

CICLI OLOMORFI

Parte IV: il criterio di non-olomorfia

Guido Pollini

Contents

1	Il criterio fondamentale	2
2	Il caso liscio	3
2.1	La classe fondamentale relativa	3
2.2	Idea della dimostrazione	5
2.3	Il complesso di Koszul per un fibrato	9
2.4	Il fibrato differenza	10
3	Bibliografia	14

1 Il criterio fondamentale

Sia X una varietà complessa¹; ogni suo sottoinsieme olomorfo² Y di codimensione omogenea $\text{cod}_{\mathbb{C}} Y = p$ origina una classe $[Y] \in H^{2p}(X; \mathbb{Z})$ detta *classe fondamentale intera di Y* (si veda la sezione [2.1]). Una classe di coomologia pari intera $u \in H^{2p}(X; \mathbb{Z})$ è detta *ciclo olomorfo* se è combinazione \mathbb{Z} -lineare di un numero finito di classi fondamentali di sottoinsiemi olomorfi di X ; in un fondamentale articolo ([AH], theorem 6.1) Atiyah e Hirzebruch dimostrano il seguente teorema:

Teorema 1.0.1 (TEST DI OLOMORFIA) *Sia X una varietà complessa e $u \in H^{2p}(X; \mathbb{Z})$ una sua classe di coomologia intera pari; allora vale il seguente test:*

$$(u \text{ è olomorfo}) \implies (d_r u = 0 \text{ per ogni } r \geq 2)$$

dove u è visto come elemento del termine $E_2^{2p,0}$ della seconda pagina della successione spettrale di Atiyah-Hirzebruch per X .

Da notare che *il test ha natura esclusivamente topologica* dal momento che la K-teoria studia fibrati vettoriali complessi senza alcune strutture addizionali. In realtà nell'articolo [AH] viene enunciato il criterio usando una sorta di limite inverso in coomologia e in K-teoria, ma Douady ha dimostrato ([D], Théorème 2) che il teorema vale anche per la coomologia e la K-teoria standard; noi seguiremo il suo approccio.

Il criterio di olomorfia sopra indicato non è semplice da usare dal momento che coinvolge tutti i differenziali della successione spettrale; fortunatamente in [AH](theorem 7.1) viene dimostrato il seguente corollario, utilizzato nel primo seminario per trovare il controesempio proiettivo:

Teorema 1.0.2 (TEST PRATICO DI OLOMORFIA) *Sia X una varietà complessa e $u \in H^{2p}(X; \mathbb{Z})$ un suo ciclo intero pari; allora vale il seguente test:*

$$(u \text{ è olomorfo}) \implies (\mathcal{P}_q^1 u = 0 \text{ per ogni primo } q \neq 2)$$

¹uno spazio topologico T_2 paracompatto, localmente omeomorfo ad aperti di \mathbb{C}^n con cambi di carta biolomorfi.

²un sottoinsieme chiuso e localmente luogo di zeri di un numero finito di germi olomorfi; in generale non è liscio.

dove $\mathcal{P}_q^1 := \text{bock}_q \mathcal{P}_q^1 \text{red}_q$ con \mathcal{P}_q^1 la potenza di Steenrod q -esima ridotta al primo ordine.

In queste note dimostreremo una versione semplificata del test di olomorfia, contenente in ogni caso tutte le idee essenziali per provare il risultato generale (modulo qualche risultato altamente non banale dovuto a Grauert).

2 Il caso liscio

Il risultato che ci interessa è il seguente (si veda [D], théorème 2):

Teorema 2.0.3 (Test di olomorfia; caso liscio) *Sia X una varietà complessa e $u \in H^{2p}(X; \mathbb{Z})$ un suo ciclo intero pari; allora vale il seguente test:*

$$\left(u = [Y] \text{ con } Y \text{ sottovarietà complessa connessa e chiusa di } X \right) \implies \left("d_r u = 0" \text{ per ogni } r \geq 2 \right)$$

dove u è visto come elemento nel termine $E_2^{2p,0}$ della seconda pagina della successione spettrale di Atiyah-Hirzebruch per X .

Per dimostrare il teorema sfrutteremo la struttura di fibrato vettoriale complesso presente nel fibrato normale reale di Y : l'olomorfia per X e Y entrerà in gioco in questo modo; nella dimostrazione del teorema generale l'olomorfia gioca un ruolo molto più importante. Il risultato chiave è il seguente criterio di complessità per un fibrato reale:

Teorema 2.0.4 *Sia $E \rightarrow B$ un fibrato vettoriale reale orientabile di rango $\text{rank}_{\mathbb{R}} E = 2p$ su uno spazio decente connesso B e indichiamo con $D \rightarrow B$ e $\partial D \rightarrow B$ rispettivamente il disk-bundle e lo sphere-bundle associati; allora vale il seguente test:*

$$\left(E \text{ ammette struttura complessa} \right) \implies \left("d_r \tau_D = 0" \text{ per ogni } r \geq 2 \right)$$

dove la classe di Thom τ_D del disk-bundle (cfr. teorema [2.1.1]) è vista come elemento in $E_2^{2p,0}$ nella seconda pagina della successione spettrale ridotta di Atiyah-Hirzebruch per il quoziente $D/\partial D$.

Da notare che esiste una triangolazione per D in modo che ∂D ne sia sottocomplesso e quindi il quoziente $D/\partial D$ è ancora un CW-complesso; prima di passare alla dimostrazione di questo teorema conviene richiamare qualcosa sulla classe di Thom e sulla classe fondamentale di un sottoinsieme olomorfo.

2.1 La classe fondamentale relativa

Per costruire la classe fondamentale useremo il seguente risultato (lavoriamo con coomologia singolare per dare senso alla coomologia relativa ad un aperto):

Teorema 2.1.1 (Isomorfismo di Thom) *Sia $E \rightarrow B$ un fibrato vettoriale reale orientabile di rango $r = \text{rank}_{\mathbb{R}} E$ su uno spazio decente B e definiamo $\dot{E} := \{\text{sezione nulla}\}$; allora:*

- esiste un'unica classe $\tau_E \in H^r(E, \dot{E}; \mathbb{Z})$ (classe di Thom di E) tale che per ogni $b \in B$ la restrizione $\tau_E|_{(E_b, \dot{E}_b)}$ è il generatore di $H^r(E_b, \dot{E}_b; \mathbb{Z})$ corrispondente all'orientazione indotta sulla fibra E_b ;
- il cup relativo con la classe di Thom induce i seguenti isomorfismi di gruppi:

$$\forall j \in \mathbb{Z} \quad H^j(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^{j+r}(E, \dot{E}; \mathbb{Z})$$

$$u \longmapsto u \cup_{rel} \tau_E$$

Se $D \rightarrow B$ sono $\partial D \rightarrow B$ sono il disk-bundle e lo sphere-bundle corrispondenti a E vale l'isomorfismo $H^\bullet(E, \dot{E}; \mathbb{Z}) \cong H^\bullet(D, \partial D; \mathbb{Z})$ ottenuto escindendo $E - D$ e retraendo per deformazione \dot{D} su ∂D ; la classe di Thom del disk-bundle τ_D è per definizione l'immagine di τ_E tramite questo isomorfismo.

