

CICLI OLOMORFI

Parte II: K-teoria topologica di base

Guido Pollini

Contents

1	Fibrati e K-teoria	2
1.1	I funtori \mathbf{K} e $\tilde{\mathbf{K}}$	2
1.2	Classi di isomorfismo stabile di fibrati	4
1.3	Esempi	7
2	Verso una teoria coomologica...	11
2.1	La successione esatta lunga a sinistra	11
2.2	Il teorema di periodicità di Bott	17
2.3	Una teoria coomologica generalizzata	21
2.4	Il vero anello di K-teoria	23
3	Bibliografia	28

1 Fibrati e K-teoria

1.1 I funtori \mathbf{K} e $\tilde{\mathbf{K}}$

Se X è uno spazio decente indichiamo con $\text{VECT}_{\mathbb{C}}(X)$ l'insieme delle classi di isomorfismo dei suoi fibrati; le operazioni \oplus e \otimes rendono l'insieme $\text{VECT}_{\mathbb{C}}(X)$ un *semianello commutativo con unità* (i.e. soltanto i \oplus -inversi non sono definiti). Questo semianello sicuramente contiene molte informazioni su X , ma manca decisamente di struttura: un buon compromesso consiste nel lavorare con il miglior anello (in senso universale) ottenibile da esso; basta costruire il miglior gruppo dal momento che il prodotto si ottiene gratuitamente.

Nota 1.1.1 (Miglior gruppo ottenibile da un semigrupp) Sia (S, \oplus) un semigrupp commutativo, associativo e con zero 0; siamo interessati al miglior gruppo commutativo G ottenibile in senso universale da S , ovvero tale che un morfismo di semigrupp con zero $S \xrightarrow{f} G$ tale che per ogni altro morfismo di semigrupp con zero $S \xrightarrow{g} G'$ con G' gruppo commutativo *esiste un unico* morfismo

di gruppi $G \xrightarrow{h} G'$ che fa commutare il diagramma:
$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & G \\ & \searrow g & \downarrow h \\ & & G' \end{array}$$
; basta definire insiemisticamente

$G := \frac{S \times S}{\equiv}$ dove $(a, b) \equiv (a', b')$ se e solo se esiste un $c \in S$ tale che $a \oplus b' \oplus c = a' \oplus b \oplus c$ e definire l'operazione componente per componente $(a, b) + (a', b') := (a \oplus a', b \oplus b')$; l'inverso per (a, b) è (b, a) il termine di supporto serve per rendere \equiv transitiva e può essere evitato se l'operazione in S gode della legge di cancellazione. Indichiamo la coppia (a, b) come differenza formale $a - b$ e si verifica che...

Applichiamo questa costruzione a $\text{VECT}_{\mathbb{C}}(X)$ introducendo anche la struttura di anello commutativo con unità:

Definizione 1.1.2 (Il \mathbf{K} -anello provvisorio) Il \mathbf{K} -anello provvisorio di uno spazio decente X è definito come:

$$\mathbf{K}(X) := \frac{\{E - F \mid E, F \in \text{VECT}_{\mathbb{C}}(X)\}}{\equiv}$$

dove $E - F \equiv E' - F'$ se e solo se esiste un altro fibrato G su X tale che $E \oplus F' \oplus G \cong E' \oplus F \oplus G$; la struttura di anello commutativo con unità sull'insieme $\mathbf{K}(X)$ è definita come segue:

$$\begin{aligned} \text{somma:} \quad & (E - F) + (E' - F') := (E \oplus E') - (F \oplus F') \text{ con inversi } - (E - F) := F - E; \\ \text{prodotto:} \quad & (E - F) \cdot (E' - F') := (E \otimes E' \oplus F \otimes F') - (E \otimes F' \oplus E' \otimes F) \\ \text{zero:} \quad & 0 := E - E \text{ per un qualsiasi fibrato } E; \\ \text{unità:} \quad & 1 := \varepsilon^1 - \varepsilon^0. \end{aligned}$$

La precedente costruzione è simile in natura al passaggio da \mathbb{N} a \mathbb{Z} , con l'unica differenza che tra fibrati vettoriali l'operazione \oplus non gode della legge di cancellazione. È bene tener presente che le operazioni in $\mathbf{K}(X)$ sono di fatto la somma diretta ed il prodotto tensoriale tra fibrati estese naturalmente alle differenze formali.

È presente anche una natura functoriale; se $f : X \rightarrow Y$ è una funzione continua tra due spazi decenti allora il pullback $f^* : \text{VECT}_{\mathbb{C}}(Y) \rightarrow \text{VECT}_{\mathbb{C}}(X)$ essendo compatibile con somme e prodotti origina un omomorfismo di anelli:

$$\begin{aligned} f^\# : \mathbf{K}(Y) &\longrightarrow \mathbf{K}(X) \\ E - F &\longmapsto f^*E - f^*F \end{aligned}$$

Inoltre, il morfismo $f^\#$ dipende soltanto dalla classe di omotopia di f dal momento che mappe omotope inducono pullback isomorfi (siamo su spazi paracompatti); quindi le assegnazioni $\mathbf{K}(-)$ e $-^\#$ formano un *functore controvariante omotopico* $\text{HTOP}_{\text{dec}} \rightarrow \text{RING}_{\mathbb{C}1}$.

