Stabilità e metriche a curvatura scalare costante su varietà algebriche

Claudio Arezzo

Roma, 11 Ottobre 2005

Metriche di Einstein, Kcsc ed estremali

Data una varietà di Kähler compatta e una classe di coomologia $[\omega]$ di una forma di Kähler esiste un rappresentante $\omega_\phi = \omega + i\partial\bar{\partial}\phi$ di curvatura scalare costante (Kcsc) ?

Se $[\omega] = \lambda c_1(M)$ un rappresentante Kcsc è automaticamente di Einstein (e viceversa)

$$\rho_\phi = \lambda\omega_\phi \ ,$$

dove ρ è la forma di Ricci della metrica e λ è obbligata ad avere il segno $(+,-,0)$ della curvatura scalare.

In generale, se ω ha curvatura scalare costante, questa costante è bloccata dalla geometria:

$$Scal(\omega) = \frac{nc_1(M) \cup [\omega]^{n-1}([M])}{[\omega]^n([M])} \ .$$

Più in generale Calabi ha proposto come metriche "migliori" le cosidette metriche *estremali*, cioè i punti critici del funzionale

$$\mathcal{C}(\phi) = \int_M (Scal_\phi)^2 \frac{\omega_\phi^n}{n!} ,$$

la cui equazione di Eulero-Lagrange è

$$\bar{\partial}(\nabla^{(1,0)} Scal) = 0$$

Per vari motivi fisici (eq. di Einstein, congettura massa positiva di Hawking...), geometrici (uniformizzazione in dim > 1), e variazionali queste dovrebbero davvero essere le metriche più interessanti sulle varietà kahleriane. Tuttavia siamo molto indietro...

In generale non esistono. Matsushima-Lichnerovitz

La cosa certa è che *quando* esistono sono uniche:

- Calabi-Bando-Mabuchi, per KE, 1954-1987.
- Donaldson, per classi intere e Kcsc, 2001.
- Chen-Tian, per metriche estremali in classi qualunque, 2005.

Per l'esistenza:

- Per KE, Soluzione della Congettura di Calabi per $c_1(M) \leq 0$, Aubin-Yau, 1976.

- Per KE, Soluzione della Congettura di Calabi per superfici, Tian, 1990. (KE sse $Aut(M)$ riduttivo sse M è lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in k punti in posizione generale, $3 \leq k \leq 8$).

- Per KE, $c_1(M) > 0$ e $dimM > 2$, alcuni esempi isolati (ipersuperficie di Fermat, Nadel-Tian, 1900-1997),varietà toriche, e alcune famiglie (intersezioni di quadriche, ipersuperfici con simmetrie, Ar-Ghigi-Pirola, 2004).

- Classificazione delle superfici che ammettono una K $csc = 0$, LeBrun-Kim-Pontecorvo-Rollin-Singer, 1990-2004.

- Alcuni esempi sporadici, proiettivizzati di fibrati, superfici che hanno submersioni su curve a fibre di genere almeno 2 (Hong, Fine, 2004)...

Curvatura scalare come mappa momento

Se (M, ω) è una varietà simplettica e K è un gruppo di Lie compatto che agisce su M per diffeomeorfismi simplettici, la mappa momento dell'azione è una mappa K-equivariante $\mu \colon M \to k^*$ t.c.

$$d < \mu, a > (v) = \omega(X_a, v), \ a \in k \ , v \in TM \ ,$$

dove X_a è il campo vettoriale su M indotto dall'azione del gruppo $\{exp(ta)\} \subset K$.

Se 0 è un valore regolare di μ allore il quoziente $\mu^{-1}(0)/K$ è una varietà simplettica (quoziente simplettico di Marsden-Weinstein).

La cosa per noi fondamentale è che la curvatura scalare è una mappa momento in dimensione infinita:

Siano $\mathcal{J}_\omega$ lo spazio delle strutture complesse ω-compatibili e K il gruppo dei diffeomorfismi hamiltoniani di (M, ω) (la cui algebra di Lie è formata dai campi vettoriali hamiltoniani, naturalmente identificata con $C^\infty(M, R)_0$), che agisce su $\mathcal{J}_\omega$, $J \in \mathcal{J}_\omega$, $\phi_*(J) = d\phi^{-1} J d\phi$. Lo spazio tangente a $\mathcal{J}_\omega$ ha una struttura simplettica naturale definita dalla metrica

$$< h, h' >_J = \int_M g_J(h, h')\omega^n \ ,$$

dove h, h' sono endomorfismi dello spazio tangente che anti-commutano con J e simmetrici rispetto a g_J.

