INTEGRATI ITERATI DI CHEN E COOMOLOGIA DEGLI SPAZI DI LACCI

1. Integrali iterati di Chen

Siano $\omega_1, \dots, \omega_r$ delle 1-forme differenziali su una varietà liscia M, I l'intervallo $[0,1]$ della retta reale, e $\gamma\colon I \to M$ un cammino liscio in M. Scriviamo

$$\gamma^*\omega_i = f_i(t)\,dt$$

e definiamo

$$\left(\int^C \omega_1 \cdots \omega_r\right)(\gamma) = \int_0^1 \left(\int_0^{t_{r-1}} \cdots \left(\int_0^{t_2} f_1(t_1)\,dt_1\right) \cdots f_{r-1}(t_{r-1})\,dt_{r-1}\right) f_r(t_r)\,dt_r$$

che chiameremo *integrale di linea iterato*.[1]

Il nostro scopo è quello di definire tali integrali per forme $\omega_1, \dots, \omega_r$ di gradi arbitrari.

Sia X varietà liscia (di dimensione anche infinita) e sia $\Omega^\bullet(X)$ il complesso delle forme differenziali su X. Una funzione definita su I a valori in $\Omega^k(X)$ è un elemento di tipo $(0,k)$ di $\Omega^k(I \times X)$, cioè è un elemento di $\Omega^k(I \times X)$ che non contiene dt ma che dipende da t. In particolare una funzione su I a valori in $\Omega^k(X)$ ristretta a $I \times U'$, dove U' carta locale su X, può essere scritta come

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \cdots i_k}(t, x')\,dx_{i_1}{}' \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}{}'$$

dove $x' = (x_1{}', \dots, x_n{}')$ sono le coordinate di U'. Spesso useremo il simbolo $u = u(t)$ per indicare le funzioni su I a valori in $\Omega^k(X)$. Più precisamente, per $t \in I$, $u(t)$ é il pull-back tramite l'inclusione $X = \{t\} \times X \hookrightarrow I \times X$.

Osserviamo che la 1-forma dt è ben definita su $I \times X$ e che ogni k-forma ω su $I \times X$ può essere scritta in modo unico nella forma

$$\omega = \omega'' + dt \wedge \omega' \tag{1.1}$$

dove ω' e ω'' sono funzioni su I a valori rispettivamente in $\Omega^{k-1}(X)$ e $\Omega^k(X)$. Quando $k = 0$, poniamo $\omega' = 0$. Si ha che $i_{\partial/\partial t}\omega = i_{\partial/\partial t}\omega'' + i_{\partial/\partial t}(dt \wedge \omega') = (i_{\partial/\partial t}dt) \wedge \omega' - dt \wedge i_{\partial/\partial t}\omega' = \omega'$.

Sia ora M una varietà liscia e sia $P(M)$ la varietà differenziabile (infinito dimensionale) dei cammini lisci su M. Definiamo la mappa *ev* di valutazione e la mappa

[1] Con le notazioni di Domenico Fiorenza, si ha

$$I^\gamma_{\omega_1 \otimes \cdots \omega_r} = \left(\int^C \omega_1 \cdots \omega_r\right)(\gamma)$$

ev_t di valutazione al tempo $t \in [0,1]$ come

$$\begin{aligned} ev\colon I \times P(M) &\to M \qquad ev(t,\gamma) := \gamma(t) \\ ev_t\colon P(M) &\to M \qquad ev_t(\gamma) := \gamma(t), \end{aligned}$$

Se ω è una k-forma differenziale su M, è utile adottare la notazione $ev_t^*(\omega) = \omega(t)$ e scrivere

$$ev^*\omega = (ev^*\omega)'' + dt \wedge (ev^*\omega)' = \omega''(t) + dt \wedge i_{\partial/\partial t}\omega(t) \ \in \Omega^k(I \times P(M))$$

Definizione 1.1. L'integrale iterato di Chen delle forme differenziali $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Omega^\bullet(M)$ è dato da

$$\begin{aligned} \int^C \omega_1 \cdots \omega_r := \int_0^1 \left(\int_0^{t_r} \cdots \left(\int_0^{t_2} i_{\partial/\partial t_1}\omega_1(t_1)\, dt_1 \right) \cdots \wedge \right. \\ \left. \wedge\, i_{\partial/\partial t_{r-1}}\omega_{r-1}(t_{r-1})\, dt_{r-1} \right) \wedge i_{\partial/\partial t_r}\omega_r(t_r)\, dt_r. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Quella appena data è la definizione data da Kuo-Tsai Chen in [3]. Possiamo però reinterpretarla in termini più geometrici come fatto da P. Cartier in [2].

Per ogni $k \geqslant 1$ consideriamo il k-simplesso standard in $\mathbb{R}^k$

$$\triangle^k = \{\, (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_k \leqslant 1 \,\}.$$

Per ogni $r \in \mathbb{N}$ consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \triangle^r \times P(M) & \xrightarrow{\Phi_r} & M^{r+1} \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \\ P(M) & & \end{array}$$

dove

$$\Phi_r(t_1, \dots, t_r; \gamma) = (\gamma(0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_r))$$

e π è la proiezione. Consideriamo poi il prodotto tensoriale $\otimes^{r+1}\Omega(M)$ come sottospazio denso di $\Omega(M^{r+1})$ e la composizione

$$\otimes^{r+1}\Omega^\bullet(M) \hookrightarrow \Omega^\bullet(M^{r+1}) \xrightarrow{{\Phi_r}^*} \Omega^\bullet(\triangle^r \times P(M)) \xrightarrow{\pi_*} \Omega^{\bullet - r}(P(M))$$

dove π_* è l'integrazione lungo le fibre di π.

Siano $\omega_0, \dots, \omega_r$ forme differenziali su M. Allora

$$\begin{aligned}
&\pi_* \left({\Phi_r}^* (\omega_0 \otimes \cdots \otimes \omega_r) \right) = \pi_* \big(ev_0^* \omega_0 \wedge (\omega_1''(t_1) + dt_1 \wedge i_{\partial/\partial t_1} \omega_1(t_1)) \dots \\
&\cdots \wedge (\omega_r''(t_r) + dt_r \wedge i_{\partial/\partial t_r} \omega_r(t_r)) \big) = \\
&= (-1)^{(r-1)|\omega_1| + (r-2)|\omega_2| + \cdots + |\omega_{r-1}| - r(r-1)/2} \cdot \\
&\cdot ev_0^* \omega_0 \wedge \pi_* \big(dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r \wedge i_{\partial/\partial t_1} \omega_1(t_1) \wedge \cdots \wedge i_{\partial/\partial t_r} \omega_r(t_r) \big) = \\
&= (-1)^{(r-1)|\omega_1| + (r-2)|\omega_2| + \cdots + |\omega_{r-1}| - r(r-1)/2} \cdot \\
&\cdot ev_0^* \omega_0 \wedge \left(\int_{\triangle^r} i_{\partial/\partial t_1} \omega_1(t_1) \wedge \cdots \wedge i_{\partial/\partial t_r} \omega_r(t_r)\, dt_1 \cdots dt_r \right) = \\
&= (-1)^{(r-1)|\omega_1| + (r-2)|\omega_2| + \cdots + |\omega_{r-1}| - r(r-1)/2} \cdot \\
&\cdot ev_0^* \omega_0 \wedge \left(\int^C \omega_1 \cdots \omega_r \right) \in \Omega^{|\omega_1| + \cdots + |\omega_r| - r}(P(M)).
\end{aligned}$$

Per semplicità definiamo

$$\sigma(\omega_0, \dots, \omega_r) := ev_0^* \omega_0 \wedge \int^C \omega_1 \cdots \omega_r \tag{1.3}$$

Osserviamo che nelle definizioni date sopra si può tranquillamente sostituire lo spazio dei cammini $P(M)$ su M con lo spazio dei lacci puntati $L_x(M)$ con punto base $x \in M$ oppure lo spazio $L(M)$ dei lacci liberi su M. La funzione σ in questi casi produrrà elementi in $\Omega^\bullet(L_x(M))$ e $\Omega^\bullet(L(M))$ rispettivamente.