In particolare, dal punto di vista additivo, la coomologia dello spazio totale E relativa a \dot{E} è la seguente:

$$H^\bullet(E, \dot{E}; \mathbb{Z}) \cong [\dots \ 0 \ 0 \ 0 \ H^0(B; \mathbb{Z}) \ H^1(B; \mathbb{Z}) \ H^2(B; \mathbb{Z}) \ \dots]$$

dove il primo termine attivo è di grado r ; in quello che segue avremo bisogno soltanto del teorema di Thom fino a questo grado compreso.

Adesso, sia Y una sottovarietà complessa chiusa a codimensione $codim_{\mathbb{C}} Y = p$ di una varietà complessa X e consideriamo il suo fibrato normale reale $N_X Y := \frac{(T^{\mathbb{R}} X)|_Y}{T^{\mathbb{R}} Y}$; si tratta di un fibrato reale orientabile di rango reale $2p$ che ammette anche una struttura complessa, essendo isomorfo come \mathbb{R} -fibrato al normale olomorfo. Per definire la classe fondamentale relativa $[Y]_{rel}$ di Y consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} H^{2p}(X, X-Y; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H^{2p}(N_X Y, \dot{N}_X Y; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H^0(Y; \mathbb{Z}) & & [Y]_{rel} & \longleftarrow & \tau_{N_X Y} & \longleftarrow & 1 \\ \downarrow & & & & & & \downarrow & & & & \\ H^{2p}(X; \mathbb{Z}) & & & & & & [Y] & & & & \end{array}$$

Il primo isomorfismo si ottiene escindendo $X - N_X Y$ dalla coppia $(X, X - Y)$, cosa lecita dal momento che $X - N_X Y$ è chiuso e $X - Y$ è aperto e quindi le ipotesi di escissione sono soddisfatte banalmente (se Y avesse avuto bordo il suo tubolare non sarebbe stato aperto in X e l'escissione non avrebbe funzionato; discorso analogo se Y non fosse stata chiusa); il secondo \cong è l'isomorfismo di Thom e la freccia verticale è il morfismo della successione esatta lunga per la coppia $(X, X - Y)$. La classe fondamentale relativa $[Y]_{rel} \in H^{2p}(X, X - Y; \mathbb{Z})$ si ottiene spostando l'elemento 1 tramite escissione e isomorfismo di Thom. La classe assoluta $[Y] \in H^{2p}(X; \mathbb{Z})$ si ottiene portando avanti la classe relativa; in sostanza, la classe fondamentale relativa è la classe di Thom del fibrato normale $N_X Y$, ovvero la sua classe di orientazione.

Per completezza descriviamo anche la classe fondamentale per un sottoinsieme olomorfo Y di X a codimensione omogenea $codim_{\mathbb{C}} Y = p$ non necessariamente liscio usando il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} H^{2p}(X, X-Y) & \xrightarrow{\cong} & H^{2p}(X - Y_{sing}, X - Y) & \xrightarrow{\cong} & H^{2p}(N_{X - Y_{sing}} Y_{reg}, \dot{N}_{X - Y_{sing}} Y_{reg}) & \xrightarrow{\cong} & H^0(Y_{reg}) \\ \downarrow & & & & & & \\ H^{2p}(X) & & & & & & \end{array}$$

Una volta usato il lemma [2.1.2] per sfilare la parte singolare senza alterare la coomologia in grado $\leq 2p$ possiamo ripetere il ragionamento fatto prima per la coppia liscia $Y_{reg} \subseteq X - Y_{sing}$; la classe

fondamentale relativa di un sottoinsieme olomorfo è quindi la classe di Thom del fibrato normale $N_{X-Y_{sing}} Y_{reg}$ della parte regolare Y_{reg} nel nuovo ambiente $X - Y_{sing}$.

Lemma 2.1.2 *Se Y è un sottoinsieme olomorfo di X a codimensione omogenea $\text{codim}_{\mathbb{C}} Y = p$ allora le inclusioni inducono i seguenti isomorfismi:*

$$\forall l \leq 2p \quad H^l(X, X-Y; \mathbb{Z}) \cong H^l(X - Y_{sing}, X-Y; \mathbb{Z})$$

Dimostrazione: la parte singolare Y_{sing} di Y è un sottoinsieme olomorfo di X e quindi ammette una stratificazione ($n := \text{dim}_{\mathbb{C}} X$):

$$Y_{sing} =: S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots \supseteq S_{n-p} \supseteq S_{n-p+1} := \emptyset$$

in modo che $S_i - S_{i+1}$ sia vuoto oppure una sottovarietà liscia di codimensione complessa $p+i$. Ma allora $H^l(X - S_{i+1}, X - S_i; \mathbb{Z}) = 0$ sicuramente se $l < 2(p+1)$ come si vede facilmente usando l'isomorfismo di Thom applicato al fibrato normale della sottovarietà $S_i - S_{i+1}$ di $X - S_{i+1}$ che ha codimensione reale $2(p+i)$; adesso facciamo partire la successione esatta lunga per la tripla $(X - Y \subseteq X - S_i \subseteq X - S_{i+1})$:

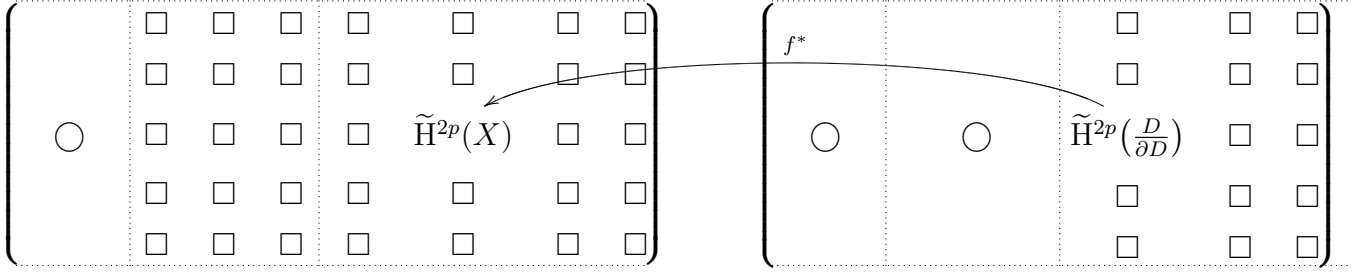
$$0 = H^l(X - S_{i+1}, X - S_i) \longrightarrow H^l(X - S_{i+1}, X - Y) \longrightarrow H^l(X - S_i, X - Y) \longrightarrow H^{l+1}(X - S_{i+1}, X - S_i) = 0$$

dove lo zero a sinistra si ha dal momento che $l < 2p + 2$ e quello a destra $l + 1 < 2(p + 1)$; grazie a questo, ragionando induttivamente se $l \leq 2p$ allora $H^l(X - \emptyset, X - Y) = H^l(X - S_{n-k+1}, X - Y) \cong H^l(X - S_{n-k}, X - Y) \cong \dots \cong H^l(X - S_1, X - Y)$ e dal momento che $S_1 := Y_{sing}$ abbiamo terminato. \square