Con conti espliciti (non difficili) si vede che la mappa momento di questa azione su questa varietà simplettica è $\mu\colon \mathcal{J}_\omega \to (C^\infty(M, R)_0)^*$

$$\mu(J) = Scal(g_J) - \underline{Scal(g_J)} \ .$$

Quindi (Donaldson, 1998)

- Lo spazio dei moduli di metriche Kcsc nella classe $[\omega]$ è il quoziente simplettico $\mu^{-1}(0)/K$.

Se $[\omega]$ è una classe intera, abbiamo un fibrato lineare ampio $L \to M$ e possiamo confrontare questa riduzione simplettica con la GIT applicata alla varietà polarizzata (M, L^k).

In analogia coi casi finito dimensionali e di fibrati, Yau-Donaldson-Tian hanno congetturato che anche se i nostri spazi non hanno dimensione finita, l'esistenza della metrica migliore deve corrispondere ad un'opportuna stabilità della varietà polarizzata.

Approssimazioni finito dimensionali

Se guardiamo la varietà polarizzata immersa e applichiamo qualunque tipo di GIT troveremo comunque sempre la "migliore" metrica tra quelle indotte dal proiettivo di quella dimensione, mentre sappiamo (Kobayashi, Chern, Hano) che le metriche Kcsc non sono **MAI** indotte da un proiettivo (tranne casi di spazi omogenei).

Tuttavia Tian (1989) ha dimostrato che le metriche proiettivamente indotte approssimano tutte le metriche con la convergenza C^∞ prendendo potenze $L^k, k \to \infty$.

Ad oggi conosciamo due versioni di stabilità implicate dall'esistenza della metrica Kcsc.

- Tian $\to$ "K-stabiltà". È una nozione essenzialmente analitica.

- Mabuchi-Donaldson $\to$ (M, L) asintoticamente Chow-stabile.

Stabilità di Chow

Entriamo nel dettaglio del risultato di Donaldson-Mabuchi.

Data la mappa momento, un punto $z \in M$ si dice (poli-)stabile rispetto ad L ($c_1(L) = [\omega]$) se esiste $g \in G = K^{\mathbb{C}}$ t.c. $\mu(g \cdot z) = 0$.

Se L è molto ampio possiamo immergere M nel proiettivo e l'azione di G si estende ad un'azione lineare su $\mathbb{P}^N$. GIT definisce un punto $z \in M \subset \mathbb{P}^N$ (poli-) stabile se l'orbita $G \cdot z$ (nell'affine) è chiusa.

Grazie al principio di Kempf-Ness le due nozioni sono equivalenti.

Applichiamo questo principio alla successione di punti di Chow delle varietà polarizzate (M, L^k):

$$\begin{array}{rcl} Chow(X, L^k) & = & \{\Lambda \in Gr(N_k - n, N_k + 1) | \Lambda \cap M \neq \emptyset\} \\ & \subset & \mathbb{P}H^0(Gr(N_k - n, N_k + 1), \mathbb{O}(d)) \end{array}$$

dove $N_k = dim H^0(L^k) - 1$, e $d = k^n \int_M c_1(L)^n$.

Questi li vediamo come punti della varietà di Chow

$$\mathbb{CHOW}_{\mathbb{P}^{N_k}}(n,d) = \{M^n \subset \mathbb{P}^{N_k} | d = k^n \int_M c_1(L)^n\} \ .$$

Attenzione: questi oggetti non sono varietà. Tuttavia possiamo trascurare questo problema perchè guarderemo sempre una singola orbita, che è liscia.

La varietà polarizzata si dice Chow-polistabile se $Chow(X,L)$ è polistabile rispetto all'azione naturale di

$SL(N+1)$ su $(\mathbb{CHOW}_{\mathbb{P}^N}(n,d),\mathbb{O}(1))$. "Asintoticamente" se lo è definitivamente in k.

(Chow polistabile implica Hilbert polistabile).

Essendo una varietà proiettiva ha una struttura simplettica. Tuttavia vi è un'altra "forma di Kähler " Ω (il Deligne pairing) che dà informazioni molto utili (in realtà è solo una corrente continua definita positiva ma basta a far funzionare la macchina simplettica, non facile!).

