispetto a questa mappa. Più precisamente, si richiede che siano fissate le identificazioni $F_\beta^r = E_{\phi(\beta)}^r|_{V_\beta}$, per ogni r e β, rispetto alle quali $b_{\beta_0 \cdots \beta_k}^{k,1-k}$ è la restrizione di $a_{\phi(\beta_0) \cdots \phi(\beta_k)}^{k,1-k}$ a $V_{\beta_0 \cdots \beta_k}$ per ogni k.*

Le relazioni di estensione e di raffinamento generano una relazione di equivalenza nell'insieme delle cocatene twistanti olomorfe su X. Due cocatene twistanti sono *equivalenti* se si possono ottenere una dall'altra con una successione di estensioni o raffinamenti. Con questa definizione possiamo dimostrare che due cocatene twistanti associate ad uno stesso fascio coerente su una varietà X, definite su ricoprimenti di Stein, sono equivalenti.

Proposizione 1 *Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ricoprimenti della varietà complessa X con aperti di Stein. Se $(\mathcal{U}, E^{\cdot}, a)$ e $(\mathcal{V}, F^{\cdot}, b)$ sono due cocatene twistanti associate ad uno stesso fascio coerente, allora sono equivalenti.*

Dimostrazione. L'equivalenza si dimostra costruendo una estensione comune $(\mathcal{W}, G^{\cdot}, c)$. Sia $\mathcal{W}$ l'unione disgiunta dei due ricoprimenti $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, indicizzata da $\gamma \in A \cup B$. Sia $\mathcal{U}$ che $\mathcal{V}$, raffinano $\mathcal{W}$. Poniamo $G_\gamma^r = E_\gamma^r$ se $\gamma \in A$ e $G_\gamma^r = F_\gamma^r$ se $\gamma \in B$. Allora la cocatena c è costruita come sopra, con le condizioni che $c^k_{\gamma_0\cdots\gamma_k} = a^k_{\gamma_0\cdots\gamma_k}$ se tutti i γ_i sono in A, oppure $c^k_{\gamma_0\cdots\gamma_k} = b^k_{\gamma_0\cdots\gamma_k}$ se tutti i γ_i sono in B. Ciò è possibile perchè nel risolvere 13 per $c^k_{\alpha_0\cdots\alpha_k}$, con tutti gli $\alpha_i \in A$, il termine a destra dell'equazione coinvolge solo indice di A, così induttivamente $a^k_{\alpha_0\cdots\alpha_k}$ è una possibile soluzione. Ovviamente la cocatena c così costruita estende sia a che b. $\diamondsuit$

3 Mappa Traccia

Dopo una lunga introduzione sulle cocatene twistanti, in questa sezione daremo la definizione esplicita della mappa traccia.

Siano $E^\cdot$ ed $F^\cdot$ complessi finiti di fibrati vettoriali, ed $1^\cdot$ il complesso che consiste degli scalari in grado zero. Allora abbiamo l'identificazione

$$Hom^\cdot(F, E) = (Hom^\cdot(E, F))^\nu$$

data da $\phi \longrightarrow \widetilde{\phi}$, dove $\widetilde{\phi} = trac(\phi \circ f)$. Con $trac$, indichiamo la mappa di complessi di grado zero da $Hom^\cdot(E, E)$ in $1^\cdot$ che ad ogni endomorfismo di $E^\cdot$ di grado zero assegna la somma delle tracce delle componenti che agiscono in grado pari meno la somma delle componenti che agiscono in grado dispari.

Diamo, ora, una descrizione di mappe lineari in $C^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$, associate a cocatene twistanti in generale (per ora non sono legate ad alcun fascio coerente).