2. Proprietà degli integrali iterati di Chen.

Esamineremo di seguito alcune proprietà fondamentali degli integrali iterati di Chen.

Teorema 2.1. *L'integrale iterato di Chen $\int^C \omega_1 \cdots \omega_r$ è indipendente dalle riparametrizzazioni del cammino γ che conservano l'orientazione; in altre parole, gli integrali iterati di Chen sono invarianti rispetto a* Diff I*, gruppo di Lie dei diffeomorfismi dell'intervallo unitario I.*

Proof. Un qualunque diffeomorfismo di I che fissa gli estremi conserva l'ordinamento cosicché otteniamo un diffeomorfismo indotto di $\triangle^r$ definito da

$$f(t_1, \dots, t_r) = (f(t_1), \dots, f(t_r)).$$

Se $F = (f^{-1}, f) \in \text{Diff}\, \triangle^r \times \text{Diff}\, P(M)$, allora il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc}
\triangle^r \times P(M) & \xrightarrow{\Phi_r \circ f} & M^{r+1} \\
{\scriptstyle F}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{1}} \\
\triangle^r \times P(M) & \xrightarrow[\Phi_r]{} & M^{r+1}
\end{array}$$

commuta in quanto Diff I agisce su $P(M)$ per riparametrizzazione: se $f \in \text{Diff}\, I$ e $\gamma \in P(M)$, allora $(f \cdot \gamma)(t) = \gamma(f(t))$.
Come sopra, sia $\pi \colon \triangle^r \times P(M) \to P(M)$ la proiezione. Allora $\pi \circ F = f \circ \pi$ e poiché sia F che f sono diffeomorfismi segue che sulle forme differenziali $\pi_* \circ F^* = f^* \circ \pi_*$.

É ora chiaro che $f^* \circ \pi_* \circ {ev_{t_1 \cdots t_r}}^* = \pi_* \circ F^* \circ {ev_{t_1 \cdots t_r}}^* = \pi_* \circ {ev_{f(t_1) \cdots f(t_r)}}^*$ e dunque $f^* \int^C \omega_1 \cdots \omega_r = \int^C f^* \omega_1 \cdots f^* \omega_r$. □

Teorema 2.2. *Se $\omega_1 \ldots, \omega_r \in \Omega^\bullet(M)$, allora*

$$
\begin{aligned}
d \int^C \omega_1 \cdots \omega_r = &- \sum_{i=1}^{r} (-1)^{\varepsilon_{i-1}} \int^C \omega_1 \cdots \omega_{i-1} d\omega_i \omega_{i+2} \cdots \omega_r + \\
&- \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{\varepsilon_i} \int^C \omega_1 \cdots \omega_{i-1} (\omega_i \wedge \omega_{i+1}) \omega_{i+2} \cdots \omega_r + \\
&- {ev_0}^* \omega_1 \wedge \int^C \omega_2 \cdots \omega_r + \\
&+ (-1)^{\varepsilon_{r-1}} \left(\int^C \omega_1 \cdots \omega_{r-1} \right) \wedge {ev_1}^* \omega_r .
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Proof. Se applichiamo l'operatore di differenziazione esterna d alla (1.2) otteniamo

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} (-1)^{\varepsilon_{i-1}} \int_{\triangle^r} & i_{\partial/\partial t_1} \omega_1(t_1) \wedge \cdots \wedge ([d, i_{\partial/\partial t_i}] \omega_i)(t_i) \wedge \cdots \wedge \\
& \wedge i_{\partial/\partial t_r} \omega_r(t_r)\, dt_1 \cdots dt_r - \sum_{i=1}^{r} (-1)^{\varepsilon_{i-1}} \int_{\triangle^r} i_{\partial/\partial t_1} \omega_1(t_1) \wedge \cdots \wedge \\
& \wedge i_{\partial/\partial t_i} (d\omega_i)(t_i) \wedge \cdots \wedge i_{\partial/\partial t_r} \omega_r(t_r)\, dt_1 \cdots dt_r .
\end{aligned}
$$

Usando il fatto che

$$
([d, i_{\partial/\partial t}] \omega)(t) = \frac{d\omega(t)}{dt},
$$

vediamo che l'i-esimo termine della prima sommatoria è uguale a

$$
\begin{aligned}
(-1)^{\varepsilon_{i-1}} \int_{0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{i-1} \leqslant t_{i+1} \leqslant t_r \leqslant 1} & i_{\partial/\partial t_1} \omega_1(t_1) \wedge \cdots \wedge ((i_{\partial/\partial t_{i-1}} \omega_{i-1}) \wedge \\
& \wedge \omega_i)(t_{i-1}) \wedge \cdots \wedge i_{\partial/\partial t_r} \omega_r(t_r)\, dt_1 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_r + \\
& - (-1)^{\varepsilon_{i-1}} \int_{0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{i-1} \leqslant t_{i+1} \leqslant \cdots \leqslant t_r \leqslant 1} i_{\partial/\partial t_1} \omega_1(t_1) \wedge \cdots \wedge \\
& \wedge (\omega_i \wedge (i_{\partial/\partial t_{i+1}} \omega_{i+1}))(t_{i+1}) \wedge \cdots \wedge i_{\partial/\partial t_r} \omega_r(t_r)\, dt_1 \cdots \widehat{dt_i} \cdots dt_r .
\end{aligned}
$$

Poiché

$$
-(-1)^{\varepsilon_i} i_{\partial/\partial t} \omega_i \wedge \omega_{i+1} + (-1)^{\varepsilon_{i-1}} \omega_i \wedge i_{\partial/\partial t} \omega_{i+1} = -(-1)^{\varepsilon_i} i_{\partial/\partial t} (\omega_i \wedge \omega_{i+1})
$$

è chiaro come nasca il termine

$$
-(-1)^{\varepsilon_{i-1}} \int^C \omega_1 \cdots \omega_{i-1} (\omega_i \wedge \omega_{i+1}) \omega_{i+2} \cdots \omega_r ,
$$

mentre i due termini che rimangono sono uguali a

$$
- {ev_0}^* \omega_1 \wedge \int^C \omega_2 \cdots \omega_r
$$

e

$$(-1)^{\varepsilon_{r-1}}\left(\int^C \omega_1\cdots\omega_r\right)\wedge {ev_1}^*\omega_r. \quad \square$$

Per enunciare la prossima proprietà introduciamo un segno di permutazione pesata. Per ogni permutazione ς di $\{1,2,\dots,r\}$ e per ogni collezione di numeri naturali $\{k_1,\dots,k_r\}$, definiamo *segno* della permutazione $\varepsilon(\varsigma;k_1,\dots,k_r)$ essere l'elemento dell'insieme $\{\pm 1\}$ definito da

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r=\varepsilon(\varsigma;k_1,\dots,k_r)\omega_{\varsigma(1)}\wedge\cdots\wedge\omega_{\varsigma(r)}$$

dove $\omega_1,\dots,\omega_r$ sono r forme su M di gradi $k_1,\dots,k_r$ rispettivamente.