2.2 Idea della dimostrazione

Dando per buono il criterio di complessità per un fibrato reale [2.0.4] possiamo provare il test di olomorfia nel caso liscio come segue:

Dimostrazione: [teorema 2.0.3] sia $N_X Y$ il fibrato normale di Y in X , costruiamo un disk-bundle tubolare $D \rightarrow Y$ che lo rappresenta come intorno chiuso di Y in X e sia $\partial D \rightarrow Y$ il corrispondente sphere-bundle; vale l'isomorfismo $H^{2p}(X, X-Y) \cong H^{2p}(X, X-int D) \cong \tilde{H}^{2p}(\frac{X}{X-int D}) \cong \tilde{H}^{2p}(\frac{D}{\partial D})$ ottenuto osservando che $X - Y$ si retrae per deformazione sul chiuso $X - int D$ e che vale l'omeomorfismo $\frac{X}{X-int D} \approx \frac{D}{\partial D}$ di CW-compleksi (esiste infatti una triangolazione per X in modo che D e ∂D siano sottocompleksi e quindi anche $X - int D$ lo sia). La classe fondamentale relativa $[Y]_{rel}$ corrisponde tramite questi isomorfismi alla classe di Thom del disk-bundle associato a $N_X Y$; se indichiamo con $f : X \rightarrow \frac{X}{X-int D} \approx \frac{D}{\partial D}$ la proiezione sul quoziente abbiamo per definizione $[Y] := f^*[Y]_{rel} = f^* \tau_D$. Facciamo partire la successione spettrale ridotta di Atiyah-Hirzebruch E_\bullet per X e quella E'_\bullet per $\frac{D}{\partial D}$; il fibrato $N_X Y$ ammette una struttura complessa e quindi grazie al teorema [2.0.4] “ $d'_r[Y]_{rel} = 0$ ” e anche $d_2[Y] = d_2 f^*[Y]_{rel} = f^* d'_2[Y]_{rel} = 0$ dal momento che i vari morfismi indotti da f sulle pagine sono chain-map. Quindi $[Y]$ rappresenta un elemento $[Y]$ della terza pagina e per costruzione dei morfismi tra le successioni spettrali $[Y] = f^\#[Y]_{rel}$ dove $f^\#$ indica il morfismo tra le terze pagine. Quindi $d_3[Y] = d_3 f^\#[Y]_{rel} = f^\# d'_3[Y]_{rel} = 0$ e grazie ad un ragionamento induttivo otteniamo “ $d_r[Y] = 0$ ” per ogni $r \geq 2$ concludendo la dimostrazione del test nel caso liscio. \square

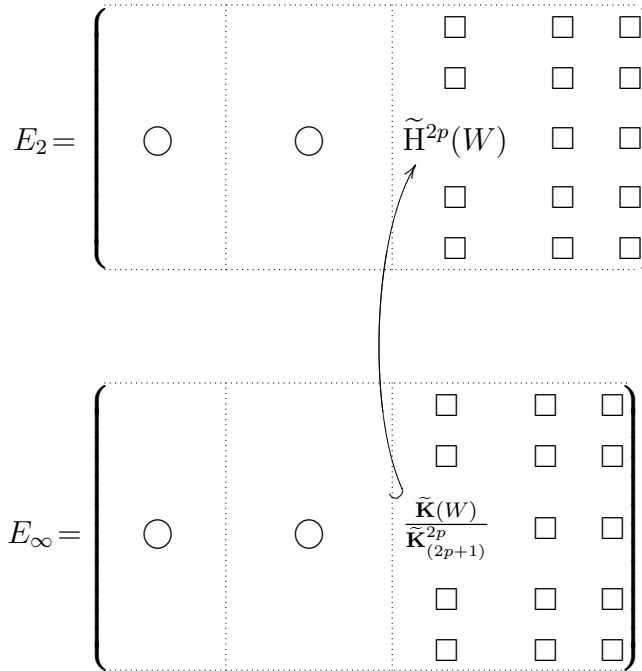


Passiamo adesso alla dimostrazione del criterio [2.0.4] e supponiamo quindi che $E \rightarrow B$ sia un fibrato vettoriale reale orientabile di rango $\text{rank}_{\mathbb{R}} E = 2p$ su uno spazio decente connesso B ; indichiamo con $D \rightarrow B$ e $\partial D \rightarrow B$ rispettivamente il disk-bundle e lo sphere-bundle associati. Grazie all'isomorfismo di Thom la coomologia ridotta $\tilde{H}^*(D/\partial D)$ è banale in grado $< 2p$ e per sfruttare al meglio questa particolarità conviene fare un discorso più generale.

Supponiamo che W sia un generico spazio decente avente una coomologia ridotta in cui il primo termine attivo è quello di grado $2p$, con p un certo intero (il simbolo \square indica un generico gruppo commutativo):

$$\tilde{H}^*(W) \cong [\dots 0 0 \tilde{H}^{2p}(W) \square \square \square \dots]$$

Facciamo partire la successione spettrale di Atiyah-Hirzebruch ridotta per W e sia $u \in \tilde{H}^{2p}(W)$ una sua classe di coomologia intera, vista come elemento della seconda pagina; la condizione “ $d_r u = 0$ ” per ogni $r \geq 2$ è abbastanza difficile da manipolare, ma in questo caso si presentano delle semplificazioni importanti grazie alla presenza di zeri a sinistra dell'elemento che vogliamo studiare:



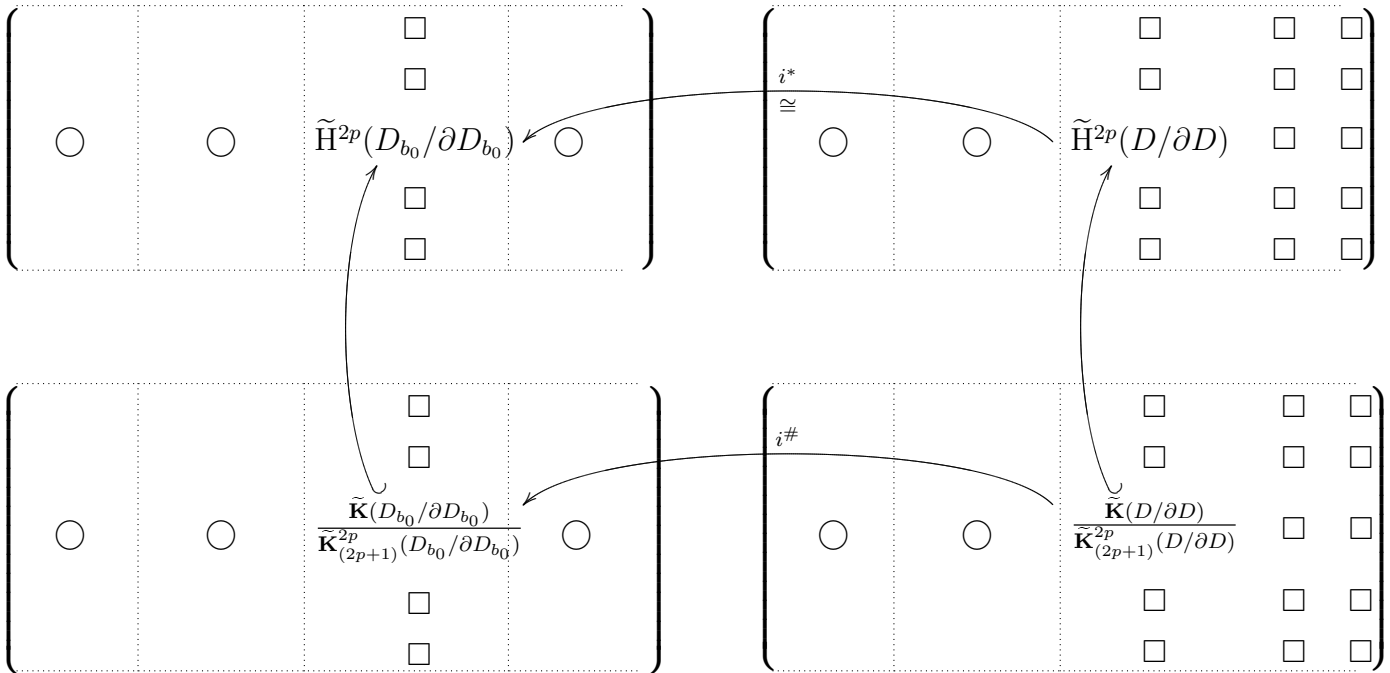
Il differenziale di E_2 entrante in $\tilde{H}^{2p}(W) = E_2^{2p,0}$ è automaticamente nullo a causa della presenza degli zeri a sinistra e quindi vale l'inclusione $E_3^{2p,0} \subseteq \tilde{H}^{2p}(W)$; gli zeri persistono nelle pagine successive di conseguenza otteniamo le inclusioni $\tilde{H}^{2p}(W) = E_2^{2p,0} \supseteq E_3^{2p,0} \supseteq \dots \supseteq E_{n+1}^{2p,0} = E_\infty^{2p,0} \cong \frac{\tilde{K}^{2p}_{(2p)}}{\tilde{K}^{2p}_{(2p+1)}}$.

Quest'ultimo sottogruppo consiste di tutti gli elementi di $H^{2p}(W)$ che sopravvivono alla pagina finale; inoltre la periodicit  di Bott, la presenza degli zeri a sinistra e la struttura della pagina finale implicano le uguaglianze $\tilde{K}(W) = \tilde{K}^{2p}(W) = \tilde{K}_{(0)}^{2p} = \tilde{K}_{(1)}^{2p} = \dots = \tilde{K}_{(2p)}^{2p}$. Quindi abbiamo a disposizione un monomorfismo di gruppi $\frac{\tilde{K}(W)}{\tilde{K}_{(2p+1)}^{2p}} \hookrightarrow H^{2p}(W)$ che dequozientando proviene da un unico omomorfismo di gruppi $edge_{2p}: \tilde{K}(W) \longrightarrow H^{2p}(W; \mathbb{Z})$ avente la stessa immagine:

$$im(edge_{2p}) = \left\{ u \in H^{2p}(W; \mathbb{Z}) \mid "d_r u = 0" \text{ per ogni } r \geq 2 \right\}$$

Quindi, lo studio della sopravvivenza di elementi laterali (elementi di edge) della seconda pagina coincide con lo studio dell'immagine del morfismo $edge$ e la speranza   di poter utilizzare argomentazioni di naturalit  per evitare anche la descrizione esplicita di quest'ultimo morfismo.

Torniamo alla dimostrazione del criterio [2.0.4] scegliendo un punto base $b_0 \in B$ qualsiasi (B   per ipotesi connesso) e considerando l'inclusione $i: (D_{b_0}, \partial D_{b_0}) \hookrightarrow (D, \partial D)$ che pu  essere supposta cellulare dopo aver triangolato opportunamente i vari spazi; facciamo partire le successioni spettrali ridotte di Atiyah-Hirzebruch per le due coppie e studiamone l'interazione:



Nel diagramma precedente sono evidenziati i morfismi i^* e $i^\#$ indotti da i e i due morfismi che inducono gli edge e si dimostra facilmente che il diagramma indicato commuta, i.e. *gli edge sono naturali*; gli zeri addizionali nel diagramma a sinistra derivano dal fatto che valgono gli omeomorfismi $\frac{D_{b_0}}{\partial D_{b_0}} = \frac{D^{2p}}{S^{2p-1}} \approx S^{2p}$ e la coomologia ridotta di S^{2p}   concentrata in grado $2p$. Grazie a questo la successione a sinistra collassa alla seconda pagina e quindi tutti gli elementi in $\tilde{H}^{2p}(D_{b_0}/\partial D_{b_0}) \cong \mathbb{Z}$ sopravvivono alla pagina infinita: di conseguenza l'edge corrispondente $edge': \tilde{K}(D_{b_0}/\partial D_{b_0}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^{2p}(D_{b_0}/\partial D_{b_0})$   un isomorfismo dal momento che deve essere una funzione suriettiva tra due copie di \mathbb{Z} (grazie al teorema di Bott sappiamo che $\tilde{K}(S^{2p}) \cong \mathbb{Z}$). In particolare il generatore di Bott $(H - \varepsilon^1)^{\times p}$ di $\tilde{K}(S^{2p})$ viene mandato in pi  o meno il generatore g di $\tilde{H}^{2p}(S^{2p})$ e possiamo supporre che sia esattamente quello corrispondente all'orientazione canonica della fibra D_{b_0} (nel caso contrario basta correggere qualche segno).

