

CICLI OLOMORFI

Parte III: la successione spettrale di Atiyah-Hirzebruch

Guido Pollini

Contents

1	Successione spettrale di Atiyah-Hirzebruch	2
1.1	Coppie esatte	2
1.2	Successione spettrale bigraduata	4
2	K-teoria e coomologia razionale	10
2.1	Il carattere di Chern in K-teoria	10
2.2	Il teorema di confronto	13
3	Bibliografia	18

1 Successione spettrale di Atiyah-Hirzebruch

1.1 Coppie esatte

In questa sezione descriviamo una tecnica di algebra omologica che permette di gestire facilmente lo scheletro formale delle successioni spettrali; nella prossima sezione applicheremo il tutto alla K-teoria. In tutto quello che segue lavoreremo esclusivamente nella categoria dei gruppi commutativi.

Definizione 1.1.1 (Coppia esatta) Una coppia esatta è un diagramma esatto di gruppi commutativi ed omomorfismi di gruppi:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & A \\
 & \swarrow k & \searrow j \\
 & E &
 \end{array}$$

L'esattezza significa che $\text{im } i = \ker j$, $\text{im } j = \ker k$ e $\text{im } k = \ker i$ ed in particolare la composizione $jkjk = 0$; quindi $d := jk : E \rightarrow E$ è un differenziale per E , ovvero un endomorfismo tale che $d^2 = 0$. Ha senso quindi definire la coomologia di E rispetto a d come $H_{(d)}E := \frac{\ker d}{\text{im } d}$ (il derivato del gruppo differenziale di partenza) ed il seguente fondamentale risultato mostra come inserire $H_{(d)}E$ in un'altra coppia esatta collegata alla coppia originale nel modo più naturale possibile:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & A \\
 & \swarrow k & \searrow j \\
 & E &
 \end{array}$$

Lemma 1.1.2 (Coppia derivata) Se $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E & \end{array}$ è una coppia esatta di gruppi abeliani allora

anche la seguente coppia è esatta (coppia derivata):

$$\begin{array}{ccc}
 iA & \xrightarrow{i'} & iA \\
 & \swarrow k' & \searrow j' \\
 & H_{(jk)}E &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 i'(x) := i(x); \\
 j'(i(a)) := [j(a)]; \\
 k'([e]) := k(e).
 \end{array}$$

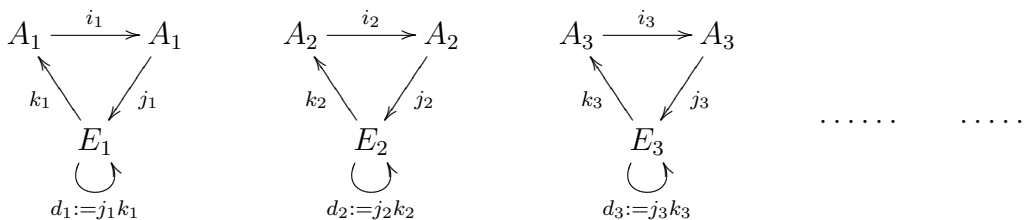
Da notare che la definizione di j' richiede la rimozione di un i .

Dimostrazione: è un semplice e noioso esercizio di diagram-chasing che presentiamo soltanto perché si tratta del lemma chiave delle costruzioni successive. Per la buona definizione di j' basta osservare che se $x \in iA$ allora $x = ia$ con $a \in A$ e $dj(a) = jkja = 0$ e quindi ja è un d -ciclo; per quanto riguarda k' , se $e \in E$ è un d -ciclo in E e e' un'altro elemento in E allora $k'[e + de'] := ke + kjke' = ke =: k'[e]$ e quindi k' non dipende dai rappresentanti scelti; inoltre $de = jke = 0$ e quindi per esattezza esiste un $a \in A$ tale che $ke = ia$; k' ha immagine in iA . Verifichiamo l'esattezza della coppia derivata:

- $imk' = ker i'$: se $[e] \in H_{(jk)}E$ allora $i'k'[e] = ike = 0$; sia $x = ia \in iA$ con $a \in A$ tale che $i'x := ix = 0$. Allora $x = ke$ con $e \in E$ ad inoltre e è un d -ciclo dal momento che $de = jke = jx = jia = 0$ e quindi $k'[e] = x$.
- $im i' = ker j'$: se $x = ia \in iA$ allora $j' i' x = j' ix = [jx] = [jia] = [0]$; se $x = ia \in iA$ allora il fatto che $j' x := [ja] = 0$ implica l'esistenza di un $e \in E$ tale che $de = jke = ja$. Quindi $j(a - ke) = 0$ e per esattezza esiste un $a' \in A$ tale che $ia' = a - ke$ ed in conclusione $i'(ia') = i'a = ia - ike = ia = x$.
- $im j' = ker k'$: se $x = ia \in iA$ allora $k' j' x = k'[ja] = kja = 0$; sia $[e] \in H_{(jk)}E$ tale che $k'[e] := ke = 0$. Per esattezza $e = ja$ con $a \in A$ e quindi $j'(ia) = [ja] = [e]$ ovvero ia è l'elemento cercato.

□

Se partiamo da una coppia esatta possiamo effettuare la derivazione indefinitamente, ottenendo una successione di coppie esatte:

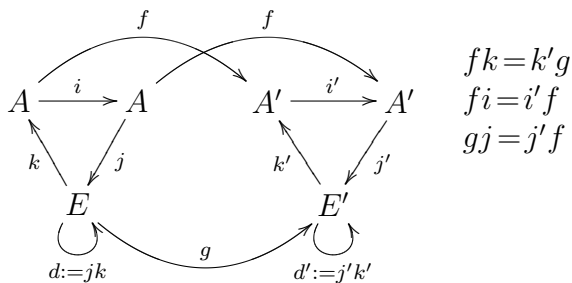


con $E_2 := H_{(d_1)}E_1$, $E_3 := H_{(d_2)}E_2$ e così via, ovvero ogni termine E_r si ottiene per coomologia del precedente. La successione di gruppi e differenziali $\{E_r, d_r\}_{r \geq 1}$ si chiama **successione spettrale generata dalla coppia esatta**; i gruppi A_r ed i rimanenti morfismi sono essenziali per costruire i differenziali successivi ed identificare l'eventuale pagina finale.

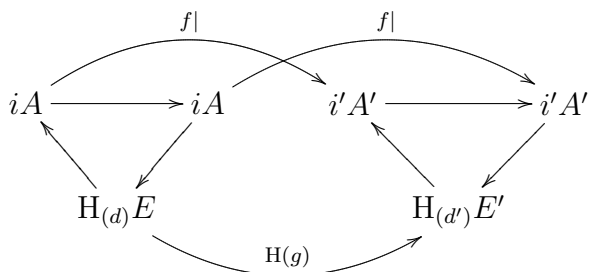
In generale il processo di derivazione non si ferma anche se esistono delle importanti eccezioni; per costruzione $A_r := i^{r-1}A$ ed i morfismi $i_r := i$ sono restrizioni di i . Se supponiamo che dopo una certa iterazione l'omomorfismo $i^{r-1}A \xrightarrow{i} i^{r-1}A$ sia suriettivo allora per esattezza dell' r -esima coppia derivata si ottiene $E_r = ker(i^{r-1}A \xrightarrow{i} i^{r-1}A)$ ed un semplice conto permette di ottenere l'isomorfismo $E_r \cong \frac{ker i^r}{ker i^{r-1}}$. Sempre per esattezza $d_r = 0$ dal momento che $j_r = 0$ e lo stesso si ripete per i differenziali successivi; quindi $E_r = E_{r+1} = E_{r+2} = \dots$: E_r ha tutto il diritto di essere chiamata *pagina finale* della successione spettrale. Questi semplici risultati sono sufficienti per costruire la successione spettrale di Atiyah-Hirzebruch.