Se r,s sono una coppia di naturali e $\{a_1,\dots,a_r\}$ e $\{b_1,\dots,b_s\}$ sono due insiemi ordinati, allora un *mescolamento di tipo* (r,s) di $\{a_1,\dots,a_r\}$ e $\{b_1,\dots,b_s\}$ è una permutazione ς dell'insieme ordinato $\{a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_s\}$ con la proprietà che $\varsigma(a_i)<\varsigma(a_j)$ e $\varsigma(b_i)<\varsigma(b_j)$ se $i<j$.

Teorema 2.3. *Se $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{r+s}$ sono forme liscie su M di gradi $k_1,k_2,\dots,k_{r+s}$ rispettivamente, allora*

$$\begin{aligned}\int^C \omega_1\cdots\omega_r\wedge\int^C\omega_{r+1}\cdots\omega_{r+s}=\\ =\sum\varepsilon(\varsigma;k_1-1,\dots,k_{r+s}-1)\int^C\omega_{\varsigma(1)}\omega_{\varsigma(2)}\cdots\omega_{\varsigma(r+s)},\end{aligned}\tag{2.2}$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i mescolamenti ς di tipo (r,s) di $\{1,2,\dots,r+s\}$.

Proof. Risulta chiara l'identità

$$\begin{aligned}\int^C\omega_1\cdots\omega_r\wedge\int^C\omega_{r+1}\cdots\omega_{r+s}=\int_{\triangle^r\times\triangle^s} i_{\partial/\partial t_1}\omega_1(t_1)\wedge\\ \wedge\cdots\wedge i_{\partial/\partial t_r}\omega_r(t_r)\wedge i_{\partial/\partial t_{r+1}}\omega_{r+1}(t_{r+1})\wedge\cdots\wedge\\ \wedge i_{\partial/\partial t_{r+s}}\omega_{r+s}(t_{r+s})\,dt_1\cdots dt_r dt_{r+1}\dots dt_{r+s}.\end{aligned}$$

Sia ora ς un mescolamento di tipo (r,s) degli insiemi ordinati $(t_1,\dots,t_r)\in\triangle^r$, $(t_{r+1},\dots,t_{r+s})\in\Delta^s$, e sia R_ς il sottoinsieme di $\triangle^r\times\triangle^s$ costituito da quei punti $(t_1,\dots,t_r,t_{r+1},\dots,t_{r+s})$ tali che la $(r+s)$-upla $\varsigma(t_1,\dots,t_r,t_{r+1},\dots,t_{r+s})$ sia ordinata in modo crescente. Ovviamente ogni insieme R_ς è un $(r+s)$-simplesso e $\triangle^r\times\triangle^s$ è l'unione degli R_ς: questa è la triangolazione di mescolamento del prodotto $\triangle^r\times\triangle^s$. É banale verificare che

$$\begin{aligned}\int_{R_\varsigma} i_{\partial/\partial t_1}\omega_1(t_1)\wedge\cdots\wedge i_{\partial/\partial t_r}\omega_r(t_r)\wedge i_{\partial/\partial t_{r+1}}\omega_{r+1}(t_{r+1})\wedge\cdots\wedge\\ \wedge i_{\partial/\partial t_{r+s}}\omega_{r+s}(t_{r+s})\,dt_1\cdots dt_r dt_{r+1}\cdots dt_{r+s}=\\ =\varepsilon(\varsigma;k_1-1,\dots,k_{r+s}-1)\int^C\omega_{\varsigma(1)}\omega_{\varsigma(2)}\cdots\omega_{\varsigma(r+s)},\end{aligned}$$

da cui l'asserto. $\square$

Studiamo infine il comportamento degli integrali iterati di Chen in relazione al prodotto di cammini, e per questo poniamo

$$\left(\int^C \omega_1 \cdots \omega_r\right)(\gamma) = \int_\gamma^C \omega_1 \cdots \omega_r \qquad \omega_1, \ldots, \omega_r \in \Omega^\bullet(M),\ \gamma \in P(M).$$

Siano $\alpha, \beta \colon I \to M$ due cammini con $\alpha(1) = \beta(0)$.

Definiamo il cammino prodotto dei due cammini α e β, che indichiamo con $\alpha\beta$, ponendo

$$\alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{per } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{per } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}.$$

Definiamo altresì il cammino inverso del cammino α, che indichiamo con α^{-1}, ponendo

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t).$$

Teorema 2.4. *Se $\alpha, \beta \in P(M)$ sono tali che $\alpha(1) = \beta(0)$, allora*

$$\int_{\alpha\beta}^C \omega_1 \cdots \omega_r = \sum_{i=0}^r \left(\int_\alpha^C \omega_1 \cdots \omega_i\right) \wedge \left(\int_\beta^C \omega_{i+1} \cdots \omega_r\right). \tag{2.3}$$

Inoltre, se $r \geqslant 1$, allora

$$\int_{\alpha\alpha^{-1}}^C \omega_1 \cdots \omega_r = 0 \tag{2.4}$$

o, equivalentemente,

$$\int_{\alpha^{-1}}^C \omega_1 \cdots \omega_r = (-1)^r \int_\alpha^C \omega_r \cdots \omega_1. \tag{2.4$'$}$$

Proof. Sia R_i il sottoinsieme di $\triangle^r$ costituito da quei punti $(t_1, \ldots, t_r)$ tali che $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_i \leqslant 1/2 \leqslant t_{i+1} \leqslant \cdots \leqslant t_r \leqslant 1$. Ogni R_i o è un simplesso o è il prodotto di 2 simplessi, dunque

$$\int_{R_i} i_{\partial/\partial t_1}\omega_1(t_1) \wedge \cdots \wedge i_{\partial/\partial t_r}\omega_r(t_r)\, dt_1 \cdots dt_r = \int^C \omega_1 \cdots \omega_i \wedge \int^C \omega_{i+1} \cdots \omega_r$$

da cui la (2.3).

La (2.4) discende invece immediatamente dalla definizione. □

Scegliamo un punto base $x \in M$, e indichiamo con $L_\varepsilon(M) \subset L(M)$ l'insieme dei lacci γ tali che $\gamma(t) = x$ per $t \in [0, \varepsilon] \cup [1-\varepsilon, 1]$. Grazie alla composizione di lacci, possiamo definire un'applicazione prodotto

$$\lambda_x \colon L_\varepsilon(M) \times L_\varepsilon(M) \to L_\varepsilon(M)$$

ponendo

$$\lambda_x(\alpha, \beta)(t) = (\alpha \times \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{per } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{per } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}.$$

Osserviamo che, se indichiamo con

$$\begin{aligned} \pi_1 \colon L_\varepsilon(M) \times L_\varepsilon(M) &\to L_\varepsilon(M) \\ (\alpha, \beta) &\to \alpha \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} \pi_2 \colon L_\varepsilon(M) \times L_\varepsilon(M) &\to L_\varepsilon(M) \\ (\alpha, \beta) &\to \beta \end{aligned}$$

le proiezioni canoniche, allora

$$\lambda_x(\alpha, \beta)(t) = \pi_1(\alpha, \beta) \cdot \pi_2(\alpha, \beta).$$

Teorema 2.5. *Se $\alpha, \beta \in L_\varepsilon(M)$, allora*

$$\lambda_x{}^* \left(\int^C \omega_1 \cdots \omega_r \right) = \sum_{i=0}^{r} \left(\int^C \omega_1 \cdots \omega_i \right) \times \left(\int^C \omega_{i+1} \cdots \omega_r \right). \tag{2.5}$$

Proof. La tesi discende immediatamente dall'osservazione fatta sopra e dalla (2.3), infatti

$$\begin{aligned} \lambda_x{}^* \left(\int^C \omega_1 \cdots \omega_r \right) (\alpha, \beta) &= \int_{\lambda_x(\alpha,\beta)}^{C} \omega_1 \cdots \omega_r = \\ &= \sum_{i=0}^{r} \left(\int_{\pi_1(\alpha,\beta)}^{C} \omega_1 \cdots \omega_i \right) \wedge \left(\int_{\pi_2(\alpha,\beta)}^{C} \omega_{i+1} \cdots \omega_r \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{r} \left(\left(\pi_1{}^* \int^C \omega_1 \cdots \omega_i \right) \wedge \left(\pi_2{}^* \int^C \omega_{i+1} \cdots \omega_r \right) \right) (\alpha, \beta) = \\ &= \sum_{i=0}^{r} \left(\int^C \omega_1 \cdots \omega_i \times \int^C \omega_{i+1} \cdots \omega_r \right) (\alpha, \beta). \quad \square \end{aligned}$$

3. Complesso di Hochschild e integrali iterati

Definiamo innanzitutto il bar complex e il complesso di Hochschild di un'algebra differenziale graduata (per maggiori dettagli si veda [5]).