Dal momento che abbiamo supposto la base B connessa scegliere l'orientazione per D (ovvero identificare la classe di Thom τ_D) coincide con il fissarne una per la fibra D_{b_0} , ovvero i^* è un isomorfismo (naturalità della classe di Thom) e $i^*\tau_D = g$; consideriamo il seguente diagrammino:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^{2p}(D/\partial D) & \xrightarrow[\cong]{i^*} & \tilde{H}^{2p}(S^{2p}) & & \tau_D & \longleftarrow & g \\ \uparrow \text{edge} & & \uparrow \text{edge}' & & & & \uparrow \\ \tilde{K}(D/\partial D) & \xrightarrow{i^\#} & \tilde{K}(S^{2p}) & & ? & & (H - \varepsilon^1)^{\tilde{x}p} \end{array}$$

Sappiamo che gli elementi in $\tilde{H}^{2p}(D/\partial D)$ che sopravvivono devono stare nell'immagine di edge e quindi per garantire la sopravvivenza di τ_D in virtù del diagramma precedente basta provare che:

Lemma 2.2.1 *Esiste un elemento $e \in \tilde{K}(D/\partial D)$ tale che $i^\#e = (H - \varepsilon^1)^{\tilde{x}p}$.*

Infatti $\text{edge}(e) = (i^*)^{-1}\text{edge}'i^\#e = (i^*)^{-1}\text{edge}'(H - \varepsilon^1)^{\tilde{x}p} = (i^*)^{-1}g = \tau_D$ e quindi τ_D sopravvive alla pagina finale, dimostrando finalmente il teorema. Resta da provare il lemma:

Dimostrazione: la costruzione dell'elemento in questione procede come segue; i dettagli sul complesso di Koszul e la nozione di fibrato differenza saranno esposte in seguito:

- formiamo il pullback

$$\begin{array}{ccc} \pi^*E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi' \\ D & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

di E sullo spazio totale del corrispondente disk-bundle D

ed osservando che per definizione $\pi^*E := \{(a, b) \in D \times E \mid \pi(a) = \pi'(b)\}$ possiamo definire una sezione $s := \begin{cases} D \longrightarrow \pi^*E \\ a \longmapsto (a, a) \end{cases}$ puntualmente non nulla esattamente su $D - \{\text{sezione nulla}\}$ ed in particolare su ∂D .

- usando il fibrato π^*E su D e la sezione $s \neq 0$ su ∂D costruiamo un complesso naturale di fibrati su E (il complesso di Koszul della sezione [2.3]), puntualmente esatto su ∂D :

$$\text{KOS}^\bullet(\pi^*E, s) := \left[\bigwedge^p (\pi^*E)^* \xrightarrow{-s} \bigwedge^{p-1} (\pi^*E)^* \xrightarrow{-s} \dots \dots \xrightarrow{-s} \bigwedge^0 (\pi^*E)^* \right]$$

- esiste una costruzione in K-teoria che misura l'ostruzione primaria a estendere l'esattezza del complesso precedente da ∂D a tutto D e che ci dà un elemento naturale $\mathcal{D}_{[\text{KOS}^\bullet(\pi^*E, s)]} \in \tilde{K}(D/\partial D)$ (il fibrato differenza generalizzato della sezione [2.4]); quest'oggetto soddisfa le nostre richieste, ovvero la sua restrizione a $D_{b_0}/\partial D_{b_0}$ è proprio il generatore di Bott cercato, come mostra il prossimo punto.

- per naturalità la restrizione del complesso di Koszul è la seguente:

$$i^\# \text{KOS}^\bullet(\pi^*E, s) = \text{KOS}^\bullet(i^*\pi^*E, i^*s) = \text{KOS}^\bullet \left[\begin{array}{ccc} D_{b_0} \times \mathbb{C}^p & & (z, z) \\ \downarrow & & \uparrow s \\ D_{b_0} & & z \end{array} \right] =: \text{K}^\bullet$$

dal momento che $D_{b_0} = D^{2p}$ è contraibile e quindi sopporta soltanto fibrati banali; la restrizione della sezione originale è sicuramente non nulla su ∂D_{b_0} . Grazie a questo se valutiamo il fibrato

differenza del complesso originale otteniamo la relazione $i^\# \mathcal{D}_{[\text{KOS}^\bullet(\pi^* E, s)]} = \mathcal{D}_{[i^\# \text{KOS}^\bullet(\pi^* E, s)]} = \mathcal{D}_{[\mathbb{K}^\bullet]} = (H - \varepsilon^1)^{\tilde{\times} p} \in \tilde{\mathbb{K}}(D_{b_0}/\partial D_{b_0}) \cong \tilde{\mathbb{K}}(S^{2p})$ utilizzando la naturalità del fibrato differenza e soprattutto i risultati dell'ultima sezione di queste note che ci permettono di calcolare il fibrato differenza di questo particolare complesso di Koszul.

Nelle prossime sezioni descriveremo il complesso di Koszul, il fibrato differenza e i conti necessari per concludere la dimostrazione. \square

2.3 Il complesso di Koszul per un fibrato

Per costruire l'elemento di K-teoria desiderato abbiamo bisogno del complesso di Koszul; se V è un \mathbb{C} -spazio vettoriale con $\dim_{\mathbb{C}} V = p$ e $v \in V$ allora è ben definito il prodotto interno:

$$\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_i \mapsto \sum_{j=1 \dots i} (-1)^{j+1} \xi_j(v) (\dots \wedge \widehat{\xi_j} \wedge \dots)$$

se $v \neq 0$ allora un semplice esercizio mostra che il seguente complesso è esatto:

$$0 \longrightarrow \bigwedge^p V^* \xrightarrow{-v} \bigwedge^{p-1} V^* \xrightarrow{-v} \dots \xrightarrow{-v} \bigwedge^0 V^* \longrightarrow 0$$

Il complesso precedente è naturale e quindi si può procedere ad una definizione simile con fibrati vettoriali e sezioni; se $E \longrightarrow X$ è un fibrato di rango $\text{rank}_{\mathbb{C}} E = p$ e $s: X \longrightarrow E$ una sua sezione $\text{pt} \neq 0$ allora usando puntualmente la precedente costruzione otteniamo il complesso di Koszul $\text{KOS}^\bullet(E, s)$ per E ed s , complesso di fibrati su X :

$$0 \longrightarrow \bigwedge^p E^* \xrightarrow{-s} \bigwedge^{p-1} E^* \xrightarrow{-s} \dots \xrightarrow{-s} \bigwedge^0 E^* \longrightarrow 0$$

Il complesso $\text{KOS}^\bullet(E, s)$ è esatto su $X - \{\text{zeri di } s\}$, mentre sopra agli zeri di s non è esatto in alcun nodo; il complesso di Koszul è anche naturale, ovvero se $f: Y \longrightarrow X$ allora $f^* \text{KOS}^\bullet(E, s) = \text{KOS}^\bullet(f^* E, f^* s)$ come pullback di complessi di fibrati.