Terminiamo la sezione con alcuni risultati che useremo sistematicamente nella dimostrazione del teorema di confronto [2.2.1]; un morfismo tra due coppie esatte è il dato di due omomorfismi di gruppi

$f: A \rightarrow A'$ e $g: E \rightarrow E'$ tali che tutti i possibili diagrammi commutino:



In particolare $gd = gjk = j'fk = j'k'g = d'g$, i.e. g commuta con i differenziali, e quindi g induce un omomorfismo di gruppi $H(g): H_{(d)}E \rightarrow H_{(d')}E'$, che si inserisce nel seguente diagramma commutativo di coppie esatte:



Lemma 1.1.3 *Se g è un isomorfismo allora il morfismo da esso indotto $H(g): H_{(jk)}E \rightarrow H_{(j'k')}E'$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione: anche qui si tratta di un lemma facile che in questo caso non ha nulla a che vedere con le coppie esatte; per l'iniettività dobbiamo mostrare che se $[e] \in \frac{\ker d}{\text{im } d}$ tale che $H(g)([e]) := [ge] = [0] \in \frac{\ker d'}{\text{im } d'}$ (i.e. $ge \in \text{im } d'$) allora $e \in \text{im } d$; sappiamo che $ge = d'y'$ con $y' \in E'$ che si può anche scrivere come $y' = gy$ per un certo $y \in E$ essendo per ipotesi g un isomorfismo; di conseguenza, $ge = d'y' = d'gy = gdy$ da cui $e = dy$. Per la suriettività, sia $[y'] \in \frac{\ker d'}{\text{im } d'}$ e quindi $d'y' = 0$; allora $g^{-1}y'$ è d -ciclo dal momento che $dg^{-1}y' = g^{-1}d'y' = 0$ e $[g^{-1}y']$ viene chiaramente mandato in $[y']$. \square

1.2 Successione spettrale bigraduata

La successione spettrale di Atiyah-Hirzebruch permette di stabilire una profonda relazione tra k -teoria e coomologia; prima di passare alla sua costruzione conviene richiamare alcune definizioni e risultati:

Definizione 1.2.1 (Richiami) *Se (X, A) è una coppia decente allora per ogni $n \geq 0$ i suoi gruppi di K -teoria superiore sono definiti come:*

$$\mathbf{K}^{-n}(X) := \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge X_\bullet)$$

$$\mathbf{K}^{-n}(X, A) := \tilde{\mathbf{K}}\left(S^n \wedge \frac{X}{A}\right)$$

con la convenzione che $\frac{X}{\emptyset} := X_\bullet$, in modo che $\mathbf{K}^{-n}(X, \emptyset) = \mathbf{K}^{-n}(X)$. Se (X, A) è una coppia decente puntata allora per ogni $n \geq 0$ i suoi gruppi di K -teoria superiore ridotti sono definiti come:

$$\tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X) := \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge X)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X, A) := \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge \frac{X}{A})$$

con la convenzione che $\frac{X}{\emptyset} := X$, in modo che $\tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X, \emptyset) = \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X)$. Da notare che per definizione $\tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X, A) = \mathbf{K}^{-n}(X, A)$ se $A \neq \emptyset$, mentre invece $\tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X, \emptyset) = \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X)$ è in generale distinto da $\mathbf{K}^{-n}(X, \emptyset) = \mathbf{K}^{-n}(X)$.

Il teorema di periodicità di Bott è l'isomorfismo $\tilde{\mathbf{K}}(X) \cong \tilde{\mathbf{K}}(S^2 \wedge X)$ compatibile con le successioni esatte; questo permette di definire i gruppi di K -teoria ad indici positivi come:

$$\mathbf{K}^n(X) := \begin{cases} \mathbf{K}^0(X) & \text{se } n \text{ è pari} \\ \mathbf{K}^{-1}(X) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

e similmente in versione ridotta o relativa

Nota 1.2.2 (Leray-Serre) Sia $\pi: E \rightarrow B$ una fibrazione a fibra tipica F tra CW-complessi; se in tutto quello che segue sostituiamo X_p con $\pi^{-1}(B_p)$ e $\mathbf{K}^{p+q}(-)$ con $\mathbf{H}^{p+q}(-; \mathbb{Z})$ si produce l'apparato formale della successione spettrale di Leray-Serre per una fibrazione. Il contenuto geometrico si ottiene provando che se la base ha un'azione coomologica banale sulla fibra allora vale l'isomorfismo $E_2^{p,q} \cong \mathbf{H}^p(B; \mathbf{H}^q(F; \mathbb{Z}))$.

Sia X uno spazio decente di dimensione $n := \dim X$ e consideriamo la sua filtrazione a scheletri $X =: X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq X_{n-2} \supseteq \dots \supseteq X_1 \supseteq X_0 \supseteq X_{-1} := \emptyset$ ponendo per comodità $X_l := X$ se $l \geq n$ e $X_l := \emptyset$ se $l < 0$; nel precedente seminario abbiamo provato l'esistenza di una successione esatta lunga infinita e naturale per ogni coppia $X_{p-1} \subseteq X_p$:

$$\dots \xrightarrow{j} \mathbf{K}^{p+q}(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{k} \mathbf{K}^{p+q}(X_p) \xrightarrow{i} \mathbf{K}^{p+q}(X_{p-1}) \xrightarrow{j} \mathbf{K}^{p+q+1}(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{k} \dots$$

Questa famiglia di successioni esatte permette di formare la seguente fondamentale coppia esatta, dove mettiamo in gioco anche le bigraduazioni:

Definizione 1.2.3 La coppia esatta di gruppi commutativi bigraduati di K -teoria per uno spazio decente X è:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p,q} \mathbf{K}^{p+q}(X_p) & \xrightarrow{i} & \bigoplus_{p,q} \mathbf{K}^{p+q}(X_p) \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & \bigoplus_{p,q} \mathbf{K}^{p+q}(X_p, X_{p-1}) & \end{array}$$

Le bigraduazioni sono quelle ovvie con:

$$\begin{array}{ll} i \text{ indotto da } \mathbf{K}^{p+q}(X_p) \longrightarrow \mathbf{K}^{p+q}(X_{p-1}) & \text{bigrado } (-1, +1) \\ j \text{ indotto da } \mathbf{K}^{p+q}(X_p) \longrightarrow \mathbf{K}^{p+q+1}(X_{p+1}, X_p) & \text{bigrado } (+1, 0) \\ k \text{ indotto da } \mathbf{K}^{p+q}(X_p, X_{p-1}) \longrightarrow \mathbf{K}^{p+q}(X_p) & \text{bigrado } (0, 0) \end{array}$$

Per semplicità indichiamo la coppia precedente con

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{i_1} & A_1 \\ & \swarrow k_1 & \searrow j_1 \\ & E_1 & \\ & \circlearrowleft & \\ & d_1 := j_1 k_1 & \end{array}$$

dove per definizione $(A_1)^{p,q} :=$

$\mathbf{K}^{p+q}(X_p)$ e $(E_1)^{p,q} := \mathbf{K}^{p+q}(X_p, X_{p-1})$; da notare che il primo differenziale $d_1 := j_1 k_1$ di E_1 ha

Per capire chi è E_∞ conviene identificare la pagina di supporto A_r ; per definizione di coppia derivata otteniamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} (A_1)^{p,q} &:= \mathbf{K}^{p+q}(X_p) \\ (A_2)^{p,q} &:= (iA_1)^{p,q} = i_p^\# \mathbf{K}^{p+q}(X_{p+1}) & i_p : X_p \hookrightarrow X_{p+1} \\ (A_3)^{p,q} &:= (i^2 A_1)^{p,q} = i_{p+1}^\# i_p^\# \mathbf{K}^{p+q}(X_{p+2}) & i_{p+1} : X_{p+1} \hookrightarrow X_{p+2} \\ &\dots \\ (A_r)^{p,q} &:= (i^{r-1} A_1)^{p,q} = i_{p+r-2}^\# \dots i_p^\# \mathbf{K}^{p+q}(X_{p+r-1}) \end{aligned}$$

Se $r \geq n+1$ allora $X_{p+r-1} = X$ e per funtorialità l'ultima espressione scritta diventa:

$$(A_r)^{p,q} = im\left(\mathbf{K}^{p+q}(X) \longrightarrow \mathbf{K}^{p+q}(X_p)\right) \quad \text{se } r \geq n+1$$