Sia A un'algebra differenziale graduata su $\mathbb{R}$ con unità 1_A, sia N_1 un modulo differenziale destro su A e N_2 un modulo differenziale sinistro su A. Indichiamo con $A[1]$ l'algebra differenziale graduata corrispondente ad A ma con gradazione diminuita di 1. Il *bar complex* è definito come

$$\mathbf{B}_\bullet(N_1, A, N_2) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} N_1 \otimes (A[1])^{\otimes k} \otimes N_2$$

col differenziale $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 + \mathfrak{b}_1$ dove

$$\begin{aligned} -\mathfrak{b}_0(n_1, \omega_1, \ldots, \omega_k, n_2) := (dn_1, \omega_1, \ldots, \omega_k, n_2) + \\ + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{\epsilon_{i-1}} (n_1, \omega_1, \ldots, d\omega_i, \ldots, \omega_k, n_2) + \\ + (-1)^{\epsilon_k} (n_1, \omega_1, \ldots, \omega_k, dn_2) \end{aligned}$$

$$-\mathfrak{b}_1(n_1,\omega_1,\dots,\omega_k,n_2) := (n_1\omega_1,\dots,\omega_k,n_2)+ \\ +\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{\epsilon_i}(n_1,\omega_1,\dots,\omega_i\omega_{i+1},\dots,\omega_k,n_2)+ \\ +(-1)^{\epsilon_k}(n_1,\omega_1,\dots,\omega_k n_2)$$

con $\epsilon_i = |n_1| + |\omega_1| + \ldots + |\omega_i| - i$.

Si osservi che $\mathbf{B}_\bullet(A,A,A)$ è un modulo su $A \otimes A^{op}$, ovvero un bimodulo su A. Inoltre il bar complex può essere visto come la risoluzione libera di A come modulo su $A \otimes A^{op}$.

Definiamo il *complesso delle catene di Hochschild* o *cyclic bar complex* di A a coefficienti in un modulo differenziale bilatero N come

$$\mathsf{Hoch}_\bullet(A,N) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} N \otimes (A[1])^{\otimes k}$$

col differenziale $b = b_0 + b_1$ dove

$$b_0(n,\omega_1,\dots,\omega_k) := (dn,\omega_1,\dots,\omega_k) + \sum_{i=0}^{k}(-1)^{\epsilon_{i-1}}(n,\omega_1,\dots,d\omega_i,\dots,\omega_k)$$

e

$$b_1(n,\omega_1,\dots,\omega_k) := \ (n\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_k) + \sum_i (-1)^{\epsilon_i}(n,\omega_1,\dots,\omega_i\omega_{i+1},\dots,\omega_k)+ \\ +(-1)^{(|\omega_k|-1)\epsilon_{k-1}}(\omega_k n,\omega_1,\dots,\omega_{k-1})$$

L'*omologia di Hochschild A a coefficienti in N*, $\mathsf{HHoch}_\bullet(A,N)$, è l'omologia di $\mathsf{Hoch}_\bullet(A,N)$ rispetto al differentiale $\mathfrak{b}$. Il *complesso di Hochschild ridotto* è dato da $\mathsf{Hoch}_\bullet(\bar{A},N)$ dove $\bar{A} = (A/(\mathbb{R}\cdot 1_A)$, e la sua omologia viene indicata con $\mathsf{HHoch}_\bullet(\bar{A},N)$. Definiamo $\mathsf{Hoch}_\bullet(A) := \mathsf{Hoch}_\bullet(\bar{A},A)$ e indichiamo con $\mathsf{HHoch}_\bullet(A)$ l'omologia rispetto a b.

Osserviamo che sul complesso di Hochschild $\mathsf{Hoch}(A)$ possiamo definire una struttura di algebra differenziale graduata tramite il prodotto di mescolamento. Più precisamente, se $(\alpha_0,\omega_1,\dots,\omega_r)$ e $(\beta_0,\omega_{r+1},\dots,\omega_{r+s})$ sono elementi di $\mathsf{Hoch}_\bullet(A)$, allora

$$(\alpha_0,\omega_1,\dots,\omega_r)\bullet(\beta_0,\omega_{r+1},\dots,\omega_{r+s}) = \\ = \sum_{\varsigma}(-1)^{|\beta_0|(|\omega_1|+\ldots+|\omega_r|-r)}(\alpha_0\beta_0,\omega_{\varsigma(1)},\dots,\omega_{\varsigma(r+s)})$$

dove la somma è fatta su tutti i mescolamenti ς di tipo (r,s). La compatibilità del prodotto con b è un facile esercizio.

DIscutiamo infine la proprietà di invarianza dell'omologia di Hochschild per quasi-isomorfismo.

Lemma 3.1. *Se $f\colon A_1 \to A_2$ è un quasi-isomorfismo di algebre differenziali graduate, ovvero una mappa di algebre differenziali graduate che induce un isomorfismo in coomologia. Allora l'omomorfismo indotto*

$$(\mathsf{Hoch}_\bullet(A_1),b) \to (\mathsf{Hoch}_\bullet(A_2),b)$$

induce un isomorfismo nell'omologia di Hochschild.

Proof. Possiamo vedere il complesso di Hochschild di un'algebra differenziale graduata $A = \oplus_{i=0}^{\infty} A_i$ come il complesso totale di un doppio complesso:

$$\mathsf{Hoch}_{-p,q}(A) := \bigoplus_{i_0+\cdots i_p=q} (A_{i_0} \otimes A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_p})$$

con differenziali

$$b_0 \colon \mathsf{Hoch}_{-p,q}(A) \to \mathsf{Hoch}_{-p,q+1}(A)$$
$$b_1 \colon \mathsf{Hoch}_{-p,q}(A) \to \mathsf{Hoch}_{-p+1,q}(A).$$

Il complesso totale coincide con il complesso di Hochschild definito sopra:

$$\mathsf{Hoch}_k(A) = \bigoplus_{-p+q=k} \mathsf{Hoch}_{-p,q}(A).$$

Consideriamo ora la filtarzione del doppio complesso data da

$$F^{-p}(\mathsf{Hoch}_\bullet(A))_q = \bigoplus_{-r\geq -p} \mathsf{Hoch}_{-r,q+r}(A) = \bigoplus_{r\leq p} \bigoplus_{i_0+\cdots i_r=q+r} (A_{i_0} \otimes \cdots \otimes A_{i_r})$$