Per quello che serve in seguito dobbiamo descrivere meglio il complesso di Koszul per un fibrato banale in modo da facilitare al massimo il calcolo di un certo fibrato differenza; per far questo richiami alcuni fatti sui prodotti di complessi. Se $E^\bullet := [\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{e_0} E_1 \xrightarrow{e_1} E_2 \xrightarrow{e_2} \dots]$ e $F^\bullet := [\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow F_0 \xrightarrow{f_0} F_1 \xrightarrow{f_1} F_2 \xrightarrow{f_2} \dots]$ sono due complessi di fibrati su X limitati dal basso allora possiamo formarne il monocomplesso prodotto tensoriale $\text{tot}^\bullet(E^\bullet \otimes F^\bullet)$ ponendo

$$\text{tot}^n(E^\bullet \otimes F^\bullet) := \bigoplus_{p+q=n} E_p \otimes F_q \text{ e con differenziale indotto dai } \begin{array}{ccc} E_p \otimes F_{q+1} & & \\ \uparrow 1 \otimes f_q & & \text{definito} \\ E_p \otimes F_q & \xrightarrow{e_p \otimes 1} & E_{p+1} \otimes F_q \end{array}$$

come $d^{p,q} := e_p \otimes 1 + (-1)^p 1 \otimes f_q$. Vale il seguente lemma:

Lemma 2.3.1 *Se E^\bullet è pt-esatto su A e F^\bullet è pt-esatto su B con A e B sottospazi di X allora $\text{tot}^\bullet(E^\bullet \otimes F^\bullet)$ è pt-esatto su $A \cup B$.*

Si tratta di ragionare fibra per fibra e ricordarsi che se V^\bullet è un complesso esatto limitato dal basso di spazi vettoriali allora per qualsiasi altro complesso di spazi vettoriali W^\bullet il complesso $tot^\bullet(V^\bullet \otimes W^\bullet)$ è esatto (ad esempio basta far partire la successione spettrale per la coomologia totale del bicomplesso e ricordarsi com'è fatta la seonda pagina).

Consideriamo adesso il complesso di Koszul per il fibrato banale $D^{2p} \times \mathbb{C}^p \xrightarrow{\downarrow} D^{2p}$ di rango p sul disco

unitario compatto D^{2p} in \mathbb{C}^p e la sua sezione (z, z) $\begin{matrix} (z, z) \\ s \uparrow \\ z \end{matrix}$ avente un unico zero su $0 \in D^{2p}$; vale il seguente risultato che permetterà di calcolare agevolmente il fibrato differenza:

Proposizione 2.3.2 *Modulo l'identificazione tra i due spazi vettoriali \mathbb{C}^p e \mathbb{C}^{p*} fatta tramite la base canonica e la sua duale abbiamo la seguente uguaglianza tra complessi di fibrati su D^{2p} :*

$$KOS^\bullet \left[\begin{array}{c} D^{2p} \times \mathbb{C}^p \\ \downarrow \\ D^{2p} \end{array}, \begin{array}{c} (z, z) \\ s \uparrow \\ z \end{array} \right] = tot^\bullet \left(\mathcal{C}_1^\bullet \otimes \dots \otimes tot^\bullet \left(\mathcal{C}_{p-2}^\bullet \otimes tot^\bullet \left(\mathcal{C}_{p-1}^\bullet \otimes \mathcal{C}_p^\bullet \right) \right) \dots \right)$$

dove $\mathcal{C}_i^\bullet := \left[\begin{array}{ccc} (z, v) & \longmapsto & (z, z_i v) \\ D^{2p} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & D^{2p} \times \mathbb{C} \\ & \searrow & \swarrow \\ & D^{2p} & \end{array} \right]$

La dimostrazione non richiede particolari tecniche, ma è soltanto fastidiosa a livello di notazioni; ad esempio per $p=2$ il complesso di Koszul diventa il seguente (consideriamo $D^4 \subseteq \mathbb{C}^2$ con coordinate x e y):

$$\begin{aligned} D^4 \times \mathbb{C} &\longrightarrow D^4 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow D^4 \times \mathbb{C} \\ (x, y; v) &\longmapsto (x, y; yv, -xv) \\ (x, y; v, w) &\longmapsto (x, y; xv + yw) \end{aligned}$$

è esatto in $D^4 - \{0\}$; invece i due complessi di supporto \mathcal{C}_1^\bullet e \mathcal{C}_2^\bullet sono:

$$\begin{aligned} D^4 \times \mathbb{C} &\longrightarrow D^4 \times \mathbb{C} & D^4 \times \mathbb{C} &\longrightarrow D^4 \times \mathbb{C} \\ (x, y; v) &\longmapsto (x, y; xv) & (x, y; v) &\longmapsto (x, y; yv) \end{aligned}$$

esatti rispettivamente su $D^4 - \{x=0\}$ e su $D^4 - \{y=0\}$; ricordando com'è definito il differenziale del monocomplesso prodotto tensoriale si ottiene facilmente l'identificazione.

2.4 Il fibrato differenza

Sia (X, Y) una coppia decente e supponiamo di avere due fibrati E ed F su X ; supponiamo anche di avere un isomorfismo di fibrati $\alpha: E|_Y \xrightarrow{\cong} F|_Y$ per le restrizioni a Y . Il fibrato differenza misura una sorta di ostruzione primaria ad estendere l'isomorfismo α a tutto X ; per definirlo, nel prodotto

$X \times [0, 1]$ consideriamo i suoi sottospazi e le proiezioni associate:

$$\begin{aligned} A &:= X \times \{0\} \cup Y \times [0, 1] \cup X \times \{1\} \xrightarrow{\pi} X \\ A_0 &:= X \times \{0\} \cup Y \times [0, 1[\xrightarrow{\pi_0} X \times \{0\} \\ A_1 &:= Y \times]0, 1] \cup X \times \{1\} \xrightarrow{\pi_1} X \times \{1\} \end{aligned}$$

I sottospazi A_0 e A_1 sono aperti in A ; prendiamo i pullback π_0^*E e π_1^*F ed utilizziamo l'isomorfismo α per fonderli lungo l'aperto $A_0 \cup A_1 = Y \times]0, 1[$: otteniamo un nuovo fibrato L su A che può essere visto come elemento in $\mathbf{K}(A)$; la differenza $L - \pi^*E$ ha chiaramente restrizione nulla su $X \times \{0\}$ e quindi usando la successione esatta corta (A si retrae chiaramente su $X \times \{0\}$):

$$0 \longrightarrow \mathbf{K}(A, X \times \{0\}) \longrightarrow \mathbf{K}(A) \longrightarrow \mathbf{K}(X \times \{0\}) \longrightarrow 0$$

quindi $L - \pi^*E$ vive in $\mathbf{K}(A, X \times \{0\})$ e dal momento che vale l'omotopia $\frac{A}{X \times \{0\}} \sim \frac{X}{Y}$ (ottenuta collassando il contraibile *con* Y del primo quoziente) possiamo definire *il fibrato differenza* come:

$$\mathcal{D}_{[E,F;\alpha]} := L - \pi^*E \in \tilde{\mathbf{K}}(X/Y)$$

Le particolarità di questa costruzione sono elencate nel seguente teorema (per una dimostrazione ed ulteriori proprietà si veda [AH], proposition 3.3); le dimostrazioni sono tecniche, ma non profonde:

Teorema 2.4.1 (Fibrato differenza) *Sia (X, Y) una coppia decente, E ed F due fibrati su X e $\alpha: E|_Y \xrightarrow{\cong} F|_Y$ un isomorfismo per le restrizioni a Y ; allora il fibrato differenza $\mathcal{D}_{[E,F;\alpha]} \in \tilde{\mathbf{K}}(X/Y)$ soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $\mathcal{D}_{[E,F;\alpha]} \in \tilde{\mathbf{K}}(X/Y)$ è naturale, i.e. se $f: (X', Y') \longrightarrow (X, Y)$ è una funzione continua allora $\mathcal{D}_{[f^*E, f^*F; f^*\alpha]} = f^\# \mathcal{D}_{[E,F;\alpha]} \in \tilde{\mathbf{K}}(X'/Y')$;
2. $\mathcal{D}_{[E,F;\alpha]} \in \tilde{\mathbf{K}}(X/Y)$ dipende solo dalla classe di omotopia di α ;
3. se α si estende ad un isomorfismo $E \cong F$ allora $\mathcal{D}_{[E,F;\alpha]} = 0$;
4. $\mathcal{D}_{[E \oplus E', F \oplus F'; \alpha \oplus \alpha']} = \mathcal{D}_{[E,F;\alpha]} + \mathcal{D}_{[E',F';\alpha']}$;
5. $\mathcal{D}_{[F,E;\alpha^{-1}]} = -\mathcal{D}_{[E,F;\alpha]}$;

In generale calcolare \mathcal{D} è difficile, ma fortunatamente abbiamo bisogno di effettuare il calcolo esplicito soltanto nel seguente caso:

Proposizione 2.4.2 *Sia E il fibrato banale di rango 1 sul disco unitario compatto D^2 in \mathbb{C} e consideriamo l'isomorfismo $\alpha := \begin{cases} S^1 \times \mathbb{C} \longrightarrow S^1 \times \mathbb{C} \\ (z, w) \longmapsto (z, zw) \end{cases}$ per la restrizione di E a S^1 ; allora:*

$$\mathcal{D}_{[E,E;\alpha]} = H - \varepsilon^1 \in \tilde{\mathbf{K}}(D^2/S^1) \cong \tilde{\mathbf{K}}(S^2)$$

dove H è il tautologico di S^2 e $H - \varepsilon^1$ genera $\tilde{\mathbf{K}}(S^2)$.

Dimostrazione: lo spazio A che compare nella definizione del fibrato differenza nel nostro caso è un cilindro tappato omeomorfo a S^2 , mentre A_+ e A_- sono le due calotte; la costruzione prevede di portare il fibrato banale E tramite pullback sulle due calotte e incollarli tramite α che di fatto è un'applicazione da S^1 in S^1 di grado 1: il fibrato risultante è chiaramente il tautologico H . Il resto segue banalmente. \square

Un ragionamento analogo permette di ottenere il seguente calcolo: consideriamo il fibrato banale E di rango 1 su D^{2p} identificato per l'occasione con il polidisco compatto in \mathbb{C}^p ed il morfismo $\alpha_i := \begin{cases} D^{2p} \times \mathbb{C} \longrightarrow D^{2p} \times \mathbb{C} \\ (z, w) \longmapsto (z, z_i w) \end{cases}$ che è sicuramente un isomorfismo su $D_{(i)}^{2p} := D^2 \times \dots \times D^2 \times S^1 \times D^2 \times \dots \times D^2$ dove l' S^1 compare nella i -esima coordinata, inestendibile a tutto D^{2p} ; se formiamo il fibrato differenza si riottiene $\mathcal{D}_{[E, E; \alpha_i]} = H - \varepsilon^1 \in \tilde{\mathbf{K}}(D^{2p}/D_{(i)}^{2p}) \cong \tilde{\mathbf{K}}(S^2)$ dal momento che stiamo lavorando con una versione ingrassata di quanto descritto nella proposizione precedente.

Il problema che ci ha portato a definire il fibrato differenza può anche essere interpretato in modo diverso; infatti se supponiamo di avere due fibrati E ed F su X e una successione esatta corta $0 \longrightarrow E|_Y \xrightarrow{\alpha} F|_Y \longrightarrow 0$ per le restrizioni su Y allora il fibrato differenza misura l'ostruzione primaria ad estendere la successione ad una esatta sull'ambiente. Possiamo ripetere il tutto per una successione lunga su Y ; siano quindi E_0, \dots, E_n fibrati su X e supponiamo che esista la seguente successione esatta per le restrizioni a Y :

$$0 \longrightarrow E_n|_Y \xrightarrow{\alpha_n} E_{n-1}|_Y \xrightarrow{\alpha_{n-1}} E_{n-2}|_Y \xrightarrow{\alpha_{n-2}} \dots \xrightarrow{\alpha_1} E_0|_Y \xrightarrow{\alpha_0} 0$$

Questa successione si spezza in n successioni esatte corte del tipo $0 \rightarrow \ker \alpha_r \rightarrow E_r|_Y \rightarrow \ker \alpha_{r-1} \rightarrow 0$ per $1 \leq r \leq n$ (infatti le ipotesi di esattezza rendono i vari morfismi α_r a rango localmente costante e quindi possiamo spaccarla come se fossimo in una categoria abeliana), ciascuna delle quali spacca ulteriormente dal momento che stiamo lavorando in categoria topologica; fissiamo quindi uno splitting $\ker \alpha_{r-1} \hookrightarrow E_r|_Y$ che risulta essere *unico a meno di omotopia* (infatti in generale se $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ è una successione esatta e $f, g: C \hookrightarrow B$ sono due splitting allora $f - g \in \text{HOM}_{fib}(C, A)$ e quindi la famiglia di morfismi $g + t(f - g)$ per $t \in [0, 1]$ è l'omotopia di splitting cercata) e usiamoli per formare la seguente tabella:

$$\begin{aligned} E_n|_Y &\cong \ker \alpha_{n-1} \\ E_{n-1}|_Y &\cong \ker \alpha_{n-1} \oplus \ker \alpha_{n-2} \\ E_{n-2}|_Y &\cong \ker \alpha_{n-2} \oplus \ker \alpha_{n-3} \\ &\dots \\ E_2|_Y &\cong \ker \alpha_2 \oplus \ker \alpha_1 \\ E_1|_Y &\cong \ker \alpha_1 \oplus \ker \alpha_0 \\ E_0|_Y &\cong \ker \alpha_0 \end{aligned}$$