Siano $(\mathcal{U}, E^\cdot, a)$ ed $(\mathcal{U}, F^\cdot, b)$ due cocatene twistanti su X, ed $u = \sum_{q\geq 0} u^{q,r-q}$ una cocatena di grado totale r in $C^\cdot(\mathcal{U}, Hom^\cdot(F, E))$. Allora u definisce una mappa lineare di grado totale $r - 1$

$$\tau_u : C^\cdot(\mathcal{U}, Hom^\cdot(E, F)) \longrightarrow C^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) \tag{15}$$

data dalla formula

$$(\tau_u f^{p,q})_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+q+r-1}} = \tag{16}$$

$$= \sum_{k=0}^{q+r-1} (-1)^{(k+1)(p+q+r-1)+pr} trac(u^{q+r,-q}_{\alpha_{k+p}\cdots\alpha_{p+q+r-1}\alpha_0\cdots\alpha_k} f^{p,q}_{\alpha_k\cdots\alpha_{k+p}}).$$

La mappa è definita zero sulle cocatene di bi-grado (p, q) con $q < 1 - r$.

Osservazione. La mappa (16) è ben definita, infatti per ogni h si ha

$$E^h_{\alpha_{k+p}} \overset{f^{p,q}_{\alpha_k\cdots\alpha_{k+p}}}{\longrightarrow} E^{h+q}_{\alpha_k} \overset{u^{q+r,-q}_{\alpha_{k+p}\cdots\alpha_k}}{\longrightarrow} E^{h+q-q}_{\alpha_{k+p}}$$

che è una mappa di grado zero di $E^h_{\alpha_{k+p}}$ su cui la mappa *trac* è definita.

Applicando la definizione di τ_u si possono verificare le due proprietà seguenti (cf. prop. 3.2 di [6]).

Proposizione 2 *a). Sia u una cocatena di grado totale r in* $C^{\cdot}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(F, E))$. *Allora per ogni f in* $C^{\cdot}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(E, F))$ *si ha*

$$\delta(\tau_u(f)) + \tau_{\delta u}(f) = (-1)^{r+1}\tau_u(\delta f). \tag{17}$$

b). Siano u, v ed f cocatene di grado totale p,q ed r in $C^{\cdot}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(G, E))$, $C^{\cdot}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(F, G))$ *e* $C^{\cdot}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(E, F))$ *rispettivamente. Allora si ha*

$$\tau_{u \cdot v}(f) = \tau_u(v \cdot f) + (-1)^{p(q+r)}\tau_v(f \cdot u). \tag{18}$$

Finalmente, *definiamo la mappa traccia.*

Corollario 1 *Sia* $(\mathcal{U}, E^{\cdot}, a)$ *una cocatena twistante associata ad un fascio coerente* $\mathcal{F}$ *su* X. *Allora la mappa*

$$\tau_a : C^{\cdot}_a(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(E, E)) \longrightarrow C^{\cdot}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X).$$

è una mappa traccia ben definita.

Dimostrazione. Essendo a una cocatena, la mappa τ_a ha grado zero. Per le cocatene di bi-grado $(p, 0)$, applicando l'equazione (16) di definizione di τ_a, si ha

$$(\tau_a f^{p,0})_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} = trac(a^{1,0}_{\alpha_p \alpha_0} f^{p,0}_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}).$$

Quindi, dobbiamo solo verificare che è una mappa di complessi, ovvero $\delta(\tau_a f) = \tau_a(D_a f)$; ciò segue dalle proprietà a) e b) della proposizione 2. Infatti, per ogni f si ha

$$\begin{aligned} \delta(\tau_a f) &= -\tau_{\delta a}(f) + \tau_a(\delta f) && \text{per (17)} \\ &= \tau_{a \cdot a}(f) + \tau_a(\delta f) && \text{per (8)} \\ &= \tau_a(a \cdot f) + (-1)^{1(1+\deg f)}\tau_a(f \cdot a) + \tau_a(\delta f) && \text{per (18)} \\ &= \tau_a(D_a f) && \text{per (6).} \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Corollario 2 *La mappa indotta su* $Ext^{\cdot}(X; \mathcal{F}, \mathcal{F})$ *è indipendente dalla scelta della cocatena twistante associata al fascio* $\mathcal{F}$. *Più precisamente, se* $(\mathcal{U}, E^{\cdot}, a)$ *è un raffinamento di* $(\mathcal{V}, F^{\cdot}, b)$, *allora esiste un diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccc} C^{\cdot}_b(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(F,F)) & \xrightarrow{\tau_b} & C^{\cdot}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^{\cdot}_a(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(E,E)) & \xrightarrow{\tau_a} & C^{\cdot}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) \end{array}$$

dove le frecce verticali sono indotte dalle mappe di raffinamento. $\diamondsuit$

