dg-categorie giocattolo

Nei primi due seminari dovremmo essere arrivati a convincerci di questo fatto: a partire da una dg-categoria $\mathcal{A}$ sia possibile costruire una categoria triangolata $\mathrm{Triang}(\mathcal{A})$, la categoria triangolata libera generata da $\mathcal{A}$. Un esempio classico di questa costruzione (ed in effetti quello che la motiva: la costruzione generale altro non è che la parafrasi di questo caso particolare) si ha con $\mathcal{A}$ la categoria degli A-moduli (i cui morfismi sono complessi con il differenziale banale), per qualche anello commutativo con unità A. In questo caso si trova $\mathrm{Triang}(A\text{-mod}) = D^b(C(A\text{-mod}))$, la categoria derivata (limitata) dei complessi di A-moduli.

Vediamo qualche esempio "più piccolo" di dg-categoria. Il più piccolo possibile è ovviamente quello con un solo oggetto: in tal caso $\mathcal{A}$ è semplicemente una dg-algebra graduata. In particolare ogni algebra graduata $A^\bullet$ può essere pensata come una dg-categoria con un solo oggeto (con differenziale banale). L'assenza di differenziale in $A^\bullet$ permette di costruire la seguente variante con molti oggetti: sia S un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{Z}$; indichiamo con $A^\bullet_S$ la dg-categoria che ha come oggetti gli elementi di S, e come morfismi

$$\mathrm{Hom}_{A^\bullet_S}(i,j) = A^{j-i},$$

il sottomodulo degli elementi di grado $(j-i)$ di $A^\bullet$.

Per quel che dobbiamo dire sugli spazi proiettivi ci interesserà il seguente esempio: se V è uno spazio vettoriale complesso di dimensione $n+1$, prendiamo $A^\bullet = \mathrm{Sym}^\bullet(V^*)$ ed $S = \{-n, \ldots, -1, 0\}$. Con questi ingredienti si costruisce una categoria triangolata

$$\mathrm{Triang}(\mathrm{Sym}^\bullet(V^*)_{[-n,0]})$$

Osserviamo che

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Sym}^\bullet(V^*)_{[-n,0]}}(i) = \mathbb{C}, \qquad \text{per ogni} \quad i = -n, \ldots, -1, 0$$

e che

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sym}^\bullet(V^*)_{[-n,0]}}(i,j) = 0, \qquad \text{se} \quad i > j,$$

cioè i morfismi "vanno in una sola direzione".

La risoluzione di Beilinson

Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ lo spazio proiettivo su uno spazio vettoriale complesso V di dimensione $n+1$. C'è un isomorfismo canonico

$$V^* \cong H^0(\mathbb{P}; \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$$

Tensorizzando la successione di Eulero

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}} \to 0$$

per $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$ si ricava la successione esatta corta di fasci di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$-moduli localmente liberi

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \to V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}}(-1) \to 0.$$

La fibra sul punto $[v]$ del fibrato vettoriale associato a $\mathcal{T}_{\mathbb{P}}(-1)$ è $V/\mathbb{C} \cdot v$.

La successione esatta lunga in coomologia fornisce

$$0 \to H^0(\mathbb{P}; \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)) \to V \otimes H^0(\mathbb{P}; \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \to H^0(\mathbb{P}; \mathcal{T}_{\mathbb{P}}(-1)) \to H^1(\mathbb{P}; \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)),$$

e dunque un isomorfismo canonico

$$V \cong H^0(\mathbb{P}; \mathcal{T}_{\mathbb{P}}(-1))$$

Dalla formula di Kunneth si ha allora un isomorfismo canonico

$$H^0(\mathbb{P} \times \mathbb{P}; \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{P}}(-1)) \cong \mathrm{End}(V),$$

dove $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} = p_1^* \mathcal{F} \otimes p_2^* \mathcal{G}$ e $p_i \colon \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ sono le proiezioni. uesto isomorfismo si realizza esplicitamente come segue:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{P}}(-1) = \mathcal{H}om(p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1), p_2^* \mathcal{T}_{\mathbb{P}}(-1)),$$