Dato che il doppio complesso è concentrato nel secondo quadrante, allora la filtrazione è completa ed esaustiva, e pertanto converge all'omologia di Hochschild $\mathsf{HHoch}_\bullet(A)$. Il termine $\mathbf{E}_1$ della successione spettrale associata a questa filtrazione è isomorfo a

$$E_1^{-p,q} = H^{-p+q}\left(F^{-p}(\mathsf{Hoch}_\bullet(A))/F^{-p+1}(\mathsf{Hoch}_\bullet(A))\right) = \\ = H^{-p+q}(\mathsf{Hoch}_{-p,q}(A), \bar{b}_0) = \mathsf{Hoch}_{-p,q}(H^\bullet(A)).$$

Il quasi-isomorfismo $f \colon A_1 \to A_2$ induce quindi un isomorfismo tra i termini E_1 delle successioni spettrali associate a A_1 e A_2. Da questo segue che anche le omologie di Hochschild di A_1 e A_2 sono isomorfe. □

4. L'omologia di Hochschild e la coomologia di $L(M)$.

Si può mostrare (vedi [4]) che non ogni forma differenziale su $L(M)$ può essere espressa come un integrale iterato. E non è neppure vero che gli integrali iterati siano densi nello spazio delle forme differenziali su $L(M)$. È vero invece che la coomologia di Hochschild di $\Omega^\bullet(M)$ calcola la coomologia di de Rham dello spazio $L(M)$ dei lacci liberi su una varietà semplicemente connessa M. La dimostrazione del seguente Teorema occuperà il resto della sezione.

Teorema 4.1. *Se M è una varietà differenziale di dimensione finita e semplicemente connessa, allora l'integrale iterato di Chen induce un isomorfismo (di grado zero) di algebre differenziali graduate:*

$$\sigma \colon (\mathsf{Hoch}_\bullet(\Omega(M)), b) \to (\Omega^\bullet(L(M)), d)$$

Osservazione 4.2. La compatibilità tra l'operatore di Hochschild b e il differenziale di de Rham d discende direttamente dall'equazione (2.1), mentre la compatibilità tra il prodotto shuffle sul complesso di Hochschild e il prodotto wedge sul complesso di de Rham di $L(M)$ è dato dalla (2.2); quindi la parte del teorema che resta da dimostrare è che σ induce un isomorfismo in coomologia.

Osservazione 4.3. Per un approccio alternativo al problema di determinare l'algebra di coomologia di uno spazio di lacci liberi si veda [6].

4.1. **Normalizzazione del complesso di Hochschild di $\Omega^\bullet(M)$.** È utile introdurre una normalizzazione del complesso di Hochschild. Lo scopo di questa normalizzazione è di eliminare le catene di grado negativo. Se f è un elemento di $\Omega^0(M)$, definiamo per $i>0$ gli operatori $S_i(f)$ su $\mathsf{Hoch}_\bullet(\Omega(M))$ ponendo

$$S_i(f)(\omega_0,\cdots,\omega_r)=(\omega_0,\cdots,\omega_{i-1},f,\omega_i,\cdots\omega_r).$$

Definiamo ora $\mathbf{D}_\bullet(\Omega(M))$ essere il sottospazio di $\mathsf{Hoch}_\bullet(\Omega(M))$ generato dalle immagini degli operatori $S_i(f)$ e

$$R_i(f)=[b,S_i(f)].$$

Il seguente risultato è vero per costruzione.

Lemma 4.4. *Il differenziale b manda $\mathbf{D}_\bullet(\Omega(M))$ in sè.*

Dunque, $(\mathbf{D}_\bullet(\Omega(M)),b)$ è un sottocomplesso di $(\mathsf{Hoch}_\bullet(\Omega(M)),b)$. Il complesso di Hochschild normalizzato di Chen di $\Omega^\bullet(M)$ è il complesso quoziente

$$(\mathbf{N}_\bullet(\Omega(M)),b)=\frac{(\mathsf{Hoch}_\bullet(\Omega(M)),b)}{(\mathbf{D}_\bullet(\Omega(M)),b)}.$$

Si osservi che il prodotto di mescolamento sul complesso di Hochschild discende ad un prodotto su complesso normalizzato.

Teorema 4.5. *Se M è connessa, allora il complesso $(\mathbf{D}_\bullet(\Omega(M)),b)$ è aciclico.*

Proof. Sia $\widetilde{\Omega^\bullet}(M)$ una sottoalgebra di $\Omega^\bullet(M)$ tale che $\widetilde{\Omega^0}(M)=\mathbb{R}$ e tale che abbia la stessa coomologia di $\Omega^\bullet(M)$. Paragoneremo i complessi ciclico a barre di $\Omega^\bullet(M)$ e $\widetilde{\Omega^\bullet}(M)$, rispetto all'inclusione

$$\mathsf{Hoch}_\bullet(\widetilde{\Omega}(M))\subset\mathsf{Hoch}_\bullet(\Omega(M)).$$

Osserviamo che

$$\mathbf{D}_\bullet(\widetilde{\Omega}(M))=\mathsf{Hoch}_\bullet(\widetilde{\Omega}(M))\cap\mathbf{D}_\bullet(\Omega(M));$$

tuttavia, poiché $\widetilde{\Omega}^0(M)/\text{costanti}=0$, segue che $\mathbf{D}_\bullet(\widetilde{\Omega}(M))=0$. Pertanto, è sufficiente provare che l'inclusione precedente di $\mathsf{Hoch}_\bullet(\widetilde{\Omega}(M))$ in $\mathsf{Hoch}_\bullet(\Omega(M))$ induce un isomorfismo in coomologia; ma per fare ciò, basta applicare il Lemma 3.1. □

Il seguente risultato collega la nozione astratta della normalizzazione di Chen con la geometria degli integrali iterati.

Teorema 4.6. *Se M è connessa, allora il complesso $(\mathbf{D}_\bullet(\Omega(M)),b)$ è il nucleo di σ.*

Proof. Sia $\widetilde{\Omega^\bullet}(M)$ una sottoalgebra differenziale graduata di $\Omega^\bullet(M)$ definita come sopra. Allora

$$\mathsf{Hoch}_\bullet(\widetilde{\Omega}(M),\Omega(M))+\mathbf{D}_\bullet(\Omega(M))=\mathsf{Hoch}_\bullet(\Omega(M))$$

e

$$\mathsf{Hoch}_\bullet(\widetilde{\Omega}(M),\Omega(M))\cap\mathbf{D}_\bullet(\Omega(M))=\mathbf{E}_\bullet(\Omega(M)),$$

lo Span dell'insieme delle cocatene con $\omega_i=1$ per qualche $i>0$. Poiché l'integrale iterato di Chen si annulla su $\mathbf{D}(\Omega^\bullet(M))$, è sufficiente mostrare che

$$\sigma\colon\frac{(\mathsf{Hoch}_\bullet(\widetilde{\Omega}(M),\Omega(M)),b)}{(\mathbf{E}_\bullet(\Omega(M)),b)}\to(\Omega^\bullet(L(M)),d)$$

è un'iniezione. L'idea fondamentale è quella di ridurci al caso $n = 1$ mediante il Teorema 2.5, che nella presente situazione si enuncia dicendo che se $\omega_0 \cdots \omega_n \in \otimes^{n+1}\Omega^\bullet(M)$ è una n-catena su $\Omega^\bullet(M)$, allora

$$\lambda_x{}^* \left(\sigma(\omega_0, \cdots, \omega_n)\right) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon_x^* \omega_0 \wedge \sigma(1, \omega_1, \cdots, \omega_i) \times \sigma(1, \omega_{i+1}, \cdots, \omega_n).$$

dove $\epsilon_x \colon \{x\} \hookrightarrow M$ è l'inclusione. Usando questo risultato, si vede che l'asserto segue dall'osservazione che l'applicazione σ

$$\omega \in \widetilde{\Omega^\bullet}(M) \to \sigma(1, \omega) \in \Omega^\bullet(L(M))$$

ha nucleo generato da $(1, 1)$. □

4.2. **Dimostrazione del Teorema 4.1.** Per completare dal dimostrazione del Teorema 4.1, resta da mostrare che se M è una varietà di dimensione finita e semplicemente connessa, allora l'applicazione di complessi $\sigma \colon (\mathsf{Hoch}_\bullet(\Omega(M)), b) \to (\Omega^\bullet(L(M)), d)$ induce un isomorfismo sulla coomologia.