L'anello $\mathbf{K}(X)$ ammette anche una versione *ridotta*, che non soltanto permette di scrivere alcune relazioni con maggiore semplicità, ma consente di interpretare geometricamente i vari risultati come vedremo nella prossima sezione; fissato un punto base $x_0 \in X$ consideriamo l'omomorfismo di anelli $rk_{x_0} : \mathbf{K}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ definito come $E - F \mapsto \dim_{\mathbb{C}} E_{x_0} - \dim_{\mathbb{C}} F_{x_0}$; il fatto che rk_{x_0} coincida con la freccia indotta dall'inclusione $\{x_0\} \hookrightarrow X$ e quindi provenga da una funzione continua garantisce naturalità ad alcune costruzioni che faremo in seguito. Questo porta alla definizione:

Definizione 1.1.3 (K-anello ridotto provvisorio) Il \mathbf{K} -anello ridotto di uno spazio decente X con punto base $x_0 \in X$ è definito come:

$$\tilde{\mathbf{K}}(X) := \ker \left(rk_{x_0} : \mathbf{K}(X) \rightarrow \mathbb{Z} \right)$$

La costruzione $\tilde{\mathbf{K}}$ eredita le proprietà functoriali da \mathbf{K} dal momento che i pullback preservano il rango locale; otteniamo così un'altro funtore dalla categoria degli spazi puntati decenti con i morfismi che preservano i punti base alla categoria degli anelli commutativi *functore controvariante omotopico* $\text{HTOP}_{\text{dec}}^\bullet \rightarrow \text{RING}_{\mathbb{C}}$ (le funzioni devono preservare i punti base, ma le omotopie sono libere); in generale l'anello $\tilde{\mathbf{K}}(X)$ è *privo di unità* (ma può anche averla se lo spazio è sconnesso ed una componente si riduce ad un punto). La struttura moltiplicativa è ereditata da \mathbf{K} e quindi dipende dalla scelta del punto base ed in seguito il simbolo $\tilde{\mathbf{K}}$ sarà sempre associato a spazi puntati.

Se lo spazio è sconnesso allora possiamo lavorare componente per componente (risultato falso se nella definizione di fibrato avessimo richiesto il rango costante globalmente e non soltanto localmente; si pensi banalmente allo spazio composto da due punti disgiunti):

Lemma 1.1.4 *Se X è uno spazio decente con componenti connesse X_0, X_1, \dots, X_n allora le restrizioni inducono l'isomorfismo di anelli:*

$$\mathbf{K}(X) \cong_{ring} \mathbf{K}(X_0) \times \mathbf{K}(X_1) \times \dots \times \mathbf{K}(X_n)$$

Se $x_0 \in X_0$ è un punto base fissato allora soltanto la componente X_0 risente della riduzione, ovvero:

$$\tilde{\mathbf{K}}(X) \cong_{ring} \tilde{\mathbf{K}}(X_0) \times \mathbf{K}(X_1) \times \dots \times \mathbf{K}(X_n)$$

Dimostrazione: mostriamo il risultato per due componenti connesse $X = X_0 \cup X_1$. Per far vedere la suriettività siano $E_0 - F_0$ e $E_1 - F_1$ differenze formali di fibrati rispettivamente su X_0 e X_1 ; allora la differenza formale $E_0 \cup E_1 - F_0 \cup F_1$ (dove ad esempio $E_0 \cup E_1$ è il fibrato su X ottenuto dal dato dei due fibrati E_0 e E_1 su ciascuna componente connessa) si restringe chiaramente alle due differenze originali (se lavorassimo con fibrati a rango costante questo ragionamento non funzionerebbe). Per l'iniettività si ragiona in modo perfettamente analogo. \square

Conviene chiarire meglio il legame tra gli anelli \mathbf{K} e $\tilde{\mathbf{K}}$; il morfismo rk_{x_0} è suriettivo e quindi il sottogruppo ridotto ammette un complemento, con lo splitting originato da una funzione continua:

Lemma 1.1.5 *Se X è uno spazio decente con punto base x_0 allora vale la seguente decomposizione di gruppi, naturale rispetto a morfismi indotti da funzioni continue puntate:*

$$\mathbf{K}(X) \cong_{group} \tilde{\mathbf{K}}(X) \oplus \mathbf{K}(\{x_0\}) \cong \tilde{\mathbf{K}}(X) \oplus \langle \varepsilon^1 - \varepsilon^0 \rangle \mathbb{Z}$$

Si tratta di un isomorfismo valido soltanto a livello di gruppi, conseguenza del fatto che la categoria degli anelli commutativi ben si guarda dall'essere abeliana e quindi i criteri di splitting non funzionano. Anche se la decomposizione precedente non rispetta i prodotti, la vera relazione tra i due anelli si ottiene senza problemi; dato un anello commutativo A definiamo un nuovo anello commutativo A' additivamente come $A \oplus \mathbb{Z}$ e con un nuovo prodotto definito dalle regole $a \oplus 0 \cdot 0 \oplus 1 := a \oplus 0$ ed in modo che $A \oplus (0)$ sia ideale e $(0) \oplus \mathbb{Z}$ sia un sottoanello (se A è privo di unità allora A' è il miglior anello con unità ottenibile in senso universale da A). La relazione tra gli anelli $\mathbf{K}(X)$ e $\tilde{\mathbf{K}}(X)$ è consiste esattamente nella perdita dell'unità (l'unica eccezione si ha quando una componente connessa coincide esattamente con il punto base; in questo caso infatti il $\tilde{\mathbf{K}}$ ha ancora l'unità).

Anche se in seguito $\tilde{\mathbf{K}}$ sarà essenzialmente utilizzato per scrivere meglio alcune relazioni (ad esempio per i bouquet [2.1.7]), la sua esistenza geometrica è giustificata nella prossima sezione.