Se $r \geq n+1$ questo basta per identificare $E_\infty^{p,q} := E_r^{p,q}$; srotolando la r -esima coppia derivata e tenendo bene a mente le bigraduazioni si ottiene una stringa esatta:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & A_r^{p-r,q+r-1} & \xrightarrow{j_r} & E_r^{p,q} & \xrightarrow{k_r} & A_r^{p,q} & \xrightarrow{i_r} & A_r^{p-1,q+1} & \xrightarrow{j_r} & E_r^{p-1+q+1-r+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & & & & & & & \parallel & & \\ & & 0 & & & & & & & & 0 & & \end{array}$$

Lo 0 a destra è legato al fatto che E_r ha sempre la forma di una colonna come lo era E_1 , mentre lo 0 a sinistra si ottiene osservando che $A_r^{p-r,q+r-1} = im(\mathbf{K}^{p-r+q+r-1}(X) \rightarrow \mathbf{K}^{p-r+q+r-1}(X_{p-r}))$ dal momento che $X_{p-r} = \emptyset$ grazie alle ipotesi fatte su r ; di conseguenza esplicitando il tutto otteniamo:

$$0 \longrightarrow E_r^{p,q} \longrightarrow im\left(\mathbf{K}^{p+q}(X) \rightarrow \mathbf{K}^{p+q}(X_p)\right) \longrightarrow im\left(\mathbf{K}^{p+q}(X) \rightarrow \mathbf{K}^{p+q}(X_{p-1})\right) \longrightarrow 0$$

dove il morfismo tra le immagini è indotto dall'inclusione $X_{p-1} \subseteq X_p$. Finalmente ricordando che se

abbiamo il diagramma commutativo $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow g & \downarrow \\ & & C \end{array}$ allora $ker\left(\frac{A}{kerf} \rightarrow \frac{A}{ker g}\right) \cong \frac{ker g}{ker f}$ otteniamo:

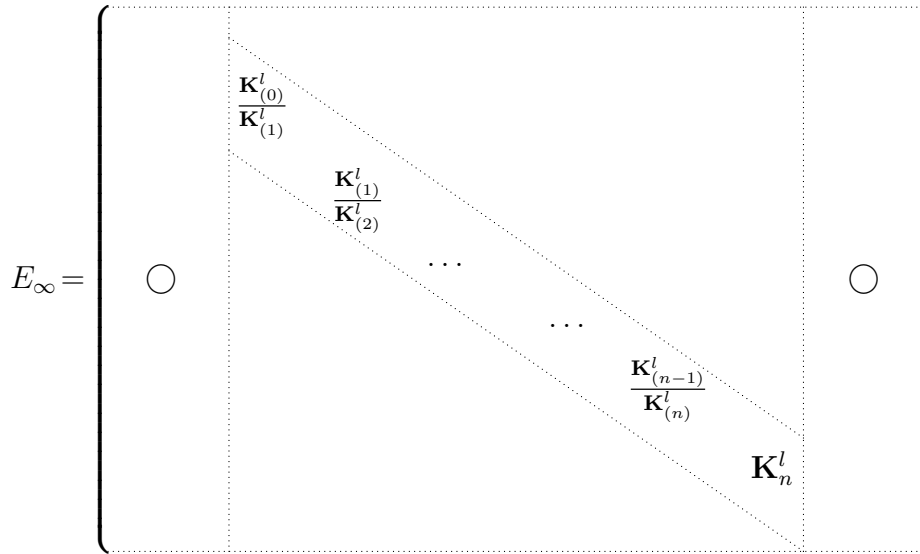
$$E_\infty^{p,q} = E_r^{p,q} \cong \frac{ker\left(\mathbf{K}^{p+q}(X) \longrightarrow \mathbf{K}^{p+q}(X_{p-1})\right)}{ker\left(\mathbf{K}^{p+q}(X) \longrightarrow \mathbf{K}^{p+q}(X_p)\right)} \quad \text{se } r \geq n+1$$

Definendo $\mathbf{K}_{(p)}^l := ker\left(\mathbf{K}^l(X) \longrightarrow \mathbf{K}^l(X_{p-1})\right)$ otteniamo una filtrazione per $\mathbf{K}^l(X)$:

$$\mathbf{K}^l(X) = \mathbf{K}_{(0)}^l \supseteq \mathbf{K}_{(1)}^l \supseteq \dots \supseteq \mathbf{K}_{(n)}^l \supseteq \mathbf{K}_{(n+1)}^l = (0)$$

In conclusione, la diagonale di peso totale l della pagina finale E_∞ contiene il gruppo graduato associato alla filtrazione sopra indicata per $\mathbf{K}^l(X)$; valgono le solite avvertenze nell'uso di successioni spettrali di gruppi commutativi, ovvero in generale le informazioni di torsione sono perse e anche nel caso di oggetti liberi finitamente generati non si riesce a ricostruire canonicamente $\mathbf{K}^l(X)$, ma soltanto il suo

rango.



Decisamente più complessa è la determinazione della vera forma della prima pagina E_1 e della seconda E_2 ; infatti fino adesso non abbiamo usato la periodicità di Bott oppure un qualche calcolo specifico in K-teoria; iniziamo con il descrivere $E_1^{p,q} := \mathbf{K}^{p+q}(X_p, X_{p-1})$ discutendo i vari casi di parità-disparità degli indici:

- Se q è pari allora per periodicità di Bott $\mathbf{K}^{p+q}(X_p, X_{p-1}) \cong \mathbf{K}^p(X_p, X_{p-1})$; se in aggiunta anche p è pari allora $\mathbf{K}^p(X_p, X_{p-1}) \cong \mathbf{K}(X_p, X_{p-1})$ sempre per periodicità di Bott e quindi $\mathbf{K}(X_p, X_{p-1}) \cong \tilde{\mathbf{K}}(\frac{X_p}{X_{p-1}}) \cong \tilde{\mathbf{K}}(\bigvee_{i \in I} S_{(i)}^p)$ dove I indicizza le p -celle di X . Grazie al teorema descritto nelle note precedenti vale l'isomorfismo $\tilde{\mathbf{K}}(\bigvee_{i \in I} S_{(i)}^p) \cong \prod_{i \in I} \tilde{\mathbf{K}}(S_{(i)}^p) \cong \prod_{i \in I} \mathbb{Z}$ e plausibilmente almeno a livello formale quest'ultimo oggetto si identifica con le p -cocatene cellulari intere $C_{cell}^p(X; \mathbb{Z})$; se invece q è pari, ma p è dispari allora $\mathbf{K}^p(X_p, X_{p-1}) \cong \mathbf{K}^{-1}(X_p, X_{p-1}) \cong \tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge \frac{X_p}{X_{p-1}}) \cong \tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge \bigvee_{i \in I} S_{(i)}^p) \cong \tilde{\mathbf{K}}(\bigvee_{i \in I} S_{(i)}^{p+1}) \cong \prod_{i \in I} \tilde{\mathbf{K}}(S_{(i)}^{p+1}) \cong \prod_{i \in I} \mathbb{Z}$. Quindi in questo caso possiamo identificare almeno formalmente $E_1^{p,q} \cong C_{cell}^p(X; \mathbb{Z})$; i differenziali della prima pagina hanno bigrado $(+1, 0)$ e si può dimostrare che se q è pari allora coincidono esattamente con i differenziali in coomologia cellulare (per una dimostrazione si veda [HI], pagg. 36,39). Questo giustifica pienamente l'identificazione fatta sopra.
- Se q è dispari e ad esempio p pari allora $\mathbf{K}^{p+q}(X_p, X_{p-1}) \cong \mathbf{K}^{-1}(X_p, X_{p-1}) \cong \tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge \frac{X_p}{X_{p-1}}) \cong \prod_{i \in I} \tilde{\mathbf{K}}(S_{(i)}^{p+1}) \cong (0)$ visto che $p+1$ è dispari ed un ragionamento analogo vale per p dispari; quindi se q è dispari allora $E_1^{p,q} = (0)$.