Innanzitutto abbiamo bisogno della versione normalizzata del bar complex $(\mathbf{B}(P, \Omega, Q), \mathfrak{b})$. Se $f \in \Omega^0$, sia $S_i(f),\ 1 \leqslant i \leqslant n$, l'operatore su $P \otimes (\otimes^n s\Omega) \otimes Q$ definito ponendo

$$S_i(f)(p, \omega_1, \cdots, \omega_n, q) = (p, \omega_1, \cdots, \omega_{i-1}, f, \omega_i, \cdots, \omega_n, q).$$

Definiamo $\mathbf{D}(P, \Omega, Q)$ essere il sottospazio di $\mathbf{B}(P, \Omega, Q)$ generato dalle immagini degli operatori $S_i(f)$ e

$$R_i(f) = [b, S_i(f)];$$

come nel caso del complesso ciclico a barre, questo complesso è chiuso rispetto a b, ed è aciclico se Ω è connessa. Definiamo il complesso a barre normalizzato di Chen come segue:

$$(\mathbf{N}(P, \Omega, Q), \mathfrak{b}) = \frac{(\mathbf{B}(P, \Omega, Q), \mathfrak{b})}{(\mathbf{D}(P, \Omega, Q), \mathfrak{b})}.$$

Notiamo che $\mathbf{N}(P, \Omega, Q)$ è nullo nei gradi totali negativi. Esiste una filtrazione naturale di $(\mathbf{N}(P, \Omega, Q), \mathfrak{b})$ definita da

$$(p, \omega_1, \cdots, \omega_n, q) \in F^s\mathbf{N}(P, \Omega, Q)$$

se

$$|p| + |q| \geqslant s,$$

e il differenziale totale $\mathfrak{b}$ conserva questa filtrazione. Vorremmo calcolare il termine $\mathbf{E}_2$ della successione spettrale risultante. Per questo consideriamo un'aumentazione $\varepsilon \colon \Omega \to \mathbb{R}$, che dà a $\mathbb{R}$ la struttura di Ω-bimodulo. Si dimostra il seguente

Lemma 4.7. *Valgono i seguenti isomorfismi:*

$$E_1^{r,s} \simeq \sum_{i+j=r} P^i \otimes H^s(\mathbf{N}(\mathbb{R}, \Omega, \mathbb{R}), \mathfrak{b}) \otimes Q^j,$$

$$E_2^{r,s} \simeq \sum_{i+j=r} H^i(P) \otimes H^s(\mathbf{N}(\mathbb{R}, \Omega, \mathbb{R}), \mathfrak{b}) \otimes H^j(Q).$$

Se M è una varietà con punto base x, l'algebra differenziale graduata $\Omega^\bullet(M)$ ha l'aumentazione $\varepsilon(\omega) = \epsilon_x^*\omega$, con ϵ_x inclusione di $\{x\}$ in M. Abbiamo già osservato che possiamo definire gli integrali iterati di Chen per le varietà $L_x(M)$ e $P(M)$. Inoltre, con la stessa dimostrazione del teorema 4.1, abbiamo le applicazioni di complessi

$$\tilde{\sigma}\colon (\mathbf{N}(\Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M)), \mathfrak{b}) \to (\Omega^\bullet(P(M)), d),$$
$$\tilde{\sigma}\colon (\mathbf{N}(\mathbb{R}, \Omega^\bullet(M), \mathbb{R}), \mathfrak{b}) \to (\Omega^\bullet(L_x(M)), d)$$

(4.1)

definite da $\tilde{\sigma}(\omega_0, \ldots, \omega_{r+1}) = ev_0^*\omega_0 \wedge \int^C \omega_1 \cdots \omega_r \ \wedge ev_1^*\omega_{r+1}$ e tali che il seguente diagramma di complessi e omomorfismi di complessi commuti:

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbf{N}(\Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M)), \mathfrak{b}) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & (\Omega^\bullet(P(M)), d) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\mathbf{N}(\Omega^\bullet(M)), b) & \xrightarrow{\sigma} & (\Omega^\bullet(L(M)), d) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\mathbf{N}(\mathbb{R}, \Omega^\bullet(M), \mathbb{R}), \mathfrak{b}) & \xrightarrow[\tilde{\sigma}]{} & (\Omega^\bullet(L_x(M)), d)
\end{array} \tag{4.2}$$

Qui le applicazioni della prima colonna si definiscono mandando

$$(\omega_0, \cdots, \omega_{n+1}) \in \mathbf{N}(\Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M))$$

in

$$(-1)^{|\omega_{n+1}|\,(|\omega_0|+\cdots+|\omega_n|-n)}(\omega_{n+1} \wedge \omega_0, \cdots, \omega_n) \in \mathbf{N}(\Omega^\bullet(M)),$$

e

$$(\omega_0, \cdots, \omega_n) \in \mathbf{N}(\Omega^\bullet(M))$$

in

$$(\epsilon_x^*\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n, 1) \in \mathbf{N}(\mathbb{R}, \Omega^\bullet(M), \mathbb{R}).$$

Le applicazioni nella seconda colonna sono indotte dalle inclusioni

$$L_x(M) \hookrightarrow L(M) \hookrightarrow P(M).$$

Si verifica facilmente che il diagramma commuta, e che le applicazioni verticali sono applicazioni di complessi.

Lemma 4.8. *L'applicazione*

$$\tilde{\sigma}\colon (\mathbf{N}(\Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M)), \mathfrak{b}) \to (\Omega^\bullet(P(M)), d)$$

è un isomorfismo sulla coomologia.

Proof. Definiamo

$$\alpha\colon (\Omega^\bullet(M), d) \to (\mathbf{N}(\Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M)), \mathfrak{b})$$

ponendo

$$\alpha(\omega) = (\omega, \underbrace{1, \cdots, 1}_{n+1 \text{ volte}}),$$

e sia

$$\beta = {p_0}^* \colon (\Omega^\bullet(M), d) \to (\Omega^\bullet(P(M)), d)$$

l'applicazione indotta dalla valutazione in $t = 0$; notiamo che $\tilde{\sigma} \circ \alpha = \beta$. Per vedere che α è un isomorfismo sulla coomologia, facciamo uso della contrazione s su $\mathbf{N}(\Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M))$ definita da

$$s(\omega_0, \cdots, \omega_n) = (\omega_0, \cdots, \omega_n, 1).$$

Si verifica facilmente che

$$b_0 \circ s + s \circ b_0 = \mathbf{0},$$

mentre

$$b_1 \circ s + s \circ b_1 = \mathbf{1} - \alpha \circ \eta,$$

dove

$$\eta \colon (\mathbf{N}(\Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M)), \mathfrak{b}) \to (\Omega^\bullet(M), d)$$

è l'applicazione che si annulla su $\Omega^\bullet(M) \otimes (\otimes^n s\Omega^\bullet(M)) \otimes \Omega^\bullet(M)$ per $n > 0$ ed è tale che $\eta(\omega_0, \omega_1) = \omega_0 \wedge \omega_1$ per $n = 0$. Poiché $\eta \circ \alpha = \mathbf{1}$ su $\Omega^\bullet(M)$, vediamo che η è un'omotopia inversa a α.