1.2 Classi di isomorfismo stabile di fibrati

Indichiamo con $GR_r(\mathbb{C}^l)$ la Grassmanniana degli r -piani passanti per l'origine in \mathbb{C}^l , $T_{r,l}$ il suo corrispondente fibrato tautologico di rango r e con il simbolo $[A, B]$ l'insieme delle classi di omotopia di funzioni continue tra A e B ; allora vale il seguente teorema dove non viene fatta alcuna ipotesi sulla compattezza o locale compattezza, ma è essenziale la finito dimensionalità per poter fare pullback da una Grassmanniana di tipo finito (si veda [H], Chapt. 7, Th. 7.2):

Teorema 1.2.1 (Classificazione) *Se X è un CW-complesso di dimensione finita n allora per ogni intero r vale la seguente biiezione:*

$$\begin{aligned} [X, \text{GR}_r(\mathbb{C}^l)] &\xrightarrow{1:1} \text{VECT}_{\mathbb{C}}^r(X) \\ f &\longmapsto f^*T_{r,l} \end{aligned}$$

dove l è un qualsiasi intero tale che $2l \geq n + 2r$.

Il teorema precedente si applica in particolare a spazi decenti e permette di ottenere il seguente risultato per fibrati di rango non necessariamente costante:

Corollario 1.2.2 *Se X è uno spazio decente allora per ogni suo fibrato E esiste un altro fibrato F tale che $E \oplus F \cong \varepsilon^a$.*

Dimostrazione: se supponiamo che X sia connesso il fibrato E_i si scrive come $E \cong f^*T_{r,l}$ con $f: X \rightarrow \text{GR}_r(\mathbb{C}^l)$ funzione continua e r, l interi opportuni; d'altra parte stiamo usando una Grassmanniana su uno spazio finito e quindi il tautologico $T_{r,l}$ ammette come \oplus -complemento ad un fibrato banale il tautologico ortogonale $T_{r,l}^\perp$. Conseguentemente $f^*T_{r,l}^\perp \oplus E_i \cong f^*(T_{r,l}^\perp \oplus T_{r,l}) \cong \varepsilon^l$ e quindi $f^*T_{r,l}^\perp$ è il fibrato cercato. Per definizione uno spazio decente ha un numero finito di componenti connesse e possiamo ripetere il precedente ragionamento sommando eventualmente un numero finito di fibrati banali su ogni componente per ottenere un fibrato banale ε^a di rango costante a . \square

L'ipotesi di decenza per X è in generale indispensabile; ad esempio se X è un CW-complesso avente infinite componenti connesse $\{X_n\}$ basta scegliere come fibrato il dato di un fibrato banale di rango n su ogni componente X_n per rendere falso il corollario precedente. Per un controesempio infinito dimensionale si consideri il line-bundle tautologico T di $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ e supponiamo per assurdo che esista un altro fibrato T' tale che $T \oplus T'$ sia banale. È noto che $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}) \cong_{\text{ring}} \mathbb{Z}[a]$ dove $a := c_1(T)$ e se indichiamo con $c(T') = 1 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$ la classe totale di Chern di T' abbiamo la relazione $1 = c(T \oplus T') = c(T) \cup c(T') = 1 + (a + t_1) + (at_1 + t_2) + \dots + (at_{n-1} + t_n) + (at_n)$. Questo implica che $at_n = -a^{n+1} = 0$ ed è impossibile dal momento che a^{n+1} deve essere un generatore di $H^{2(n+1)}(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. In questo caso infatti il tautologico di $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ non può scriversi come pullback di un tautologico di una Grassmanniana di tipo finito.

Il corollario [1.2.2] permette di semplificare nettamente la rappresentazione degli elementi di $\mathbf{K}(X)$; infatti se $E - F$ è una differenza formale di fibrati su X allora esiste un fibrato F' tale che $F \oplus F' \cong \varepsilon^a$ e quindi in $\mathbf{K}(X)$ otteniamo la relazione $E - F = E \oplus F' - F \oplus F' = E \oplus F' - \varepsilon^a$; conseguentemente:

Corollario 1.2.3 *Se X è uno spazio decente allora ogni elemento in $\mathbf{K}(X)$ si rappresenta come una differenza $E - \varepsilon^a$ dove E è un fibrato; inoltre se x_0 è un punto base fissato in X allora ogni elemento in $\tilde{\mathbf{K}}(X)$ si rappresenta come una differenza $E - \varepsilon^{\dim_{\mathbb{C}} E_{x_0}}$ con E fibrato. Due fibrati E, F su X coincidono come elementi in $\mathbf{K}(X)$ se e solo se esiste un fibrato banale ε^a tali che $E \oplus \varepsilon^a \cong F \oplus \varepsilon^a$.*

Quindi la relazione di equivalenza in \mathbf{K} diventa la seguente: $E - \varepsilon^a = F - \varepsilon^b$ se e solo se esiste ε^c tale che $E \oplus \varepsilon^{b+c} \cong F \oplus \varepsilon^{a+c}$; prima di continuare conviene introdurre un nuovo concetto:

Definizione 1.2.4 (Gruppo delle classi di isomorfismo stabile) *Se X è uno spazio decente allora l'insieme delle sue classi di isomorfismo stabile di fibrati è definito come:*

$$\text{STAB}_{\mathbb{C}}(X) := \frac{\text{VECT}_{\mathbb{C}}(X)}{\sim_s}$$

dove $E \sim_s F$ se e solo se esistono due fibrati banali ε^a e ε^b tali che $E \oplus \varepsilon^a \cong F \oplus \varepsilon^b$ (equivalenza stabile); la somma diretta \oplus induce su $\text{STAB}_{\mathbb{C}}(X)$ una struttura di gruppo commutativo.