Queste osservazioni permettono di ottenere una forma particolarmente semplice per E_1 (le righe incasellate hanno indice 1 e 0):

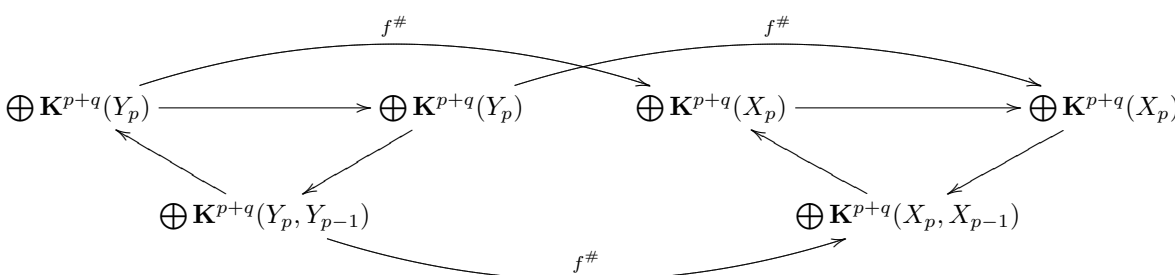
$$E_1 = \left(\begin{array}{c|cccccc|c} & & \overset{p=0}{\downarrow} & & & & \overset{p=n}{\downarrow} & \\ & \vdots & & & & & & \\ & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \\ \circ & C^0(X; \mathbb{Z}) & C^1(X; \mathbb{Z}) & \cdots & \cdots & C^{n-1}(X; \mathbb{Z}) & C^n(X; \mathbb{Z}) & \circ \\ & \boxed{0} & \boxed{0} & \cdots & \cdots & \boxed{0} & \boxed{0} & \\ & C^0(X; \mathbb{Z}) & C^1(X; \mathbb{Z}) & \cdots & \cdots & C^{n-1}(X; \mathbb{Z}) & C^n(X; \mathbb{Z}) & \\ & \vdots & & & & & & \end{array} \right)$$

ed avendo anche identificato i differenziali di questa pagina con i differenziali cellulari anche la seconda pagina è chiara:

$$E_2 = \left(\begin{array}{c|cccccc|c} & & & & & & & \\ & \vdots & & & & & & \\ & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \\ \circ & H^0(X; \mathbb{Z}) & H^1(X; \mathbb{Z}) & \cdots & \cdots & H^{n-1}(X; \mathbb{Z}) & H^n(X; \mathbb{Z}) & \circ \\ & \boxed{0} & \boxed{0} & \cdots & \cdots & \boxed{0} & \boxed{0} & \\ & H^0(X; \mathbb{Z}) & H^1(X; \mathbb{Z}) & \cdots & \cdots & H^{n-1}(X; \mathbb{Z}) & H^n(X; \mathbb{Z}) & \\ & \vdots & & & & & & \end{array} \right)$$

Abbiamo due righe che si ripetono periodicamente verticalmente grazie all'isomorfismo di Bott; la presenza delle righe nulle è giustificata dal fatto che la K-teoria delle sfere di dimensione dispari è banale. La presenza delle righe nulle rende automaticamente i differenziali pari d_{2l} nulli e si può anche dimostrare che $d_3 = \mathcal{S}Q^3 : H^p(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{p+3}(X; \mathbb{Z})$ dove $\mathcal{S}Q^3 := \text{bock}_2 \circ \text{SQ}^3 \circ \text{red}_2$ e SQ^3 indica il quadrato di Steenrod ridotto al terzo ordine. I differenziali dispari successivi non ammettono una descrizione così esplicita in termini di operazioni coomologiche.

La successione spettrale di Atiyah-Hirzebruch appena costruita gode anche di proprietà naturali; se $f : X \rightarrow Y$ è una funzione continua cellulare (i.e. manda scheletri in scheletri) tra due spazi decenti allora la naturalità della successione esatta lunga in K-teoria permette di formare il seguente diagramma commutativo:



Grazie ai risultati della prima sezione f induce omomorfismi di gruppi $f^\# : E'_r \rightarrow E_r$ aventi bigrado $(0, 0)$ dove E'_r è la r -esima pagina della successione spettrale per Y e E_r la corrispondente pagina per

X ; in particolare ogni $f^\#$ commuta con i differenziali, ovvero $d_r f^\# = f^\# d_r$. Una semplice verifica mostra che sulla seconda pagina $f^\#$ coincide esattamente con il morfismo f^* in coomologia intera, ovvero $f^\# = f^* : H^p(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H^p(X; \mathbb{Z})$ per ogni p ; per naturalità $f^\#(\mathbf{K}_{(p)}^l(Y)) \subseteq \mathbf{K}_{(p)}^l(X)$ e il morfismo $f^\#$ indotto sull'ultima pagina coincide con quoziente del classico morfismo in K-teoria.

Esiste anche una versione ridotta della successione spettrale per spazi decenti puntati, ottenibile ripetendo formalmente quanto detto fin'ora sostituendo \mathbf{K} con $\tilde{\mathbf{K}}$ e H con \tilde{H} ; l'identificazione della seconda pagina richiede l'osservazione che $\tilde{\mathbf{K}}^0(X_0, X_{-1}) = \tilde{\mathbf{K}}^0(X_0, \emptyset) = \tilde{\mathbf{K}}(X_0)$ mentre $\tilde{\mathbf{K}}^p(X_p, X_{p-1}) = \mathbf{K}(X_p, X_{p-1})$ se $p \geq 1$ (si vedano i richiami [1.2.1]) e questo giustifica la riduzione dell' H^0 , mentre gli H superiori non vengono modificati.

In conclusione il teorema che abbiamo dimostrato è il seguente:

Teorema 1.2.4 (SUCCESIONE SPETTRALE DI ATIYAH-HIRZEBRUCH) *Se X è uno spazio decente di dimensione $n := \dim X$ allora la coppia esatta [1.2.3] origina una successione spettrale $\{E_r, d_r\}_{r \geq 2}$ di gruppi commutativi bigraduati tale che:*

- ogni differenziale d_n ha bigrado $(+r, -r + 1)$;
- $E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(X; \mathbb{Z}) & \text{se } q \text{ è pari;} \\ (0) & \text{se } q \text{ è dispari, oppure } p < 0 \text{ o } p > n; \end{cases}$
- la successione converge fortemente dopo n iterazioni, i.e. $E_{n+1} = E_{n+2} = \dots = E_\infty$;
- $E_\infty^{p,q} = E_{n+1}^{p,q} \cong \frac{\mathbf{K}_{(p)}^{p+q}}{\mathbf{K}_{(p+1)}^{p+q}}$ dove $\mathbf{K}_{(p)}^l := \ker(\mathbf{K}^l(X) \rightarrow \mathbf{K}^l(X_{p-1}))$ per ogni intero l .

La successione spettrale è naturale rispetto alle funzioni cellulari, il morfismo indotto sulla seconda pagina è quello in coomologia cellulare intera e quello sull'ultima pagina è il quoziente del morfismo standard di K-teoria. Vale anche una versione ridotta per spazi decenti puntati.

Molto di quello che è stato detto finora si ricicla nel caso di una teoria coomologica generalizzata $\{G^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ soddisfacente alcune restrizioni addizionali, utili per garantire la convergenza forte nel caso di X non compatto e l'identificazione della seconda pagina (si veda [Hi] per maggiori dettagli); in particolare il teorema precedente continua a valere modulo la nuova identificazione $E_2^{p,q} = H^p(X; \tilde{G}^q(\bullet))$ e la sostituzione di \mathbf{K}^l con G^l .

2 K-teoria e coomologia razionale

2.1 Il carattere di Chern in K-teoria

In ultima analisi K-teoria studia fibrati vettoriali complessi modulo la relazione di equivalenza stabile; quindi un qualsiasi invariante stabile di fibrati induce un invariante in K-teoria ed un esempio tipico è rappresentato dalla classe totale di Chern. La vera potenza della K-teoria è la struttura di anello di $\mathbf{K}^*(X)$, struttura non preservata dalla classe totale dal momento che $c(E \oplus F) = c(E) \cup c(F)$; in questo contesto il carattere di Chern è introdotto come rimodellamento razionale della classe totale di Chern, per renderla compatibile con la struttura di anello. Il prezzo tecnico da pagare è il passaggio dalla coomologia intera a quella razionale e quindi a priori la perdita di informazioni di torsione.