D'altra parte, è chiaro che p_0 è un'omotopia di equivalenza liscia, e così induce un isomorfismo sulla coomologia. Poiché le frecce verticali nel diagramma

$$\begin{array}{ccc} (\Omega^\bullet(M), d) & \xrightarrow{\mathbf{1}} & (\Omega^\bullet(M), d) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \beta} \\ (\mathbf{N}(\Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M), \Omega^\bullet(M)), \mathfrak{b}) & \xrightarrow[\tilde{\sigma}]{} & (\Omega^\bullet(P(M)), d) \end{array}$$

sono isomorfismi sulla coomologia, segue che lo è pure la freccia orizzontale inferiore. □

Il prossimo passo nella dimostrazione consiste nel mostrare che la riga inferiore nel diagramma (4.2) è un isomorfismo a livello della coomologia. Per fare ciò usiamo la seguente idea di J. F. Adams (cf. [1]). Sia

$$\mathrm{e} \colon P(M) \to M \times M$$

l'applicazione

$$\mathrm{e}(\gamma) = \big(\gamma(0), \gamma(1)\big).$$

L'omomorfismo indotto sulle forme differenziali

$$\mathrm{e}^* \colon \Omega^\bullet(M \times M) \to \Omega^\bullet(P(M))$$

fa di $\Omega^\bullet(P(M))$ un $\Omega^\bullet(M \times M)$-modulo. Se filtriamo $\Omega^\bullet(P(M))$ ponendo

$$F^s\Omega^\bullet(P(M)) = \bigoplus_{r \geqslant s} (\Omega^r(M \times M)\Omega^\bullet(P(M)))$$

la successione spettrale associata è esattamente la successione spettrale di Serre, e poiché M è semplicemente connessa, possiamo verificare che il termine $\mathbf{E}_2$ è

$$E_2^{r,s} = H^r(M \times M, \mathbb{R}) \otimes H^s(L_x(M), \mathbb{R}).$$

L'applicazione $\tilde{\sigma}\colon (\mathbf{N}(\Omega^\bullet(M),\Omega^\bullet(M),\Omega^\bullet(M)),\mathfrak{b}) \to (\Omega^\bullet(P(M)),d)$ conserva le filtrazioni definite su $(\mathbf{N}(\Omega^\bullet(M),\Omega^\bullet(M),\Omega^\bullet(M)),\mathfrak{b})$ e $(\Omega^\bullet(P(M)),d)$ e così induce un'applicazione di successioni spettrali che sul termine $E_2^{r,s}$ vale

$$\mathbf{1}\otimes\tilde{\sigma}\colon H^r(\Omega^\bullet(M)\otimes\Omega^\bullet(M),d\otimes d)\otimes H^s(\mathbf{N}(\mathbb{R},\Omega^\bullet(M),\mathbb{R}),\mathfrak{b}) \to \\ \to H^r(M\times M)\otimes H^s(L_x(M)).$$

Sul termine $\mathbf{E}_\infty$, l'applicazione di successioni spettrali è

$$\tilde{\sigma}\colon H^*(\mathbf{N}(\Omega^\bullet(M),\Omega^\bullet(M),\Omega^\bullet(M)),\mathfrak{b}) \to H^*(P(M)),$$

e quest'applicazione è un isomorfismo a norma del Lemma 4.8. L'applicazione di successioni spettrali è anche un isomorfismo sui termini $E_2^{r,0}$. Usiamo ora il teorema del confronto di Zeeman per le successioni spettrali, che si applica poiché le successioni spettrali provengono da filtrazioni finite e dunque convergono. Ciò mostra che l'applicazione di successioni spettrali è un isomorfismo sui termini $E_2^{0,s}$, in altre parole, che

$$\tilde{\sigma}\colon H^*(\mathbf{N}(\mathbb{R},\Omega^\bullet(M),\mathbf{R})),\mathfrak{b}) \to H^*(L_x(M))$$

è un isomorfismo.

La verifica che la colonna centrale è un isomorfismo sulla coomologia è simile: filtriamo il complesso di Hochschild $(\mathbf{N}(\Omega^\bullet(M)),b)$ come segue

$$(\omega_0,\cdots,\omega_n)\in F^t\mathbf{N}(\Omega^\bullet(M))$$

se e solo se

$$|\omega_0|\geqslant t.$$

La successione spettrale definita da questa filtrazione ha

$$H^r(\Omega^\bullet(M),d)\otimes H^s(\mathbf{N}(\mathbb{R},\Omega^\bullet(M),\mathbb{R}),\mathfrak{b})$$

come termine $\mathbf{E}_2$. Se $p_0\colon L(M)\to M$ è l'applicazione data dalla valutazione in $t=0$, l'omomorfismo indotto ${p_0}^*\colon \Omega^\bullet(M)\to\Omega^\bullet(L(M))$ fa di $\Omega^\bullet(L(M))$ un $\Omega^\bullet(M)$-modulo. Se filtriamo $\Omega^\bullet(L(M))$ ponendo

$$F^t\Omega^\bullet(L(M)) = \bigoplus_{u\geqslant t}(\Omega^u(M)\Omega^\bullet(L(M))),$$

la successione spettrale associata è la successione spettrale di Serre con

$$H^r(M)\otimes H^s(L_x(M))$$

come termine $\mathbf{E}_2$, che converge a $H^{r+s}(L(M))$. Ancora una volta $\tilde{\sigma}$ conserva la filtrazione e così definisce un'applicazione di successioni spettrali che sul termine $E_2^{r,s}$ è data da

$$\mathbf{1}\otimes\tilde{\sigma}\colon H^r(\Omega^\bullet(M),d)\otimes H^s(\mathbf{N}(\mathbb{R},\Omega^\bullet(M),\mathbb{R}),\mathfrak{b})\to H^r(M)\otimes H^s(L_x(M)).$$

Per i risultati precedenti, questo è un isomorfismo sui termini $\mathbf{E}_2$, e applicando il teorema del confronto di Zeeman ancora una volta, deduciamo che

$$\sigma\colon (\mathbf{N}(\Omega^\bullet(M)),b)\to(\Omega^\bullet(L(M)),d)$$

è un isomorfismo sulla coomologia, e ciò completa la dimostrazione.

Il teorema di Chen viene spesso utilizzato nella seguente forma.

Corollario 4.9. *Sia $\mathcal{M} \subset \Omega^\bullet(M)$ un modello di Sullivan per M, ovvero una sottoalgebra differenziale graduata di $\Omega^\bullet(M)$ tale che $H^j(\mathcal{M}) \simeq H^j(M)$ per ogni j. Allora l'omologia di Hochschild di $\mathcal{M}$ è isomorfa alla coomologia di $L(M)$.*

Proof. L'asserto discende dal teorema di Chen e dal fatto che l'omologia di Hochschild di $\mathcal{M}$ è isomorfa a quella di $\Omega^\bullet(M)$. □

5. La coomologia di de Rham di $L(S^n)$

Come applicazione del teorema di Chen, calcoliamo la coomologia degli spazi di lacci liberi su sfere S^n, per $n > 1$. Il Corollario 4.9 è particolarmente utile; in questo caso infatti un modello di Sullivan $\mathcal{M}$ per S^n è l'algebra generata da una fissata forma di volume normalizzata ω. Quindi nel complesso di Hochschild di $\mathcal{M}$ abbiamo solo elementi del tipo

$$u_k = (1, \underbrace{\omega, \dots, \omega}_{k})$$
$$v_k = (\omega, \underbrace{\omega, \dots, \omega}_{k}).$$