È immediato verificare la buona definizione dell'operazione su $\text{STAB}_{\mathbb{C}}(X)$ dal momento che la somma \oplus è compatibile con l'equivalenza stabile; lo zero corrispondente alla classe stabile dei fibrati banali e l'esistenza dell'inverso per un fibrato E segue dal corollario [1.2.2] che produce un E' tale che $E \oplus E' \cong \varepsilon^a$. Il fondamentale collegamento tra $\text{STAB}_{\mathbb{C}}(X)$ e la K-teoria è espresso dai seguenti risultati:

Teorema 1.2.5 *Se X è uno spazio decente e x_0 un suo punto base allora vale il seguente isomorfismo di gruppi:*

$$\begin{array}{ccc} \text{STAB}_{\mathbb{C}}(X) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{\mathbf{K}}(X) \\ E & \longmapsto & E - \varepsilon^{\dim_{\mathbb{C}} E_{x_0}} \end{array}$$

Dimostrazione: se $E \sim_s E'$ allora esistono due interi a, a' tale che $E \oplus \varepsilon^a \cong E' \oplus \varepsilon^{a'}$ ed in particolare $\dim_{\mathbb{C}} E_{x_0} + a = \dim_{\mathbb{C}} E'_{x_0} + a'$. Quindi $E - \varepsilon^{\dim_{\mathbb{C}} E_{x_0}} = E \oplus \varepsilon^a - \varepsilon^{\dim_{\mathbb{C}} E_{x_0} + a} = E' \oplus \varepsilon^{a'} - \varepsilon^{\dim_{\mathbb{C}} E'_{x_0} + a'} = E' - \varepsilon^{\dim_{\mathbb{C}} E'_{x_0}}$ e la funzione è ben definita; l'addittività e la suriettività sono immediate. Per l'injectività basta osservare che se $E - \varepsilon^{\dim_{\mathbb{C}} E_{x_0}} = 0$ in $\tilde{\mathbf{K}}(X)$ allora esiste un intero positivo a tale che $E \oplus \varepsilon^a \cong \varepsilon^{\dim_{\mathbb{C}} E_{x_0} + a}$ e quindi E rappresentava la classe stabile banale. \square

Grazie al teorema precedente $\text{STAB}_{\mathbb{C}}(X)$ eredita da $\tilde{\mathbf{K}}(X)$ una struttura di anello commutativo; per descriverla esplicitamente osserviamo che se $E - \varepsilon^a$ con $a = rk_{\mathbb{C}} E$ e $F - \varepsilon^b$ con $b = rk_{\mathbb{C}} F$ sono elementi in $\tilde{\mathbf{K}}(X)$ allora il loro prodotto è per definizione $(E \otimes F \oplus \varepsilon^{ab}) - (E \otimes \varepsilon^b \oplus F \otimes \varepsilon^a)$. Per semplificare l'espressione scegliamo due fibrati E' e F' tali che $E' \oplus E \cong \varepsilon^\alpha$ e $F' \oplus F \cong \varepsilon^\beta$, sommiamo $E' \otimes \varepsilon^b \oplus F' \otimes \varepsilon^a$ ad ambo i termini del prodotto e cancelliamo il termine ε^{ab} . L'espressione finale è $(E \otimes F \oplus E' \otimes \varepsilon^b \oplus F' \otimes \varepsilon^a) - \varepsilon^{\alpha b + \beta a - ab}$ e quindi $E \otimes F \oplus E' \otimes \varepsilon^b \oplus F' \otimes \varepsilon^a$ rappresenta il prodotto delle due classi stabili E ed F in $\text{STAB}_{\mathbb{C}}(X)$. Non è possibile usare direttamente il prodotto tensoriale dal momento che non è compatibile con l'equivalenza stabile (si veda l'esempio [1.3.2]) e l'espressione sopra indicata è in un certo senso il miglior prodotto compatibile con la stabilità ottenibile da \otimes . In generale $\text{STAB}_{\mathbb{C}}$ evidenzia esplicitamente in contenuto geometrico, mentre l'algebra è nettamente più semplice in $\tilde{\mathbf{K}}$.

La descrizione di $\mathbf{K}(X)$ in termini stabili procede in modo analogo; ogni suo elemento si rappresenta come $E - \varepsilon^a$ con a intero qualsiasi e quindi non sorprende il seguente risultato (per comodità definiamo per ogni n positivo $\varepsilon^{-n} := -\varepsilon^n$ visto come elemento di $\mathbf{K}(X)$):

Teorema 1.2.6 *Se X è uno spazio decente allora vale il seguente isomorfismo di gruppi:*

$$\begin{array}{ccc} \text{STAB}_{\mathbb{C}}(X) \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{K}(X) \\ E \oplus n & \longmapsto & E - \varepsilon^{n + \dim_{\mathbb{C}} E_{x_0}} \end{array}$$

Dimostrazione: siano $E \oplus n = E' \oplus n$ due rappresentazioni dello stesso elemento in $\text{STAB}_{\mathbb{C}}(X) \oplus \mathbb{Z}$; quindi esistono interi positivi a, a' tali che $E \oplus \varepsilon^a \cong E' \oplus \varepsilon^{a'}$ e di conseguenza $\dim_{\mathbb{C}} E_{x_0} + a = \dim_{\mathbb{C}} E'_{x_0} + a'$. Ma allora $E - \varepsilon^{n + \dim_{\mathbb{C}} E_{x_0}} = E \oplus \varepsilon^a - \varepsilon^{n + \dim_{\mathbb{C}} E_{x_0} + a} = E' \oplus \varepsilon^{a'} - \varepsilon^{n + \dim_{\mathbb{C}} E'_{x_0} + a'} = E' - \varepsilon^{n + \dim_{\mathbb{C}} E'_{x_0}}$ e quindi abbiamo la buona definizione. L'addittività è immediata; inoltre dato un elemento $E - \varepsilon^n \in \mathbf{K}(X)$ basta prendere $E \oplus (n - \dim_{\mathbb{C}} E_{x_0})$ per ottenere la suriettività. Sia $E \oplus n$ tale che $E - \varepsilon^{n + \dim_{\mathbb{C}} E_{x_0}} = 0$; allora