Ne segue che è ben definita una mappa Tr in coomologia. Infine, si può dimostrare (cf. cor. 3.9 di [6]) che $Tr(u \cdot v) = (-1)^{rs} Tr(v \cdot u)$, per ogni $u \in Ext^r(X; \mathcal{F}, \mathcal{G})$ e $v \in Ext^r(X; \mathcal{G}, \mathcal{F})$.

4 Classe di Atiyah e Carattere di Chern

In questa sezione, useremo le cocatene twistanti per dare una definizione esplicita della classe di Atiyah. Infine, daremo la definizione del carattere di Chern di un fascio coerente applicando la mappa traccia, definita nella sezione precedente, alla classe di Atiyah.

Iniziamo esaminando il comportamento delle cocatene twistanti associate ad una successione esatta corta $0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ di fasci coerenti su una varietà X. Siano $(\mathcal{U}, E^{\cdot}, a)$ e $(\mathcal{U}, G^{\cdot}, c)$ cocatene twistanti associate ad $\mathcal{E}$ e a $\mathcal{G}$, rispettivamente, e relative ad un stesso ricoprimento di Stein $\mathcal{U}$ di X. In queste condizioni, possiamo costruire una cocatena twistante associata ad $\mathcal{F}$, usando la seguente proposizione.

Proposizione 3 *In accordo alle notazioni precedenti, esiste una cocatena twistante* $(\mathcal{U}, E^{\cdot} \oplus G^{\cdot}, b)$ *per* $\mathcal{F}$*, con* $b^{k,1-k}$ *della forma*

$$\begin{bmatrix} a^{k,1-k} & h^{k,1-k} \\ 0 & c^{k,1-k} \end{bmatrix}$$

per opportuni $h^{k,1-k} \in C^k(\mathcal{U}, Hom^{1-k}(G, E))$*. Inoltre,* $h = \sum_{k \geq 0} h^{k,1-k}$ *è un cociclo e rappresenta l'elemento di* $Ext^1(X; \mathcal{G}, \mathcal{E})$ *definito dalla successione esatta corta* $0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$*.*

Dimostrazione. *Cenno.* La condizione per b di essere una cocatena twistante è equivalente alla condizione di cociclo per h. Infatti, essendo a e c cocatene twistanti, $\delta b + b \cdot b = 0$ coincide con $\delta h + a \cdot h + h \cdot c = 0$, che, per definizione (14), è proprio $D_{c,a} h = 0$. Per costruire il cociclo h si utilizza lo stesso procedimento usato per associare una catena ad un fascio coerente (cf

(13)). Inoltre, per questa scelta di b si ottiene la successione esatta corta di complessi

$$0 \to C^{\cdot}_{c,a}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(G,E)) \to C^{\cdot}_{c,b}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(G, E \oplus G)) \to C^{\cdot}_{c}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(G,G)) \to 0.$$

Questa successione da origine ad una successione esatta lunga in coomologia e, per definizione, l'elemento di $Ext^1(X; \mathcal{G}, \mathcal{E})$ associato all'estensione è l'immagine (nella successione) della mappa identità di $Hom(X; \mathcal{G}, \mathcal{G})$. Infine, si può verificare che il cociclo h è un rappresentante di questo elemento (per maggiori dettagli cf. prop 4.1 di [6]). ♢

Classe di Atiyah

Sia Ω^1_X il fascio degli 1-differenziali olomorfi su X; con lo stesso simbolo indichiamo anche il fibrato ad esso associato. La classe di Atiyah [cf. [1]] di un fascio coerente $\mathcal{F}$ è il negativo dell'elemento di $Ext^1(X; \mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \Omega^1_X)$ associato ad una successione esatta corta di fasci che ora costruiremo.