dunque le sezioni globali di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{P}}(-1)$ sono gli omomorfimi di fasci tra $p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$ e $p_2^* \mathcal{T}_{\mathbb{P}}(-1)$, ovvero il dato, per ogni $([v], [w]) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ di un morfismo lineare

$$\varphi_{[v],[w]} \colon \mathbb{C} \cdot v \to V/(\mathbb{C} \cdot w)$$

All'endomorfismo $\varphi \colon V \to V$ corrisponde il morfismo di fasci

$$\sigma_\varphi \colon v \mapsto \varphi(v) \bmod (\mathbb{C} \cdot w).$$

Notiamo che il luogo degli zeri Z_φ della sezione σ_φ è l'insieme delle coppie $([v], [w])$ tali che $\varphi(v)$ è linearmente dipendente da w. In particolare, Z_{id_V} è la diagonale di $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$.

Poiché $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{P}}(-1)$ è localmente libero, la contrazione con una sezione globale σ_φ induce la risoluzione di Koszul

$$\begin{aligned} 0 \to \wedge^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \boxtimes \Omega^1_{\mathbb{P}}(1)) \to \wedge^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \boxtimes \Omega^1_{\mathbb{P}}(1)) \to \cdots \to \\ \to \wedge^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \boxtimes \Omega^1_{\mathbb{P}}(1)) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \boxtimes \Omega^1_{\mathbb{P}}(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P} \times \mathbb{P}} \to \mathcal{O}_{Z_\varphi} \to 0. \end{aligned}$$

Prendendo $\varphi = \mathrm{id}_V$ si ottiene la risoluzione di Beilinson:

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n) \boxtimes \Omega^n_{\mathbb{P}}(n) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1-n) \boxtimes \Omega^{n-1}_{\mathbb{P}}(n-1) \to \cdots \to \\ \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2) \boxtimes \Omega^2_{\mathbb{P}}(2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \boxtimes \Omega^1_{\mathbb{P}}(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(0) \boxtimes \Omega^0_{\mathbb{P}}(0) \to \mathcal{O}_\Delta \to 0. \end{aligned}$$

La formula di proiezione e le sue conseguenze

Consideriamo adesso un diagramma di varietà proiettive

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

e un fascio coerente $\mathcal{K}$ su Z. Allora abbiamo un morfismo tra le categorie derivate
dei fasci coerenti

$$\begin{aligned} \Phi^{\mathcal{K}}_{f,g} \colon D^b(Coh(X)) &\to D^b(Coh(Y)) \\ \mathcal{F} &\mapsto g_*(\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_Z} f^*\mathcal{F}) \end{aligned}$$

dove, ovviamente, push-forward, pull-back e prodotto tensoriale sono derivati. Volendo evidenziare questo fatto dovremmo scrivere la meno rassicurante espressione

$$\Phi^{\mathcal{K}}_{f,g}(\mathcal{F}) = \mathbf{R}g_*(\mathcal{K} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{O}_Z} \mathbf{L}f^*\mathcal{F}).$$

Nel caso particolare

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

si ha la formula di proiezione:

$$\Phi^{\mathcal{K}}_{f,f} = f_*(\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{O}_X} -$$

ovvero, più esplicitamente,

$$f_*(\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_Z} f^*\mathcal{F}) = f_*(\mathcal{K}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}.$$

Nel caso particolare

$$\begin{tikzcd} & X \times X \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

con $\mathcal{K} = \mathcal{O}_\Delta$, dove Δ indica la diagonale di $X \times X$ si ha invece

$$\Phi^{\mathcal{O}_\Delta}_{p_2,p_1} = \mathrm{id}_{D^b(Coh(X))},$$

ovvero

$$p_{1*}(\mathcal{O}_\Delta \otimes_{\mathcal{O}_{X\times X}} p_2^*\mathcal{F}) = \mathcal{F}.$$