esiste un intero positivo a tale che $E \oplus \varepsilon^a \cong \varepsilon^{n+\dim_{\mathbb{C}} E_{x_0}+a}$ e quindi E rappresenta la classe stabile banale e calcolando il rango nell'ultima espressione si ottiene $n = 0$ e quindi $E \oplus n$ rappresentava la classe stabile banale. \square

Nota 1.2.7 Se $X = A \cup B$ come unione disgiunta in generale non è vero che $\text{STAB}_{\mathbb{C}}(X) = \text{STAB}_{\mathbb{C}}(A) \oplus \text{STAB}_{\mathbb{C}}(B)$; infatti scegliendo ad esempio un punto base in A abbiamo la relazione $\mathbf{K}(X) = \mathbf{K}(A) \oplus \mathbf{K}(B)$ e quindi $\tilde{\mathbf{K}}(X) = \tilde{\mathbf{K}}(A) \oplus \mathbf{K}(B) = \tilde{\mathbf{K}}(A) \oplus \tilde{\mathbf{K}}(B) \oplus \mathbb{Z}$ dal momento che la riduzione ha effetto soltanto su una componente connessa. Per ottenere l'additività per $\text{STAB}_{\mathbb{C}}$ avremmo dovuto modificare la relazione \sim_s usando nella sua definizione fibrati banali su ogni componente connessa e non fibrati globalmente banali, ma questo avrebbe distrutto l'irrinunciabile additività di \mathbf{K} .

1.3 Esempi

Cerchiamo di fare qualche calcolo, identificando sempre $\tilde{\mathbf{K}}$ e $\text{STAB}_{\mathbb{C}}$; il fatto che $\tilde{\mathbf{K}}$ sia un invariante omotopico implica la relazione $\tilde{\mathbf{K}}(X) \cong (0)$ per ogni X decente contraibile.

Grafi: iniziamo con il dimostrare che ogni fibrato E su un grafo connesso X (i.e. un triangolato connesso di dimensione 1) ammette una sezione $pt \neq 0$; sullo 0-scheletro riusciamo a costruirne una banalmente ed il problema consiste nell'estenderla all'1-scheletro. Su ogni 1-simplex I di X il fibrato E è banale e quindi isomorfo a $I \times \mathbb{C}^r \rightarrow I$; la sezione $pt \neq 0$ sullo 0-scheletro induce una sezione $\partial I = S^0 \rightarrow I \times (\mathbb{C}^r - \{0\})$ della forma $x \mapsto (x, f(x))$ e quindi dobbiamo estendere la funzione $f: S^0 \rightarrow \mathbb{C}^r - \{0\}$ su tutto I . Questo è sicuramente possibile dal momento che $[S^0, \mathbb{C}^r - \{0\}] = \pi_0(S^{2r-1}) = \{*\}$ per ogni $r \geq 1$; grazie a questo, usando la topologia debole otteniamo una sezione $pt \neq 0$ su tutto l'1-scheletro corrispondente ad un sottofibrato banale ε^1 di E , \oplus -complementabile dal momento che lavoriamo in categoria topologica. Questo origina la decomposizione $E \cong E' \oplus \varepsilon^1$ ed induttivamente rende E banalizzabile; in conclusione $\text{VECT}_{\mathbb{C}}(X) = \{\text{fibrati banali}\}$ e di conseguenza:

$$\tilde{\mathbf{K}}(\text{grafo connesso}) \cong (0)$$

2-sfera: sia E un fibrato su S^2 e cerchiamo di ripetere il ragionamento precedente dotando S^2 di una qualsiasi triangolazione; sappiamo che E è banale sull'1-scheletro essendo un grafo connesso ed in particolare ammette una sezione $pt \neq 0$ che dobbiamo tentare di estendere al 2-scheletro, ragionando 2-simplex per 2-simplex. Su un 2-simplex Δ il fibrato è banale e quindi identificabile con $\Delta \times \mathbb{C}^r \rightarrow \Delta$; la sezione sull'1-scheletro induce una sezione $pt \neq 0$ di questo fibrato banale su $\partial \Delta \approx S^1$ che ha la forma $x \mapsto (x, f(x))$ con $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}^r - \{0\}$. La funzione f è sicuramente estendibile a tutto Δ se $[S^1, \mathbb{C}^r - \{0\}] = \{*\}$ ovvero se $r \geq 2$; sotto questa ipotesi, incollando il tutto usando la topologia debole, si ottiene la sezione $pt \neq 0$ cercata su tutto X , corrispondente ad un sottofibrato banale ε^1 di E complementabile. Questo procedimento permette al massimo di ottenere un isomorfismo $E \cong L \oplus \varepsilon^a$ con L line-bundle, a priori non banale.