Sia $\mathcal{F}$ un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli. Definiamo il *fascio delle parti principali del primo ordine* di $\mathcal{F}$, che indicheremo con $\mathcal{P}^1_X(\mathcal{F})$. Come fascio di $\mathbb{C}$-moduli, $\mathcal{P}^1_X(\mathcal{F})$ è isomorfo ad $(\mathcal{F} \otimes \Omega^1_X) \oplus \mathcal{F}$ (dove il prodotto tensoriale è fatto su $\mathcal{O}_X$); la struttura di $\mathcal{O}_X$-modulo su $\mathcal{P}^1_X(\mathcal{F})$ è definita da $f(\eta, s) = (f\eta + s \otimes df, fs)$. In [1], si dimostra che se $\mathcal{F}$ è coerente allora $\mathcal{P}^1_X(\mathcal{F})$ è coerente; se $\mathcal{F}$ è localmente libero ed associato ad un fibrato vettoriale F, allora $\mathcal{P}^1_X(\mathcal{F})$ è localmente libero ed indicheremo con $P^1_X(F)$ il fibrato vettoriale associato. Inoltre, questa costruzione è funtoriale: se $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ allora $\mathcal{P}^1_X(\varphi) : \mathcal{P}^1_X(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{P}^1_X(\mathcal{G})$ con $\mathcal{P}^1_X(\varphi)(\eta, s) = ((\varphi \otimes id)(\eta), \varphi(s))$.

La classe di Atiyah è il negativo della classe in $Ext^1(X; \mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \Omega^1_X)$ associata alla ovvia successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \otimes \Omega^1_X \longrightarrow \mathcal{P}^1_X(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

A questo punto, vogliamo dare un rappresentante esplicito per la classe di Atiyah, usando le cocatene twistanti.

Siano $\mathcal{U}$ un ricoprimento di Stein di X ed $(\mathcal{U}, E^{\cdot}, a)$ una cocatena twistante per $\mathcal{F}$. Allora $(\mathcal{U}, E^{\cdot} \otimes \Omega^1_X, a \otimes id)$ è una cocatena twistante per $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X$.

Inoltre, per ogni α ed r la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow E^r_\alpha \otimes \Omega^1_X \longrightarrow P^1_X(E^r_\alpha) \longrightarrow E^r_\alpha \longrightarrow 0$$

spacca e lo spezzamento corrisponde alla scelta di una connessione olomorfa ∇^r_α che mappa sezioni olomorfe di E^r_α in sezioni olomorfe di $E^r_\alpha \otimes \Omega^1_X$. Così l'identificazione di $(E^r_\alpha \otimes \Omega^1_X) \oplus E^r_\alpha$ con $P^1_X(E^r_\alpha)$ è data da $(\eta, s) \longrightarrow (\eta + \nabla^r_\alpha s, s)$.

Proposizione 4 *La classe di Atiyah in $C^{\cdot}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(E, E \otimes \Omega^1_X))$ è rappresentata da $\nabla a = \sum_k \nabla a^{k,1-k}$, dove $(\nabla a^{k,1-k})_{\alpha_0 \cdots \alpha_k}$ è la derivata covariante di $a^{k,1-k}_{\alpha_0 \cdots \alpha_k}$ che corrisponde alla scelta di due connessioni su $E^r_{\alpha_k}$ ed $E^{r+1-k}_{\alpha_0}$, per $r \leq 0$.*

Dimostrazione. Il funtore $\mathcal{P}^1_X$ è un funtore esatto (cf. [1]) e così $(\mathcal{U}, P^1_X(E^{\cdot}), \mathcal{P}^1_X(a))$ è una cocatena twistante per $\mathcal{P}^1_X(\mathcal{F})$. Il risultato segue, applicando la proposizione 3 e dal fatto che, per il dato spezzamento di $P^1_X(E^{\cdot}_{\alpha})$, la cocatena $\mathcal{P}^1_X(a)$ va in

$$\begin{bmatrix} a \otimes id & -\nabla a \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

$\diamondsuit$

Carattere di Chern di $\mathcal{F}$

In questa sezione costruiremo, finalmente, dei cocicli espliciti per le classi caratteristiche di un fascio coerente $\mathcal{F}$. Le notazioni sono quelle della sezione precedente ($(\mathcal{U}, E^{\cdot}, a)$ una cocatena twistante per $\mathcal{F}$).