La mappa momento rispetto ad Ω per quest'azione è

$$\mu_\Omega(Chow(X, L^k)) = \frac{1}{2\pi i} \int_M \left(\frac{zz^*}{|z|^2} - \frac{1}{N_k + 1}\right) \frac{\omega_{FS}^n}{n!} \ ,$$

che è un elemento di $su(N_k + 1)$. È una specie di *baricentro* della varietà proiettiva.

Gli zeri di questa mappa momento indicano quindi embedding (e metriche) molto speciali che si dicono *bilanciate*. Per concludere abbiamo (Zhang, Luo)

Teorema 1. $Chow(X, L)$ *è polistabile se solo se esiste un embedding bilanciato nel proiettivo associato ad* L.

Metriche bilanciate come migliori proiettive

Assumendo la Chow-stabilità asintotica, abbiamo quindi una successione di metriche bilanciate. Queste metriche sono interessanti di per sè. Per esempio è possibile stimare i primi autovalori del laplaciano delle metriche di Kähler ottenendo risultati ottimali (Ar-Ghigi-Loi, 2005).

L'unicità (a meno di automorfismi) di tali metriche è nota (Donaldson, se $Aut(M)$ è discreto, Ar-Loi, in generale).

Tuttavia in generale non sappiamo se tale successione (riscalata) converga.

Ma, SE converge, abbiamo vinto (Donaldson):

Teorema 2. *Se una successione di metriche bilanciate riscalata converge, il limite è Kcsc.*

Sappiamo invece invertire il processo (Donaldson, 2000):

Teorema 3. *Se* (M, L) *ha una metrica Kcsc in* $c_1(L)$*, allora esiste una successione di bilanciate che, riscalata, ci converge sopra.*

Corollario 1. *Se* (M, L) *ha una metrica Kcsc in* $c_1(L)$, *allora* (M, L) *è asintonticamente Chow poli-stabile.*

Scoppiamenti e risoluzioni

Spero che tutto questo vi sia piaciuto... Tuttavia nè i risultati attuali (è molto, ma molto difficile controllare la stabilità di un punto di Chow...) nè l'eventuale soluzione della Congettura "Kcsc sse stabile" porterebbero facilmente nuovi esempi. È quindi naturale cercare di trovare esempi con costruzioni geometriche.

In collaborazione con F. Pacard (Univ. Parigi XII) abbiamo studiato che succede scoppiando e desingolarizzando una varietà in punti che verificano le seguenti proprietà:

- M orbifold compatto di dimensione $n \geq 2$ con al più singolarità isolate, (quindi ogni punto p_ℓ, $\ell = 1, \ldots, m$ ha un intorno biolomorfo a $\mathbb{C}^n / \Gamma_\ell$, con Γ_ℓ sottogruppo finito di $U(n)$).

- M ha una metrica *orbifold* Kcsc ω_M e $\mathbb{C}^n / \Gamma_\ell$ ha una risoluzione ALE N_ℓ di curvatura scalare nulla.

- $Aut(M)$ discreto.

Teorema 4. *Esiste* $\varepsilon_0 > 0$, *tale che, per ogni* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, *esiste* $\tilde{\omega}_\varepsilon$ *Kähler csc Kähler su* $M \sqcup_{p_1,\varepsilon} N_1 \sqcup_{p_2,\varepsilon} \cdots \sqcup_{p_m,\varepsilon} N_m$. *Inoltre, se* ω_M *ha curvatura scalare positiva (resp. negativa) allora* $\tilde{\omega}_\varepsilon$ *ha curvatura scalare positiva (resp. negativa).*

Corollario 2.
- *Qualunque scoppiamento in insiemi finiti di punti di una varietà compatta con automorfismi discreti Kcsc ha una famiglia di metriche Kcsc dello stesso segno di quella di partenza.*

- *Qualunque scoppiamento in insiemi finiti di punti di una varietà compatta con automorfismi discreti, di curvatura scalare zero ma $c_1(M) \neq 0$ ha una famiglia di metriche di curvatura scalare zero.*

- *Se* Γ_ℓ *è :*

  (i) ciclico; (Calderbank-Singer hanno dimostrato l'esistenza di una metrica ALE a curvatura scalare nulla sulla risoluzione di Hirzebruch-Jung,)

(ii) oppure incluso in $SU(2)$; *(Joyce, risolvendo la Congettura di Calabi non-compatta ALE, ha dimostrato l'esistenza di una metrica* Ricci-piatta *sulla risoluzione crepante liscia.)*

allora si può desingolarizzare tenendo la curvatura scalare costante.