Per discutere l'unicità di una tale decomposizione richiamiamo alcuni fatti noti sulla prima classe di Chern; il gruppo dei line-bundle complessi topologici su uno spazio decente X è identificabile con $\text{LBND}_{\mathbb{C}}(X) \cong H^1(X; (\mathcal{C}_X^0)^\times)$ dove \mathcal{C}_X^0 indica il fascio delle funzioni continue a valori complessi su X ; dalla successione esponenziale $0 \rightarrow \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathcal{C}_X^0 \rightarrow (\mathcal{C}_X^0)^\times \rightarrow 0$ usando il fatto che il fascio \mathcal{C}_X^0 è fine si deduce l'isomorfismo di gruppi $H^1(X; (\mathcal{C}_X^0)^\times) \cong H^2(X; \mathbb{Z})$ e risultati standard assicurano che tale isomorfismo è realizzato dalla prima classe di Chern $c_1(-)$. Quindi *i line-bundle sono classificati dalla*

prima classe di Chern (in generale le classi di Chern non sono abbastanza potenti da descrivere la classe di isomorfismo di un fibrato di rango ≥ 2).

Tornando a S^2 , se abbiamo due decomposizioni $E \cong L \oplus \varepsilon^a \cong L' \oplus \varepsilon^a$ allora applicando la classe totale di Chern si ottiene $c_1(L) = c_1(L')$ e quindi $L \cong L'$ per quanto detto sopra; quindi *ogni fibrato su S^2 ammette una decomposizione del tipo $L \oplus \varepsilon^a$ con L line-bundle determinato univocamente*. Chiaramente questo permette di definire una biiezione $\text{STAB}_{\mathbb{C}}(S^2) \xrightarrow{1:1} \text{LBND}_{\mathbb{C}}(S^2)$ con $[E] = [L \oplus \varepsilon^a] \mapsto L$; dimostriamo che in realtà si tratta di un isomorfismo di gruppi, stando attenti al fatto che l'operazione principale in $\text{STAB}_{\mathbb{C}}(S^2)$ è la somma \oplus mentre in $\text{LBND}_{\mathbb{C}}(S^2)$ è il prodotto \otimes . Ogni line-bundle su S^2 si ottiene come potenza tensoriale del tautologico H e quindi conviene cercare di ottenere qualche relazione su di esso; si verifica facilmente che la funzione di innesto ¹ per H è la mappa $S^1 \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(1)$ definita come $z \mapsto [z]$ e grazie a questo possiamo dimostrare che $(H \otimes H) \oplus \varepsilon^1 \cong H \oplus H$ dal momento che le funzioni di innesto di questi fibrati sono $z \mapsto \begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $z \mapsto \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}$ come funzioni $S^1 \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(2)$ (basta

infatti scegliere un cammino continuo γ_t in $\text{GL}_{\mathbb{C}}(2)$ collegante l'identità a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e formare l'omotopia

$\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \gamma_t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \gamma_t$). Questa relazione letta nelle classi stabili fornisce $[H^{\otimes 2}] = 2[H]$ ed analogamente moltiplicandola tensorialmente per il duale H^* otteniamo $H \oplus H^* \cong \varepsilon^2$ ovvero $[H] + [H^*] = 0$; moltiplicandola per $H^{\otimes n-2}$ e ragionando per induzione otteniamo $[H^{\otimes n}] = n[H]$ ed usando $H^* \otimes H \cong \varepsilon^1$ abbiamo provato la relazione $[H^n] = n[H]$ valida per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Questo è sufficiente perché se $[H^a]$ e $[H^b]$ sono due classi stabili allora $[H^a] + [H^b] := [H^a \oplus H^b] = [aH \oplus bH] = [(a+b)H] = [H^{a+b}]$ ed in conclusione $\tilde{\mathbf{K}}(S^2) \cong \text{STAB}_{\mathbb{C}}(S^2) \cong_{\text{group}} \text{LBND}_{\mathbb{C}}(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Siamo stati avvantaggiati non poco dalla struttura di gruppo presente nei line-bundle e dal fatto che la prima classe di Chern classifica i fibrati di rango 1.

Cerchiamo di descrivere anche la struttura di anello di $\text{STAB}_{\mathbb{C}}(S^2)$; ad esempio il prodotto $[H][H]$ è rappresentato (si veda l'osservazione dopo il teorema [1.2.5], sapendo che $H \oplus H^* \cong \varepsilon^2$) dalla classe $[H \otimes H \oplus H^* \oplus H^*] = 2[H] - [H] - [H] = 0$ e quindi è nullo; lo stesso ragionamento si applica a due elementi qualsiasi in $\text{STAB}_{\mathbb{C}}(S^2)$ e di conseguenza *il prodotto dell'anello $\tilde{\mathbf{K}}(S^2)$ è banale* (il corollario [2.4.3] presenta un risultato più generale).

Proposizione 1.3.1 *Vale l'isomorfismo di anelli $\tilde{\mathbf{K}}(S^2) \cong_{\text{ring}} \mathbb{Z}_{\text{fake}}$, dove \mathbb{Z}_{fake} indica l'anello additivamente isomorfo a \mathbb{Z} e con prodotto nullo; un generatore additivo di $\tilde{\mathbf{K}}(S^2)$ è $H - \varepsilon^1$, dove H è il tautologico di S^2 .*

Esempio 1.3.2 Se tentassimo di definire la struttura di anello in $\text{STAB}_{\mathbb{C}}(S^2)$ ponendo $[E][F] := [E \otimes F]$ non funzionerebbe; ad esempio $[H][H] = [H \otimes H] = 2H$, ma scegliendo rappresentanti stabili diversi si ottiene $[H \oplus \varepsilon^1][H] = [H \otimes H \oplus H] = 2[H] + [H] = 3[H] \neq 2[H]$ e quindi il prodotto tensoriale non è compatibile con la relazione di equivalenza stabile.