Sia X uno spazio decente e supponiamo per cominciare che sia anche connesso per archi; se L è un suo line-bundle poniamo $ch(L) := \underline{1} + c_1(L) + \frac{c_1(L)^2}{2!} + \frac{c_1(L)^3}{3!} + \dots + \frac{c_1(L)^k}{k!} + \dots$, una sorta di esponenziale formale della prima classe di Chern di L (in realtà stiamo usando la classe di Chern razionale $c_1^{\mathbb{Q}}(L)$). Si tratta di una somma finita che vive in $H^{*pari}(X; \mathbb{Q})$ dal momento che X è per ipotesi finito dimensionale e quindi $H^i(X; \mathbb{Q}) = (0)$ se $i > \dim X$; questa definizione serve a rendere vera la relazione $ch(L \otimes L') = ch(L) \cup ch(L')$ dove L' è un qualsiasi altro line-bundle. Se $E \cong L_1 \oplus \dots \oplus L_k$ è una somma di line-bundle allora affinché ch rispetti la somma \oplus siamo costretti a definire:

$$ch(E) := ch(L_1) + \dots + ch(L_k) = \sum_{i \geq 0} \frac{c_1(L_1)^i + \dots + c_1(L_k)^i}{i!} \in H^{*pari}(X; \mathbb{Q})$$

Per proseguire dobbiamo osservare che la classe totale di Chern trasforma \oplus in \cup e quindi $c(E) := \underline{1} + c_1(E) + \dots + c_n(E) = (\underline{1} + c_1(L_1)) \cup \dots \cup (\underline{1} + c_1(L_k))$ e questo implica che ogni j -esima classe di Chern $c_j(E)$ di E è il j -simo polinomio simmetrico valutato sulle 1-classi di Chern dei line-bundle che lo compongono. L'espressione $c_1(L_1)^i + \dots + c_1(L_k)^i$ è chiaramente simmetrica e quindi per il teorema fondamentale dei polinomi simmetrici per ogni i esiste un polinomio $s_i(x_1, \dots, x_k)$ univocamente determinato tale che $c_1(L_1)^i + \dots + c_1(L_k)^i = s_i(c_1(E), \dots, c_k(E))$. Quindi sotto l'ipotesi di completa decomponibilità per E la precedente espressione per ch può essere scritta univocamente come:

$$ch(E) := (rank_{\mathbb{C}} E) \underline{1} + \sum_{i > 0} \frac{s_i(c_1(E), \dots, c_k(E))}{i!}$$

Il lato destro di quest'ultima espressione fa intervenire le classi di Chern di E e non quelle dei suoi line-bundle e quindi può essere presa come definizione generale del carattere di Chern per un fibrato qualsiasi E ; si tratta di una costruzione che eredita la naturalità dalle classi di Chern ed inoltre una semplice applicazione del principio di splitting in coomologia razionale implica che $ch(E \oplus F) = ch(E) + ch(F)$ e $ch(E \otimes F) = ch(E) \cup ch(F)$ dal momento che per costruzione lo stesso vale per fibrati decomponibili. Se X non è connesso si usa l'isomorfismo di anelli $H^*(X; \mathbb{Q}) = \bigoplus_{j=1 \dots m} H^*(X_{(j)}; \mathbb{Q})$ per definire $c_j(E) := c_j(E|_{X_{(j)}})$ e $ch(E) := ch(E|_{X_{(1)}}) + \dots + ch(E|_{X_{(m)}})$.

Lavorando sulla definizione di ch si può dimostrare che $ch(E)$ e $c^{\mathbb{Q}}(E)$ si determinano l'uno con l'altro come elementi di $H^*(X; \mathbb{Q})$ e quindi dal punto di vista razionale la classe totale contiene gli stessi dati del carattere di Chern; il grosso vantaggio è la netta compatibilità con le operazioni \oplus e \otimes che permette di estendere ch ad un omomorfismo di anelli in K -teoria (basta ricordare che le operazioni di anello di $\mathbf{K}(X)$ sono indotte dalle operazioni standard tra fibrati):

Definizione 2.1.1 (Omomorfismo di Chern) *Se X è uno spazio decente allora l'omomorfismo di Chern è definito come:*

$$\begin{aligned} ch: \mathbf{K}(X) &\longrightarrow H^{*pari}(X; \mathbb{Q}) \\ E - F &\longmapsto ch(E) - ch(F) \end{aligned}$$

Si tratta di un omomorfismo naturale, compatibile quindi con le riduzioni in K -teoria e coomologia.

Resta da estendere l'omomorfismo di anelli di Chern da \mathbf{K} a \mathbf{K}^* tenendo presente che il primo oggetto è

un sottoanello del secondo; supponiamo inizialmente che $n \geq 0$ e consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{K}^{-n}(X, A) := \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge \frac{X}{A}) & \xrightarrow{ch} & \tilde{H}^*(S^n \wedge \frac{X}{A}; \mathbb{Q}) \\
 & & \cong \uparrow \sigma^n \\
 & & \tilde{H}^*(\frac{X}{A}; \mathbb{Q}) \\
 & & \cong \downarrow \alpha \\
 & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & H^*(X, A; \mathbb{Q})
 \end{array}$$

Il morfismo σ^n è l'isomorfismo standard di grado $+n$ tra la coomologia di una sospensione n -esima e quella dello spazio originale, ottenibile ad esempio con Mayer-vietoris; tuttavia per i nostri scopi conviene descriverlo usando l'isomorfismo relativo¹ di Künneth $\tilde{H}^*(X/A; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^*(S^n \wedge X/A; \mathbb{Q})$ definito come il cross ridotto $a \mapsto s\tilde{\times} a$ dove s è il generatore di $H^n(S^n; \mathbb{Q})$. L'isomorfismo α è invece indotto dalla proiezione $(X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ dal momento che A è un sottoCW-complesso di X .

Quindi la freccia diagonale definisce per ogni $n \geq 0$ un omomorfismo di gruppi $\alpha \circ (\sigma^n)^{-1} \circ ch$:

$$ch: \mathbf{K}^{-n}(X, A) \longrightarrow H^*(X, A; \mathbb{Q})$$

e conviene notare che per costruzione $ch(\mathbf{K}^{-2n}(X, A)) \subseteq H^{*pari}(X, A; \mathbb{Q})$ mentre $ch(\mathbf{K}^{-2n+1}(X, A)) \subseteq H^{*disp}(X, A; \mathbb{Q})$; per procedere con l'estensione di questi omomorfismi ai gruppi di K-teoria a indici positivi dobbiamo mostrarne la compatibilità con l'isomorfismo di Bott. Facciamolo vedere in grado zero usando il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{K}(X, A) := \tilde{\mathbf{K}}(\frac{X}{A}) & \xrightarrow{ch} & \tilde{H}^{*pari}(\frac{X}{A}; \mathbb{Q}) \\
 \text{bott} \downarrow \cong & & \\
 \mathbf{K}^{-2}(X, A) := \tilde{\mathbf{K}}(S^2 \wedge \frac{X}{A}) & \xrightarrow{ch} & \tilde{H}^{*pari}(S^2 \wedge \frac{X}{A}; \mathbb{Q}) \xleftarrow{\cong} \tilde{H}^{*pari}(\frac{X}{A}; \mathbb{Q})
 \end{array}$$

L'isomorfismo di Bott manda $a \in \tilde{\mathbf{K}}(X/A)$ in $(H - \varepsilon^1) \tilde{\times} a = p_{S^2}^\#(H - \varepsilon^1) \cdot p_{X/A}^\# a \in \tilde{\mathbf{K}}(S^2 \wedge X/A)$; d'altra parte il carattere di Chern è un omomorfismo di anelli e quindi $ch((H - \varepsilon^1) \tilde{\times} a) = p_{S^2}^*(ch(H - \varepsilon^1)) \cup p_{X/A}^*(ch a)$ ed inoltre $ch(H - \varepsilon^1) = c_1(H)$, il generatore di $H^2(S^2; \mathbb{Q})$. Di conseguenza:

$$ch((H - \varepsilon^1) \tilde{\times} a) = p_{S^2}^* c_1(H) \cup p_{X/A}^* ch(a) = c_1(H) \tilde{\times} ch(a)$$

e questo basta dal momento che l'isomorfismo di sospensione si realizza facendo cross ridotto con il generatore della coomologia razionale di S^2 . Quindi l'isomorfismo di Bott non è percepito dal carattere di Chern, i.e. $ch = ch \circ Bott$ e questo permette di estendere il carattere di Chern anche ai gruppi di K-teoria di grado positivo ottenendo un omomorfismo di anelli:

$$ch: \mathbf{K}^*(X, A) \longrightarrow H^*(X, A; \mathbb{Q})$$

La dimostrazione che si tratta effettivamente di un omomorfismo di anelli è un semplice esercizio sulle definizioni del prodotto in \mathbf{K}^* e sulla naturalità di ch ; per costruzione $ch(\mathbf{K}^0(X, A)) \subseteq H^{*pari}(X, A; \mathbb{Q})$