Applicando il prodotto 5 e il prodotto esterno, il cociclo $(\nabla a)^k$ ha grado totale k in $C^{\cdot}(\mathcal{U}, Hom^{\cdot}(E, E \otimes \Omega^k_X))$; ne segue che, la mappa traccia τ_a è una mappa di questo complesso in $C^{\cdot}(\mathcal{U}, \Omega^k_X)$.

Inoltre, se $(\mathcal{V}, F^{\cdot}, b)$ estende $(\mathcal{U}, E^{\cdot}, a)$, applicando il corollario 2, $\tau_b((\nabla b)^k)$ in $C^k(\mathcal{V}, \Omega^k_X)$ va in $\tau_a((\nabla a)^k)$ in $C^k(\mathcal{U}, \Omega^k_X)$ con la mappa di raffinamento, a patto che le connessioni sui fibrati E^r_α sono le restrizioni delle connessioni su F^r_β. Ne segue che è ben definita la classe di $\tau_a((\nabla a)^k)$ in $H^k(X, \Omega^k_X)$ ed è un invariante per $\mathcal{F}$.

Sia $ch_k(\mathcal{F})$ la classe di $\tau_a((\nabla a)^k)/k!$ in $H^k(X, \Omega^k_X)$.

Definiamo il carattere di Chern $ch(\mathcal{F})$ di $\mathcal{F}$ la somma $\displaystyle\sum_{k \geq 0} ch_k(\mathcal{F})$. Dalla definizione segue immediatamente *l'additività del carattere di Chern.*

Proposizione 5 *Sia $0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ una successione esatta corta di fasci coerenti su X. Allora $ch_k(\mathcal{F}) = ch_k(\mathcal{E}) + ch_k(\mathcal{G})$, per ogni $k \geq 0$*

Dimostrazione. Scegliamo le cocatene twistanti $(\mathcal{U}, E^{\cdot}, a)$, $(\mathcal{U}, E^{\cdot} \oplus G^{\cdot}, b)$ e $(\mathcal{U}, G^{\cdot}, c)$, per i fasci $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, come nella proposizione 3. Se scegliamo come connessioni sui fibrati $E^r_\alpha \oplus G^r_\alpha$ la somma diretta delle connessioni sulle componenti, allora è chiaro che $\tau_b((\nabla b)^k) = \tau_a((\nabla a)^k) + \tau_c((\nabla c)^k)$. $\diamondsuit$

Riferimenti bibliografici

[1] M.F. Atiyah, *COmplex analytic connections in fibre bundles,* Trans. Amer. Math. Soc., **85** (1957), 181-207.

[2] H. Grauert - R. Remmert, *Choerent Analityc Sheaves,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **265**, Berlin, Springer-Verlag, 1984.

[3] P. Griffiths e J. Harris, *Principles of algebraic geometry,* New York , Wiley, 1978.

[4] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry,* Graduate Texts in Mathematics, **52**, Berlin , Springer-Verlag, 1977.

[5] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles,* Princeton , Princeton University Press, 1987.

[6] N.R. O'Brian, D. Toledo e Y.L.L. Tong *The trace map and characteristic classes for coherent sheaves,* Amer. J. Math., **103** (1981), 225-252.

[7] D. Toledo e Y.L.L. Tong *Duality and Intersection Theory in Complex Manifolds. I.,* Math. Ann., **237** (1978), 41-77.

[8] D. Toledo e Y.L.L. Tong *Green's theory of Chern classes and the Riemann-Roch formula,* Contemporany Mathematics, **58** (1986), 261-275.