Come ultimo esempio consideriamo una sorta di ibrido tra i due casi appena visti:

$$\begin{tikzcd}
 & X \times X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\
X & & X
\end{tikzcd}$$

con $\mathcal{K} = p_2^*\mathcal{G}$, dove G è un fascio coerente su X. In questo caso si ha (dalla formula di proiezione)

$$\Phi^{p_2^*\mathcal{G}}_{p_1,p_1} = H^*(X,\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{C}} -$$

dove si è usato $p_{1*}p_2^*(\mathcal{G}) = H^*(X,\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$. Notiamo che $\Phi^{p_2^*\mathcal{G}}_{p_1,p_1}$ trasforma un fascio coerente $\mathcal{F}$ in una somma diretta di $\dim(H^*(X,\mathcal{G}))$ copie di $\mathcal{F}$. Notiamo che, sfruttando la simmetria del prodotto tensoriale, possiamo scrivere l'azione di $\Phi^{p_2^*\mathcal{G}}_{p_1,p_1}$ come

$$p_{1*}(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) = H^*(X,\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{F}.$$

Ora mettiamo insieme queste formule e la risoluzione di Beilinson, per $X = \mathbb{P}$. Allora $\mathcal{O}_\Delta$ è risolto da un complesso i cui termini sono del tipo $\mathcal{O}(-i) \boxtimes \Omega^i(i)$, con $i = 0,\ldots,n$. Ne segue che ogni fascio coerente $\mathcal{F}$ su $\mathbb{P}$ è (a meno di isomorfismo) nella sottocategoria triangolata di $D^b(Coh(\mathbb{P}))$ generata dagli oggetti

$$\begin{aligned}
p_{1*}(\mathcal{O}(-i) \boxtimes \Omega^i(i) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}\times\mathbb{P}}} p_2^*\mathcal{F}) &= p_{1*}(\mathcal{O}(i) \boxtimes (\Omega^i(i) \otimes_{\mathcal{O}_\mathbb{P}} \mathcal{F})) \\
&= \mathcal{O}(-i) \otimes_{\mathbb{C}} H^*(\mathbb{P}, \Omega^i(i) \otimes_{\mathcal{O}_\mathbb{P}} \mathcal{F})),
\end{aligned}$$

e dunque nella sottocategoria triangolata di $D^b(Coh(\mathbb{P}))$ generata dagli oggetti $\mathcal{O}(i)$, con $i = -n,\ldots,0$.

Conclusione

Poiché i fasci $\mathcal{O}(i)$ sono localmente liberi, si ha

$$\mathrm{Ext}^q(\mathcal{O}(i),\mathcal{O}(j)) = H^q(\mathbb{P};\mathcal{O}(j-i)).$$

Gli unici gruppi Ext possibilmente non banali sono dunque Ext^0 ed Ext^n. Ma $H^n(\mathbb{P};\mathcal{O}(j-i))$ è il duale di $H^0(\mathbb{P};\mathcal{O}(i-j-n-1))$ e dunque affinché Ext^n sia non banale deve essere $i-j \geq n+1$ e questo non è mai possibile con $i,j \in \{-n,\ldots,-1,0\}$. Dunque

$$\mathrm{Ext}^q(\mathcal{O}(i), \mathcal{O}(j)) = 0, \qquad \text{per ogni} \quad q \neq 0, \quad i, j = -n, \ldots, -1, 0.$$

In altre parole, per questi valori di i, j si ha

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(i), \mathcal{O}(j)) \simeq H^0(\mathbb{P}; \mathcal{O}(j-i)) \cong \mathrm{Sym}^{j-i}(V^*)$$

e ne segue l'equivalenza di categorie triangolate

$$D^b(Coh(\mathbb{P})) = \mathrm{Triang}(\mathrm{Sym}^\bullet(V^*)_{[-n,0]})$$