Superfici: il ragionamento ostruttivo fatto per S^2 si può ripetere per una qualsiasi 2-varietà differenziale liscia e connessa X , e quindi ogni suo fibrato E si scrive come $L \oplus \varepsilon^a$ con L line-bundle univocamente determinato (la prima classe di Chern determina sempre i line-bundle); un risultato

¹vale la biiezione $\text{VECT}_{\mathbb{C}}^l(S^n) \xrightarrow{1:1} [S^{n-1}, \text{GL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^l)] = [S^{n-1}, \text{U}(l)]$ ottenuta osservando che S^n si scrive come incollamento lungo l'equatore S^{n-1} di due n -dischi contraibili; la classe di omotopia $f: S^{n-1} \rightarrow \text{U}(l)$ corrispondente ad un fibrato E è la sua *funzione d'innesto*.

standard in topologia algebrica afferma che²:

$$H^2(X; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} (0) & \text{se } X \text{ non è compatta o ha bordo} \\ \mathbb{Z} & \text{se } X \text{ è compatta, senza bordo e orientabile} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } X \text{ è compatta, senza bordo e non orientabile} \end{cases}$$

Ovviamente su X non esiste un tautologico, ma basta scegliere come H un line-bundle con classe di Chern generante H^2 ; ad esempio un tale H si ottiene fissando un punto x_0 qualsiasi di X , prendendo un fibrato banale su $X - \{x_0\}$ ed incollandolo ad un line-bundle banale sopra un intorno a disco di x_0 usando la funzione di innesto $z \mapsto [z]$, esattamente come fatto per il tautologico della sfera. La verifica della relazione $H \otimes H \oplus \varepsilon^1 \cong H \oplus H$ e di tutto il resto procede in modo analogo ad S^2 dal momento che ogni altro line-bundle si ottiene come potenza tensoriale di H , essendo $c_1(H)$ generatore di $H^2(X; \mathbb{Z})$; conseguentemente:

$$\tilde{\mathbf{K}}(X) \cong_{ring} \begin{cases} (0) & \text{se } X \text{ non è compatta o ha bordo} \\ \mathbb{Z}_{fake} & \text{se } X \text{ è compatta, senza bordo e orientabile} \\ \mathbb{Z}_{2 fake} & \text{se } X \text{ è compatta, senza bordo e non orientabile} \end{cases}$$

3-sfera: per ogni indice k vale la biiezione $VECT_{\mathbb{C}}^k(S^3) \xrightarrow{1:1} [S^2, U(k)] = \pi_2(U(k))$ dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che essendo $U(k)$ un gruppo topologico il suo π_1 agisce in modo banale sulle classi di omotopia e quindi i punti base sono irrilevanti; usando l'omeomorfismo $U(1) \approx S^1$ ed i vari fibrati

$$\begin{array}{ccc} U(l-1) \hookrightarrow U(l) & & \\ \downarrow & \text{si ottiene facilmente } \pi_2(U(k)) = (0) \text{ e quindi } VECT_{\mathbb{C}}(S^3) = \{fibrati banali\}. & \\ S^{2l-1} & & \end{array}$$

Questo in particolare implica la relazione $\tilde{\mathbf{K}}(S^3) \cong (0)$.

(2n+1)-sfere: il problema si complica notevolmente perchè ad esempio per una 5-sfera vale la biiezione $VECT_{\mathbb{C}}^2(S^5) \xrightarrow{1:1} [S^4, U(2)] = \pi_4(U(2)) \cong \pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}_2$ dove abbiamo usato la solita fibrazione per $U(2)$ ed il risultato non banale $\pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}_2$; quindi su S^5 esiste un fibrato non banale P di rango 2 avente classi di Chern nulle per come è fatta la coomologia di S^5 . In realtà $P \oplus \varepsilon^1$ è banale dal momento che S^5 sopporta soltanto fibrati di rango 3-banali; per vedere questo basta provare che $VECT_{\mathbb{C}}^3(S^5) = [S^4, U(3)] = \pi_4(U(3)) = (0)$. Una delle tante versioni del teorema di periodicità unitaria di Bott (vedi teorema [2.2.1]) afferma in particolare che $\pi_n(U) = 0$ se n è pari ed usando la fibrazione standard si vede che $\pi_4(U(3)) \cong \pi_4(U) = (0)$ e quindi S^5 ha solo fibrati di rango 3 banali: $P \oplus \varepsilon^1$ è veramente banale; la stessa idea modulo alcune modifiche permette di provare la banalità stabile per ogni fibrato su S^5 e di conseguenza $\tilde{\mathbf{K}}(S^5) = (0)$. Analogamente $\tilde{\mathbf{K}}(S^{2n+1}) = (0)$ e usando l'altra parte del teorema di Bott, ovvero $\pi_n(U) \cong \mathbb{Z}$, si potrebbe far vedere che almeno additivamente $\tilde{\mathbf{K}}(S^{2n}) \cong_{group} \mathbb{Z}$.

Concludiamo con un ultimo calcolo, che si rivelerà molto utile nella successione spettrale di Atiyah e Hirzebruch:

Teorema 1.3.3 *Se I è un insieme al più numerabile e $p \geq 0$ un qualsiasi intero allora vale il seguente isomorfismo di anelli:*

$$\tilde{\mathbf{K}}\left(\bigvee_{i \in I} S_{(i)}^p\right) \cong \prod_{i \in I} \tilde{\mathbf{K}}(S_{(i)}^p)$$

²se la superficie non è compatta oppure ha bordo allora è omotopicamente equivalente ad un grafo; semplice operazione di scavo e topologia debole se c'è un bordo da cui partire, leggermente più complesso in assenza di bordo.