- *Ogni superficie di tipo generale ha una metrica di curvatura scalare costante.*

L'idea della dimostrazione è quella di costruire una soluzione approssimata incollando la metrica sulla base con la metrica ALE e poi deformarla a una metrica Kcsc. Questa strategia si basa sull'analisi dell'operatore ellittico del quart'ordine ("di Lichnerovitz")

$$\mathbb{L}_M := -\frac{1}{2}\Delta_M^2 - \mathrm{Ric}_M \cdot \nabla_M^2$$

che dà la linearizzazione dell'applicazione $\phi \rightarrow Scal(\omega_\phi)$. Per una metrica a curvatura scalare costante il nucleo di questo operatore è dato dalle funzioni ξ t.c. $\nabla^{(1,0)}\xi$ è un campo olomorfo.

Quindi se gli automorfismi sono discreti questo operatore è iniettivo. Per concludere la dimostrazione bisogna quindi avere buon controllo della parte non lineare.

Più difficile è invece il caso con automorfismi. Che ci sia qualcosa di sottile lo sapevamo: $\mathbb{P}^2$ è KE, se scoppiamo 1 o 2 punti non può avere metriche Kcsc ($Aut(M)$ non è riduttivo), e se scoppiamo da 3 a 8 punti è di nuovo KE. Siccome da 4 in poi cessa di avere automorfismi continui, per il teorema precedente, si può continuare a scoppiare all'infinito.

Questo tipo di comportamento è generale, ma la posizione dei punti (e i volumi dei divisori eccezionali) devono verificare alcune condizioni (stabilità??).

Se $ker\mathbb{L}_M$ è non banale e chiamiamo $\xi_0 \equiv 1, \xi_1, \dots, \xi_d$ una base di funzioni del nucleo a media nulla, dobbiamo guardare la matrice

$$\mathfrak{M}(p_1,\ldots,p_m) := \begin{pmatrix} \xi_1(p_1) & \ldots & \xi_1(p_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_d(p_1) & \ldots & \xi_d(p_m) \end{pmatrix}$$

Teorema 5. *Se scegliamo punti* $p_1,\ldots,p_m$ *t.c. rango*$(\mathfrak{M}(p_1,\ldots,p_m)) = d$ *e* $ker(\mathfrak{M}(p_1,\ldots,p_m))$ *contiene un vettore a entrate positive, allora possiamo scoppiare e tenere la metrica Kcsc.*

Corollario 3. *Lo scoppiamento di* $\mathbb{P}^n$ *in* $m \geq n+1$ *punti in posizione opportuna ha una metrica di curvatura scalare costante di Kähler.*

Analoghi (piú generali) risultati valgono per metriche estremali.

Bibliografia per approfondire

- G.Tian, *Extremal metrics and geometric stability*, Special issue for S. S. Chern. Houston J. Math. **28** (2002), no. 2, 411–432.

- G. Tian, *On Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature*, Invent. Math. **130** (1997), 1-37.

- S.K. Donaldson, *Scalar curvature and projective embeddings*, Jour. Differential Geom., **59** (2001), no. 3, 479–522.

- S.K. Donaldson, *Scalar curvature and projective embeddings II*, Q. J. Math. **56** (2005), no. 3, 345–356.

- S.K. Donaldson, *Geometry in Oxford*, Asian J. Math.

- X.X. Chen - G. Tian, *Geometry of Kähler Metrics and Foliations by Holomorphic Discs*, math.DG/0507148.

- T. Mabuchi, *An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds. I.*, Invent. Math. **159** (2005), no. 2, 225–243.

- S. Zhang, *Heights and reductions of semi-stable varieties*, Compositio Math. **104** (1996), no. 1, 77–105.

- C. Arezzo - A. Loi, *Moment maps, scalar curvature and quantization of Kähler manifolds*, Comm. Math. Phys. **246** (2004), no. 3, 543–559.

- C. Arezzo - F. Pacard, *Blowing up and desingularizing Kähler manifolds of constant scalar curvature I*, math.DG/0411522

- C. Arezzo - F. Pacard, *Blowing up Kähler manifolds of constant scalar curvature II*, math.DG/0504115

- C. Arezzo - A. Ghigi - G.P. Pirola, *Symmetries, quotients and Kähler-Einstein metrics*, math.DG/0402316, sta uscendo su J. Crelle.

- C. Arezzo - A. Ghigi - A. Loi, *Stable bundles and first eigenvalue of the laplacian*, sta per apparire su archive, DG-2005.