Questo permette di definire due isomorfismi di fibrati vettoriali topologici, ben definiti a meno di omotopie di morfismi di fibrati:

$$\phi : \bigoplus_r \ker \alpha_r \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{r \text{ pari}} E_r|_Y \quad \psi : \bigoplus_r \ker \alpha_r \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{r \text{ dispari}} E_r|_Y$$

ed in conclusione un isomorfismo $\alpha := \psi \phi^{-1} : \bigoplus_{r \text{ pari}} E_r|_Y \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{r \text{ dispari}} E_r|_Y$ la cui classe di omotopia è univocamente determinata. Dal momento che il fibrato differenza non dipende dalla classe di omotopia dell'isomorfismo grazie alla proprietà 2) del teorema precedente possiamo definire:

$$\mathcal{D}_{[E_0, \dots, E_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n]} := \mathcal{D}_{[\bigoplus_{\text{pari}} E_r, \bigoplus_{\text{dispari}} E_r; \alpha]} \in \tilde{\mathbf{K}}(X/Y)$$

Le proprietà principali del fibrato differenza generalizzato sono ereditate direttamente dal teorema precedente:

Teorema 2.4.3 (Fibrato differenza generalizzato) *Sia (X, Y) una coppia decente e E_0, \dots, E_n fibrati su X ; supponiamo di avere la seguente successione esatta di fibrati in Y :*

$$0 \longrightarrow E_n|_Y \xrightarrow{\alpha_n} E_{n-1}|_Y \xrightarrow{\alpha_{n-1}} E_{n-2}|_Y \xrightarrow{\alpha_{n-2}} \dots \dots \xrightarrow{\alpha_1} E_0|_Y \longrightarrow 0$$

Allora esiste un elemento $\mathcal{D}_{[E_i; \alpha_i]} \in \tilde{\mathbf{K}}(X/Y)$ tale che:

1. $\mathcal{D}_{[E_i; \alpha_i]}$ è naturale;
2. $\mathcal{D}_{[E_i; \alpha_i]}$ dipende solo dalle classi di omotopia di $\alpha_1, \dots, \alpha_n$;
3. se la successione si estende ad una esatta su X allora $\mathcal{D}_{[E_i; \alpha_i]} = 0$;
4. $\mathcal{D}_{[E_i \oplus E'_i; \alpha_i \oplus \alpha'_i]} = \mathcal{D}_{(E_i; \alpha_i)} + \mathcal{D}_{(E'_i; \alpha'_i)}$;
5. $\mathcal{D}_{(0, E_0, \dots, E_n; 0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)} = -\mathcal{D}_{(E_0, \dots, E_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)}$.

Abbiamo bisogno di un'ultima relazione; siano E_\bullet ed F_\bullet due complessi finiti di fibrati su X e supponiamo che siano esatti puntualmente su Y e su Y' rispettivamente, con Y e Y' sottoindiemmi decenti di X ; allora sappiamo che il monocomplesso prodotto tensoriale $tot^\bullet(E_\bullet \otimes F_\bullet)$ è esatto su $Y \cup Y'$ e per il fibrato differenza generalizzato vale il seguente risultato (dimostrato in dettaglio in [AH]):

Teorema 2.4.4 *Se E_\bullet ed F_\bullet sono due complessi finiti di fibrati su X esatti su Y e Y' allora vale la relazione:*

$$\mathcal{D}_{[tot^\bullet(E_\bullet \otimes F_\bullet)]} = \mathcal{D}_{[E_\bullet]} \tilde{\times} \mathcal{D}_{[F_\bullet]} \in \tilde{\mathbf{K}}(X/Y \cup Y')$$

dove abbiamo usato il cross ridotto $\tilde{\mathbf{K}}(X/Y) \otimes \tilde{\mathbf{K}}(X/Y) \xrightarrow{\tilde{\times}} \tilde{\mathbf{K}}(X/Y \cup Y')$ in K -teoria.

Possiamo finalmente calcolare il fibrato differenza del complesso di Koszul $KOS^\bullet \left[\begin{array}{ccc} D^{2p} \times \mathbb{C}^p & & (z, z) \\ & \downarrow & \uparrow s \\ & D^{2p} & z \end{array} \right]$

che grazie alla proposizione [2.3.2] si identifica a $tot^\bullet(C_1^\bullet \otimes \dots \otimes tot^\bullet(C_{p-2}^\bullet \otimes tot^\bullet(C_{p-1}^\bullet \otimes C_p^\bullet)) \dots)$ dove

per definizione $C_i^\bullet := \left[\begin{array}{ccc} (z, v) & \longmapsto & (z, z_i v) \\ D^{2p} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & D^{2p} \times \mathbb{C} \\ & \searrow & \swarrow \\ & & D^{2p} \end{array} \right]$. L'unico calcolo che abbiamo fatto in questa sezione ci

mostra che: $\mathcal{D}_{[C_i^\bullet]} = H - \varepsilon^1 \in \tilde{\mathbf{K}}(D^{2p}/D_{(i)}^{2p}) \cong \tilde{\mathbf{K}}(S^2)$; quindi, modulo tutte le identificazioni da fare, se usiamo il prodotto cross ridotto p volte:

$$\tilde{\mathbf{K}}\left(\frac{D^{2p}}{D_{(1)}^{2p}}\right) \otimes \dots \otimes \tilde{\mathbf{K}}\left(\frac{D^{2p}}{D_{(2p)}^{2p}}\right) \xrightarrow{\tilde{\times}} \tilde{\mathbf{K}}\left(\frac{D^{2p}}{D_{(1)}^{2p} \cup \dots \cup D_{(2p)}^{2p}}\right) \cong \tilde{\mathbf{K}}\left(\frac{D^{2p}}{\partial D^{2p}}\right) \cong \mathbf{K}(S^{2p})$$

e sfruttiamo il teorema precedente deduciamo l'uguaglianza $\mathcal{D}_{[KOS^\bullet]} = (H - \varepsilon^1) \tilde{\times} \dots \tilde{\times} (H - \varepsilon^1)$ dove il termine a destra è il generatore di Bott per $\tilde{\mathbf{K}}(S^{2p})$.

Questo conclude la dimostrazione del criterio fondamentale di olomorfia in versione liscia.

3 Bibliografia

[AH] M.F. Atiyah - F. Hirzebruch: *Analytic cycles on complex manifold*, Topology vol.1 (1961), pagg. 25-45.

[D] A. Douady: *Cycles analytiques*, Séminaire Bourbaki, 14e année (1961/62)) pagg. 223-01, 223-22.