Dalle equazioni $d\omega = 0$ e $\omega \wedge \omega = 0$ segue che

$$b(u_k) = \big((-1)^{(k-1)(n-2)} - 1\big) v_{k-1},$$
$$b(v_k) = 0.$$

In termini di integrali iterati, si devono considerare

- le $(n-2)k$-forme su $L(S^{n-1})$ assegnate da
$$\sigma(u_k) = \int^C \underbrace{\omega \cdots \omega}_{k};$$
- le $\big((n-2)(k+1)+1\big)$-forme su $L(S^{n-1})$ assegnate da
$$\sigma(v_k) = ev_0^* \omega \wedge \int^C \underbrace{\omega \cdots \omega}_{k}.$$

Quindi, se n è pari o n e k sono dispari, allora la forma $\sigma(u_k)$ rappresenta un elemento non banale di $H^*(L(S^{n-1}); \mathbb{R})$. Se n è pari o n è dispari e k è pari, allora la forma $\sigma(v_k)$ rappresenta un elemento non banale di $H^*(L(S^{n-1}); \mathbb{R})$. Un piccolo conto mostra inoltre che se n è pari, allora $k!\, u_k = {u_1}^k$, mentre se n è dispari, allora $k!\, u_{2k} = {u_2}^k$ e $k!\, u_{2k+1} = u_1 \wedge {u_2}^k$. Possiamo dunque concludere:

Teorema 5.1. *L'algebra $H^*(L(S^{n-1}); \mathbb{R})$ è l'algebra associativa e commutativa in senso graduato presentata come segue:*

i. *se n è pari, allora i generatori sono $ev_0^*\omega$ in grado $n-1$ e u_1 in grado $n-2$ con la sola relazione $ev_0^*\omega \wedge ev_0^*\omega = 0$;*
ii. *se n è dispari, allora i generatori sono $u_1 \wedge u_{2s}$ in grado $(2s+1)(n-2)$ e v_{2k} in grado $(2s+1)(n-2)+1$, con $k, s \in \mathbb{N}$, e le relazioni sono assegnate dalla condizione che il prodotto di due qualunque generatori è nullo.*

6. Coomologia equivariante

Sia X una varietà (anche infinito dimensionale), G un gruppo di Lie che agisce su X e sia $X_G = EG \times_G X$ è la costruzione di Borel. Si definisce la coomologia equivariante di X come

$$H^\bullet_G(X) := H^\bullet(X_G)$$

In particolare per un punto $H^\bullet_G(pt) = H^\bullet(E_G/G) = H^\bullet(B_G)$, e nel caso $G = S^1$ si ha $H^\bullet_{S^1}(pt) = H^\bullet(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{R}[u]$, dove u è una indeterminata di grado 2.

Definizione 6.1. Un *complesso ciclico* $(C_\bullet, b, B)$ è una collezione di spazi vettoriali C_i con operatori $b\colon C_i \to C_{i+1}$ e $B\colon C_i \to C_{i-1}$ tali che $b^2 = B^2 = b\circ B + B\circ b = 0$. L'omologia ciclica di un complesso ciclico è definita come $H^\bullet(C_\bullet[u], b + uB)$ dove u è una indeterminata di grado 2.

Sia X una varietà con una azione $\phi\colon S^1 \times X \to X$ di S^1 e sia T campo vettoriale generatore di questa azione. Indichiamo con $\Omega^\bullet_T(X)$ il complesso delle forme differenziali invarianti, ovvero il nucleo della derivata di Lie $\mathcal{L}_T$. Osserviamo che $(\Omega^\bullet_T(X), d, i_T)$ è un complesso ciclico. Un risultato classico dice che

Teorema 6.2 (Cartan)**.**

$$H^\bullet_{S^1}(X) = H^\bullet(\Omega^\bullet_T(X)[u], d + ui_T)$$

dove u è una indeteriminata di grado 2.

Per poter reinterpretare la coomologia equivariante in termini del complesso di Hochschild, introduciamo l'operatore I_T su $\Omega^\bullet(X)$ definito come $I_T = \pi_* \circ \phi^*$ dove π_* è l'integrazione sulle fibre della proiezione $\pi\colon S^1 \times M \to M$. È facile vedere che $(\Omega^\bullet(X), d, I_T)$ è un complesso ciclico e inoltre si ha

Teorema 6.3 ([4])**.**

$$H^\bullet_{S^1}(X) = H^\bullet(\Omega^\bullet_T(X)[u], d + ui_T) = H^\bullet(\Omega^\bullet(X)[u], d + uI_T)$$

dove u è una indeteriminata di grado 2.

Se A è un'algebra differenziale graduata, allora è possibile definire un operatore B (detto operatore ciclico di Connes) che rende $(\mathsf{Hoch}_\bullet(A), b, B)$ un complesso ciclico:

$$B(\omega_0, \cdots, \omega_r) := \sum_{i=0}^{r} (-1)^{(\epsilon_{i-1}-1)(\epsilon_k - \epsilon_{i-1})} (1, \omega_i, \cdots, \omega_r, \omega_0, \cdots, \omega_{i-1})$$

Teorema 6.4. *Sia M una varietà. L'integrale iterato di Chen dà luogo ad un morfismo di complessi ciclici*

$$\sigma\colon (\mathsf{Hoch}_\bullet(\Omega(M)), b, B) \to (\Omega^\bullet(L(M)), d, I_T)$$

e quindi ad un isomorfismo tra la coomologia ciclica $H^\bullet(\mathsf{Hoch}_\bullet(\Omega(M))[u], b + uB)$ di $\Omega^\bullet(M)$ e $H^\bullet(\Omega^\bullet(L(M))[u], d + uI_T)$ coomologia equivariante di $L(M)$.

Proof. Basta dimostrare che $I_T \circ \sigma = \sigma \circ B$. Osserviamo che

$$I_T\sigma(\omega_0, \cdots, \omega_r) = \int_{I \times \triangle^r} i_{\partial/\partial s}\omega_0(s) \wedge i_{\partial/\partial t_1}\omega_1(s+t_1) \cdots \wedge i_{\partial/\partial t_r}\omega_r(s+t_r)\, ds\, dt_1 \cdots dt_r$$

DIvidiamo $I \times \triangle^r$ nei simplessi

$$R_i = \{(s, t_1, \ldots, t_r) \in I \times \triangle^r \mid 0 \le s+t_i \le \cdots \le s+t_r \le s \le s+t_1 \le \cdots \le s+t_{i-1} \le 1\}$$

dove $s + t_k$ vengono considerati modulo 1. Osserviamo che l'integrale fatto su R_i è uguale (a meno di un segno) a $\sigma(1, \omega_i, \cdots, \omega_r, \omega_0, \cdots, \omega_{i-1})$ e quindi $I_T \circ \sigma = \sigma \circ B$. □

References

[1] J. F. Adams "On the cobar construction" *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, (42):409–412, 1956.
[2] Pierre Cartier "Jacobiennes généralisées, monodromie unipotente et intégrales itérées" *Astérisque*, 161–162(687):31–52, Nov. 1987 1988.
[3] K. Chen "Iterated integrals of differential forms and loop space homology" Ann. of Math. **97** (1973), 217–246
[4] E. Getzler, J. D. S. Jones, S. Petack "Differential forms on loop spaces and the cyclic bar complex" Topology **30** (1991), 339–371
[5] Loday "Cyclic homology" Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 301, Springer-Verlag (1992)
[6] B. Ndombol, J. -C. Thomas "On the cohomology algebra of free loop spaces" Topology **41** (2002), no. 1, 85–106