¹**Künneth relativo:** se $H^*(Y, B; \mathbb{Z})$ è un gruppo libero finitamente generato allora il crossing induce un isomorfismo di anelli: $H^*(X, A; \mathbb{Z}) \otimes H^*(Y, B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; \mathbb{Z})$

e $ch(\mathbf{K}^{-1}(X, A)) \subseteq H^{*disp}(X, A; \mathbb{Q})$; inoltre la commutatività di ch con i connettivi delle successioni esatte lunghe in K-teoria e coomologia si ottiene usando la sua naturalità ed il fatto che tali connettivi sono in parte indotti da funzioni continue (si veda il seminario sulla K-teoria di base). Questo prova il seguente teorema:

Teorema 2.1.2 (Carattere di Chern) *Se (X, A) è una qualsiasi coppia decente allora l'omomorfismo di anelli di Chern $ch : \mathbf{K}^*(X, A) \rightarrow H^*(X, A; \mathbb{Q})$ realizza una trasformazione naturale tra la K-teoria \mathbb{Z}_2 -graduata e la coomologia razionale \mathbb{Z}_2 -graduata (i.e. usando la decomposizione additiva $H^* = H^{*pari} \oplus H^{*disp}$ ignorando la \mathbb{Z} -graduazione standard); in particolare:*

- ch commuta con i morfismi indotti da funzioni continue, ovvero $ch \circ f^\# = f^* \circ ch$;
- ch commuta con i connettivi, ovvero i seguenti diagrammi commutano:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{K}^0(A) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{K}^1(X, A) \\
 \downarrow ch & & \downarrow ch \\
 H^{*pari}(A; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\partial} & H^{*disp}(X, A; \mathbb{Q})
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{K}^1(A) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{K}^0(X, A) \\
 \downarrow ch & & \downarrow ch \\
 H^{*pari}(A; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\partial} & H^{*disp}(X, A; \mathbb{Q})
 \end{array}$$

Nota 2.1.3 Se E è un fibrato qualsiasi e a un intero positivo allora $c(E) = c(E \oplus \varepsilon^a)$ e quindi se $E \sim_s F$ sono due fibrati stabilmente isomorfi allora $ch(E) = ch(F)$; il carattere di Chern non riesce a distinguere fibrati stabilmente isomorfi, ma non isomorfi ed una domanda plausibile è cosa riesca veramente a distinguere ch e quindi $c^{\mathbb{Q}}$. Il teorema di confronto della prossima sezione mostra che in assenza di torsione in coomologia ch vede esattamente l'equivalenza stabile.

2.2 Il teorema di confronto

Grazie alla successione spettrale di Atiyah-Hirzebruch ed al carattere di Chern possiamo provare un notevole teorema di confronto tra K-teoria e coomologia; si tratta di un risultato sorprendente dal momento che \mathbf{K}^* e H^* studiano oggetti di natura decisamente diversa:

Teorema 2.2.1 (CONFRONTO) *Se X è uno spazio decente allora l'omomorfismo di Chern realizza il seguente isomorfismo di anelli:*

$$ch : \mathbf{K}^*(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} H^*(X; \mathbb{Q})$$

dove per definizione $ch(e \otimes a) := a ch(e)$; la restrizione di ch induce un isomorfismo di anelli:

$$ch : \mathbf{K}(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} H^{*pari}(X; \mathbb{Q})$$

e ad un isomorfismo di gruppi:

$$ch : \mathbf{K}^{-1}(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} H^{*disp}(X; \mathbb{Q})$$

Gli isomorfismi precedenti sono naturali e quindi compatibili con le riduzioni in K-teoria e coomologia.

Grezzamente, la differenza tra K-teoria e coomologia cellulare è dovuta alla presenza di fenomeni di torsione; un risultato formalmente analogo vale per ogni teoria coomologica generalizzata soddisfacente alcune ipotesi aggiuntive (i.e. la relazione del bouquet di infinite sfere). Anche se in generale le due teorie sono diverse c'è un'importante eccezione (per la dimostrazione si veda la fine della sezione):

Corollario 2.2.2 *Se X è un CW-complesso finito e $\text{tor } H^*(X; \mathbb{Z}) = (0)$ allora $\text{tor } \mathbf{K}^*(X) = (0)$.*

I due precedenti risultati permettono di rispondere parzialmente ad una domanda ricorrente: *cosa sono in grado di percepire esattamente le classi di Chern?*

Corollario 2.2.3 (Classificazione e classi intere di Chern) *Sia X un CW-complesso finito tale che $\text{tor } H^*(X; \mathbb{Z}) = (0)$ e siano E ed F due suoi fibrati vettoriali complessi; allora:*

$$(E \sim_s F) \iff (\forall j, c_j(E) = c_j(F))$$

ovvero in assenza di torsione coomologica le classi di Chern intere vedono esattamente la relazione di equivalenza stabile.

Dimostrazione: identificando la K-teoria ridotta con le classi di isomorfismo stabile di fibrati ed usando il teorema di confronto otteniamo l'isomorfismo di gruppi $ch: \text{STAB}_{\mathbb{C}}(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^{*pari}(X; \mathbb{Q})$; per ipotesi e grazie al teorema precedente abbiamo il monomorfismo $\text{STAB}_{\mathbb{C}}(X) \hookrightarrow \text{STAB}_{\mathbb{C}}(X) \otimes \mathbb{Q}$ dal momento che il primo gruppo non ha torsione. Componendo i due morfismi si ottiene facilmente che se $ch(E) = ch(F)$ allora $E \sim_s F$ ed il teorema segue ricordando che ch contiene gli stessi dati di $c^{\mathbb{Q}}$ e quindi anche di $c^{\mathbb{Z}}$ dal momento che la coomologia è per ipotesi priva di torsione. \square

Dimostrazione: (teorema di confronto) l'idea della dimostrazione è di affiancare alla successione razionalizzata di Atiyah-Hirzebruch una successione spettrale banale in coomologia razionale; il carattere di Chern realizza un omomorfismo tra le due successioni ed è un isomorfismo a livello delle seconde pagine: questo rende le pagine finali isomorfe grazie al lemma [1.1.3] e basta per dimostrare il teorema.

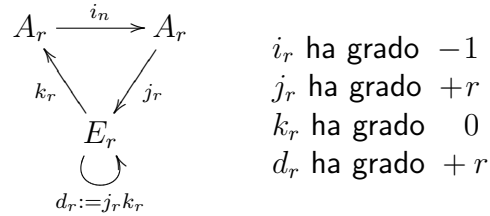
- *Successione spettrale monograduata di Atiyah-Hirzebruch:* per portare avanti questo programma conviene rimuovere le ridondanze presenti nella successione di A.-H. costruendone una versione monograduata; il tutto è formalmente identica alla costruzione della versione bigraduata precedentemente ottenuta. Srotolando per ogni p il triangolo esatto di \mathbf{K}^* -teoria associato ad ogni coppia $X_{p-1} \subseteq X_p$ si ottiene la successione esatta lunga di gruppi:

$$\dots \xrightarrow{j} \mathbf{K}^*(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{k} \mathbf{K}^*(X_p) \xrightarrow{i} \mathbf{K}^*(X_{p-1}) \xrightarrow{j} \mathbf{K}^*(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{k} \dots$$

Definendo poi i gruppi $A_1 := \bigoplus_p \mathbf{K}^*(X_p)$, $E_1 := \bigoplus_p \mathbf{K}^*(X_p, X_{p-1})$ e monograduandoli come uno si immagina si ottiene la seguente coppia esatta:

$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{i_1} & A_1 \\ & \swarrow k_1 & \searrow j_1 \\ & E_1 & \end{array}$	i_1 indotto da $\mathbf{K}^*(X_p) \longrightarrow \mathbf{K}^*(X_{p-1})$ j_1 indotto da $\mathbf{K}^*(X_p) \implies \mathbf{K}^*(X_{p+1}, X_p)$ k_1 indotta da $\mathbf{K}^*(X_p, X_{p-1}) \longrightarrow \mathbf{K}^*(X_p)$	grado -1 grado $+1$ grado 0
--	---	---------------------------------------

Questa volta il differenziale $d_1 := j_1 k_1$ ha grado $+1$ ed i gradi dei morfismi delle iterazioni successive sono i seguenti:



Usando un ragionamento simile fatto per la pagina E_1 in versione bigraduata si ottiene che:

$$E_1 := \left[\dots \quad 0 \quad C^0(X; \mathbb{Z}) \quad C^1(X; \mathbb{Z}) \quad C^2(X; \mathbb{Z}) \quad \dots \quad C^n(X; \mathbb{Z}) \quad 0 \quad \dots \right]$$

Inoltre vale l'identificazione tra i differenziali di E_1 e i differenziali in coomologia cellulare e quindi:

$$E_2 := \left[\dots \quad 0 \quad H^0(X; \mathbb{Z}) \quad H^1(X; \mathbb{Z}) \quad H^2(X; \mathbb{Z}) \quad \dots \quad H^n(X; \mathbb{Z}) \quad 0 \quad \dots \right]$$

Dal momento che i differenziali d_r hanno grado $+r$ la pagina E_r è la pagina finale E_∞ se $r \geq n+1$; sotto queste ipotesi usando l'identificazione $(A_r)^p = \text{im}(\mathbf{K}^*(X) \rightarrow \mathbf{K}^*(X_p))$, lavorando con l'esattezza e tenendo d'occhio le graduazioni si ottiene facilmente:

$$E_\infty^p = E_r^p \cong \frac{\ker(\mathbf{K}^*(X) \rightarrow \mathbf{K}^*(X_{p-1}))}{\ker(\mathbf{K}^*(X) \rightarrow \mathbf{K}^*(X_p))}$$

Ed in conclusione la pagina finale contiene il gruppo graduato associato alla filtrazione di $\mathbf{K}^*(X)$ via i suoi sottogruppi $\mathbf{K}_{(p)}^* := \ker(\mathbf{K}^*(X) \rightarrow \mathbf{K}^*(X_{p-1}))$:

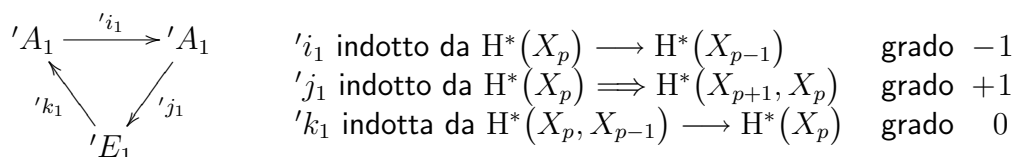
$$E_\infty := \left[\dots \quad 0 \quad \frac{\mathbf{K}_{(0)}^*}{\mathbf{K}_{(1)}^*} \quad \frac{\mathbf{K}_{(1)}^*}{\mathbf{K}_{(2)}^*} \quad \frac{\mathbf{K}_{(2)}^*}{\mathbf{K}_{(3)}^*} \quad \dots \quad \frac{\mathbf{K}_{(n-1)}^*}{\mathbf{K}_{(n)}^*} \quad \mathbf{K}_{(n)}^* \quad 0 \quad \dots \right]$$

I dati presenti in questa successione spettrale sono essenzialmente gli stessi di quelli contenuti nella versione bigraduata; la versione monograduata sfrutta in ultima analisi il teorema di periodicità di Bott per eliminare le ridondanze.

- *Successione spettrale finta coomologica*: per usare al meglio l'omomorfismo di Chern conviene utilizzare una successione spettrale coomologica costruita in modo formalmente analogo a quella monograduata di K-teoria (in realtà questa costruzione di per se non darà informazioni); in tutto quello che segue sottintendiamo i coefficienti razionali. Per ogni p consideriamo la successione esatta lunga infinita in coomologia razionale per a coppia $X_{p-1} \subseteq X_p$, dove è stata ignorata la graduazione dei singoli termini:

$$\dots \xrightarrow{j} H^*(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{k} H^*(X_p) \xrightarrow{i} H^*(X_{p-1}) \xrightarrow{j} H^*(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{k} \dots$$

Definendo e graduando i gruppi $'A_1 := \bigoplus_p H^*(X_p)$ ed $'E_1 := \bigoplus_p H^*(X_p, X_{p-1})$ otteniamo la seguente coppia esatta:



Formando iterativamente le varie coppie derivate otteniamo una successione spettrale e per identificare la sua prima pagina basta ricordarsi di com'è fatta la coomologia ridotta di una p -sfera:

$$'E_1^p := H^*(X_p, X_{p-1}; \mathbb{Q}) \cong \tilde{H}^p\left(\frac{X_p}{X_{p-1}}; \mathbb{Q}\right) \cong \tilde{H}^p\left(\bigvee_{i \in I} S_{(i)}^p\right) \cong \prod_{i \in I} \mathbb{Z} =: C_{cell}^p(X; \mathbb{Q})$$

dove I indicizza le p -celle di X ; per costruzione il differenziale uscente da $'E_1^p$ è la composizione $H^p(X_p, X_{p-1}; \mathbb{Q}) \rightarrow H^p(X_p; \mathbb{Q}) \Rightarrow H^{p+1}(X_{p+1}, X_p; \mathbb{Q})$ che coincide esattamente con il cobordo cellulare. Quindi i dati di gruppo della seconda pagina sono:

$$'E_2^p \cong H^p(X; \mathbb{Q})$$

Questa successione spettrale collassa alla seconda pagina, i.e. $'d_r = 0$ per ogni $r \geq 0$; ad esempio un elemento $[x] \in 'E_2^p \cong H^p(X; \mathbb{Q})$ è rappresentato da un $x \in C_{cell}^p(X; \mathbb{Q}) \cong H^p(X_p, X_{p-1}) = H^*(X_p, X_{p-1}) = 'E_1^p$ e per definizione $'k_2[x] := 'k_1x \in ('i_1'A_1)^p = im H^*(X_{p+1}) \rightarrow H^*(X_p)$ avendo $'k_1$ grado 0; da notare che in realtà stiamo lavorando sull' H^p e non su tutto H^* visto che x è un elemento p -omogeneo e di conseguenza $'k_1x = 'i_1y$ per un certo $y \in H^p(X_{p+1})$. Finalmente $'j_2('k_2\tilde{x}) = 'j_2('k_1x) = 'j_2('i_1y) := 'j_1y \in H^{p+1}(X_{p+2}, X_{p+1}) = 0$ dove la banalità dell'ultimo gruppo deriva dall'aver fatto la $(p+1)$ -coomologia ridotta di un bouquet di $(p+2)$ -sfere. Quindi $'d_2$ è nullo ed un ragionamento formalmente analogo mostra che lo stesso vale anche per ogni altro differenziale superiore (il trucco è sempre lo stesso: sfruttare la graduazione interna di ogni termine di ogni pagina per far vedere che i differenziali "sbagliano" i gradi).

Per quanto riguarda la pagina finale lo stesso ragionamento fatto in K-teoria permette di mostrare l'isomorfismo $'E_\infty^p \cong \frac{ker H^*(X) \rightarrow H^*(X_{p-1})}{ker H^*(X) \rightarrow H^*(X_p)}$; inoltre usando i seguenti monomorfismi ed epimorfismi validi per ogni p (tutti ottenibili tramite la successione esatta della coppia):

$$\begin{aligned} H^p(X; \mathbb{Q}) &\hookrightarrow H^p(X_p; \mathbb{Q}) \\ H^{p+1}(X; \mathbb{Q}) &\rightarrow H^{p+1}(X_p; \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

si vede che vale l'isomorfismo $'E_\infty^p \cong H^p(X; \mathbb{Q})$ e quindi questa particolare successione spettrale non conteneva informazioni nuove.

- *Interazione tra le due successioni spettrali*: prima di tutto razionalizziamo la successione monograduata effettuando il prodotto tensoriale della coppia esatta di K-teoria con il gruppo \mathbb{Q} (resta una coppia esatta dal momento che $tor \mathbb{Q} = (0)$); l'omomorfismo di Chern ed il teorema [2.1.2] permettono di definire il seguente morfismo di coppie esatte (*sottointendiamo i coefficienti razionali per la coomologia*):

$$\begin{array}{ccccccc} & & \xrightarrow{ch} & & \xrightarrow{ch} & & \\ \oplus \mathbf{K}^{p+q}(X_p) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\quad} & \oplus \mathbf{K}^{p+q}(X_p) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\quad} & \oplus H^{p+q}(X_p) & \xrightarrow{\quad} & \oplus H^{p+q}(X_p) \\ & \searrow & \swarrow & & \swarrow & \searrow & \\ & \oplus \mathbf{K}^{p+q}(X_p, X_{p-1}) \otimes \mathbb{Q} & & & \oplus H^{p+q}(X_p, X_{p-1}) & & \\ & & \xrightarrow{ch} & & & & \end{array}$$

Grazie alla costruzione descritta nella prima sezione otteniamo un omomorfismo tra la successione spettrale monograduata razionalizzata in K-teoria $\{E_r, d_r\}_{r \geq 1}$ e quella truffa in coomologia razionale $\{'E_r, 'd_r\}_{r \geq 1}$; un semplice conto mostra che il morfismo $ch: \mathbf{K}^p(X_p, X_{p-1}) \cong C^p(X; \mathbb{Z}) \rightarrow C^p(X; \mathbb{Q})$ è indotto dal morfismo dei coefficienti $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ e quindi tensorizzando per \mathbb{Q} sulla seconda pagina

ch induce un isomorfismo (la tensorizzazione per \mathbb{Q} serve solo a questo). Quindi l'omomorfismo di gruppi $ch : E_2 \longrightarrow E'_2$ è un isomorfismo che grazie al lemma [1.1.3] induce isomorfismi in tutte le pagine successive ed in particolare anche nelle pagine finali. Per naturalità si verifica facilmente che $ch(\mathbf{K}_{(p)}^l) \subseteq H_{(p)}^l$ e che il morfismo tra le due pagine finali è indotto direttamente da ch ; grazie a questo possiamo dimostrare che $ch : \mathbf{K}^*(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} H^*(X; \mathbb{Q})$ è una biiezione e quindi un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{i_1} & A_1 \\ & \swarrow k_1 & \searrow j_1 \\ & E_1 & \end{array}$$

di anelli. Per semplicità indichiamo ancora con E_1 la coppia esatta razionalizzata di

K-teoria; fissiamo un indice p e consideriamo le due coppie esatte allo stadio $r \geq n+1$: in questo caso $A_r^p = (i^{r-1}A_1)^p = im(\mathbf{K}^*(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbf{K}^*(X_p) \otimes \mathbb{Q})$ e $'A_r^p = (i'^{r-1}'A_1)^p = im(H^*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X_p, \mathbb{Q}))$ e possiamo formare il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0 & & & & 0 & & & & \\ & & \parallel & & & & \parallel & & & & \\ \dots & \longrightarrow & A_r^{p-r} & \longrightarrow & E_r^p & \longrightarrow & A_r^p & \longrightarrow & A_r^{p-1} & \longrightarrow & E_r^{p-1+r} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow ch & & \downarrow ch & & \downarrow \cong & & \\ \dots & \longrightarrow & 'A_r^{p-r} & \longrightarrow & 'E_r^p & \longrightarrow & 'A_r^p & \longrightarrow & 'A_r^{p-1} & \longrightarrow & 'E_r^{p-1+r} & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & & & \parallel & & & & \parallel & & \\ & & 0 & & & & 0 & & & & 0 & & \end{array}$$

Gli zeri laterali sono dovuti al fatto che $\mathbf{K}^*(X_{p-r}) \otimes \mathbb{Q} = (0) = H^*(X_{p-r}; \mathbb{Q})$ visto che $X_{p-r} = \emptyset$ e quindi lo stesso vale per tutti i termini successivi; adesso, se $p=0$ allora otteniamo (5-lemma) che $ch : A_r^0 \xrightarrow{\cong} 'A_r^0$ dal momento che $A_r^{-1} = (0) = 'A_r^{-1}$; $im \mathbf{K}^*(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbf{K}^*(X_0) \otimes \mathbb{Q} \cong im H^*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X_0, \mathbb{Q})$; scegliendo $p=1$ otteniamo lo stesso isomorfismo con l'indice in crescita ed in conclusione quando $p=n = dim X$ vale l'isomorfismo $im \mathbf{K}^*(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbf{K}^*(X_n) \otimes \mathbb{Q} \cong im H^*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X_n, \mathbb{Q})$ ovvero $ch : \mathbf{K}^*(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} H^*(X; \mathbb{Q})$. quindi ch è un isomorfismo di anelli, essendo un omomorfismo di anelli biiettivo. \square

Dimostrazione: (corollario di torsione) (sketch) se nella dimostrazione del teorema di confronto non tensorizziamo per \mathbb{Q} la successione spettrale di K-teoria allora il carattere di Chern induce un morfismo tra le seconde pagine che coincide con $H^p(X; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^p(X; \mathbb{Q})$, iniettivo dal momento che per ipotesi la coomologia di X non ha torsione. Usando il fatto che la successione spettrale falsa coomologica collassa alla seconda pagina, ovvero $d'_r = 0$ per ogni $r \geq 0$ e l'osservazione precedente si vede facilmente che $d_r = 0$ per ogni $r \geq 2$, ovvero anche la successione spettrale di Atiyah-Hirzebruch collassa alla seconda pagina. Quindi possiamo identificare E_2 con E_∞ :

$$E_2 := \begin{bmatrix} \dots & 0 & H^0(X; \mathbb{Z}) & H^1(X; \mathbb{Z}) & \dots & H^n(X; \mathbb{Z}) & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$E_\infty := \begin{bmatrix} \dots & 0 & \frac{\mathbf{K}_{(0)}^*}{\mathbf{K}_{(1)}^*} & \frac{\mathbf{K}_{(1)}^*}{\mathbf{K}_{(2)}^*} & \frac{\mathbf{K}_{(2)}^*}{\mathbf{K}_{(3)}^*} & \dots & \frac{\mathbf{K}_{(n-1)}^*}{\mathbf{K}_{(n)}^*} & \mathbf{K}_{(n)}^* & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

Tutti i gruppi di coomologia intera di X sono liberi, essendo privi di torsione per ipotesi e finitamente generati dal momento che X è un CW-complesso finito; quindi lo stesso vale per i termini di E_∞ e partendo dalla libertà e finita generazione per $\mathbf{K}_{(n)}^*$ un ragionamento induttivo ci dice che $\mathbf{K}_{(0)}^* = \mathbf{K}^*(X)$

è libero e finitamente generato (un gruppo abeliano finitamente generato e privo di torsione è libero).
□

3 Bibliografia

- [A] J.F. Adams: *On Chern characters and the structure of the unitary group*, Proc. Camb. Phil. Soc, vol. 57 (1961), pagg. 189-199.
- [AH] M.F. Atiyah - F. Hirzebruch: *Analytic cycles on complex manifolds*, Topology, vol. 35, pagg. 25-45.
- [AT] M.F. Atiyah: *K-theory*, W.A, Benjamin Inc., New York, 1967.
- [B] R. Bott: *Quelques remarques sur les théorèmes de périodicité*, Bull. de la S.M.F., tome 87 (1959), pagg. 273-310.
- [DK] J.F. Davis - P. Kirk: *Lecture notes in algebraic topology*, Grad. Studies in Math., vol. 35.
- [H] D. Husemoller: *Fibre bundles*, McGraw-Hill.
- [HI] P. Hilton: *General Cohomology theory and K-theory*, London Math. Soc. Lecture note series, n. 1.
- [LW] A.T. Lundell - S. Weingram: *The topology of CW-complexes*, The Univ. series in Higher Math., 1969.
- [S] N.E. Steenrod: *Cohomology operations*, Annals of Math. Studies, vol. 50.