Si tratta di un risultato del tutto banale per un bouquet finito, che nel caso infinito si complica leggermente; conviene premettere il seguente fondamentale risultato (se $a \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ allora $[a]$ indica il più grande intero n tale che $n \leq a$):

Teorema 1.3.4 (Stabilità) *Sia X un CW-complesso connesso di dimensione finita n ; allora:*

- se E è un fibrato su X di rango k con $k \geq m := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ allora esiste un altro fibrato E' di rango m tale che $E \cong E' \oplus \varepsilon^{k-m}$;
- se E ed F sono due fibrati su X di rango k con $k \geq m := \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ allora $E \sim_s F$ se e solo se $E \cong F$.

Grossolanamente, questo significa che ogni fibrato ha una sorta di essenza non banale, avente rango dipendente soltanto dalla dimensione della base, ma non dalla sua complessità; inoltre quest'essenza determina il fibrato originale a patto che sia grande abbastanza rispetto alla base. Il teorema successivo mostra come interpretare tutto questo in termini di $\text{STAB}_{\mathbb{C}}$.

Il primo risultato di stabilità è elementare (si veda [H] per maggiori dettagli); supponiamo per semplicità che X sia triangolabile. Sullo 0 scheletro riusciamo chiaramente a trovare una sezione $pt \neq 0$ di E e procediamo per induzione sul numero di simpletti; sia allora $X = Y \sqcup \{p\text{-simpletso}\}$ ed indichiamo il p -simpletso con $D^p \hookrightarrow X$; supponiamo di aver trovato una sezione $pt \neq 0$ di E sopra Y e di tentare l'estensione alla cella D^p ; il fibrato E è banale su D^p essendo contraibile e quindi $E|_P \cong D^p \times \mathbb{C}^r \longrightarrow D^p$; in questa rappresentazione la sezione data si scrive come una funzione continua $\partial P \approx S^{p-1} \longrightarrow \mathbb{C}^r - \{0\}$ che sicuramente si estende ad una funzione continua $D^p \longrightarrow \mathbb{C}^r - \{0\}$ se $[S^{p-1}, \mathbb{C}^r - \{0\}] = [S^{p-1}, S^{2r-1}] = \pi_{p-1}(S^{2r-1}) = \{*\}$ ovvero se $p-1 < 2r-1$. Sotto questa ipotesi si estende la sezione su Y ad una sezione $pt \neq 0$ su tutto X , corrispondente ad un sottofibrato banale di rango 1 e questo è essenzialmente il primo risultato scritto in modo diverso. La seconda parte del teorema è leggermente meno semplice, ma sfrutta comunque tecniche ostruttive elementari.

Dimostrazione: (Sketch di [1.3.3]) identifichiamo $\tilde{\mathbf{K}}$ con le classi di isomorfismo stabile $\text{STAB}_{\mathbb{C}}$; il morfismo richiesto è indotto dalle restrizioni $E \longmapsto \{E|_{S_{(i)}^p}\}_{i \in I}$ ed è chiaramente ben definito. un elemento $\{E_i\}$ di $\prod_{i \in I} \text{STAB}_{\mathbb{C}}(S_{(i)}^p)$ è il dato arbitrario di una classe stabile per ogni sfera, senza vincoli; se riuscissimo ad usare l'equivalenza stabile per sostituire $\{E_i\}$ con $\{F_i\}$ dove tutti i vari F_i hanno lo stesso rango saremmo a posto, potendoli incollare per un punto ed ottenendo così la suriettività cercata. Il primo teorema di stabilità afferma che ogni fibrato è stabilmente equivalente ad un fibrato di rango fissato, dipendente solo dalla dimensione dell'ambiente e questo permette chiaramente la sostituzione. Per l'iniettività il problema è simile; supponiamo di avere un fibrato E sul bouquet e di sapere che $E|_{S_{(i)}^p} \sim_s 0$ per ogni i . Se la restrizione avesse bisogno della somma con un fibrato banale dal rango incontrollato per banalizzarsi non potremmo dedurre la banalità stabile per E : il secondo risultato di stabilità garantisce che ogni fibrato $\sim_s 0$ si banalizza usando un fibrato banale il cui rango dipende solamente dalla dimensione dell'ambiente e questo chiaramente basta. \square

La stessa dimostrazione si ricicla immediatamente al caso di un bouquet finito dimensionale $\bigvee_{i \in I} X_i$ di spazi decenti puntati; la finito dimensionalità del bouquet è in ogni caso irrinunciabile.

Il teorema di stabilità ha anche una conseguenza abbastanza importante:

Teorema 1.3.5 *Sia X uno spazio decente connesso di dimensione n ; allora il pullback dei tautologici induce la biiezione per ogni $l \geq \frac{n+1}{2}$:*

$$\begin{aligned} [X, \text{GR}_l(\mathbb{C}^{2l})] &\xrightarrow{1:1} \text{STAB}_{\mathbb{C}}(X) \\ f &\longmapsto f^*T_{l,2l} \end{aligned}$$

Inoltre ponendo $\text{BU} := \varinjlim_l \text{GR}_l(\mathbb{C}^{2l})$ vale la biiezione:

$$[X, \text{BU}] \xrightarrow{1:1} \text{STAB}_{\mathbb{C}}(X)$$

Grazie al teorema di classificazione omotopica dei fibrati otteniamo una biiezione $\text{VECT}_{\mathbb{C}}^l(X) \xleftarrow{1:1} \tilde{\mathbf{K}}(X)$ costruita usando operazioni naturali come l'equivalenza stabile e i pullback di tautologici; il risultato non è affatto banale concettualmente, ma presenta alcuni svantaggi. Ad esempio se E e F sono due fibrati di rango l la loro somma $E \oplus F$ ha rango $2l$ e quindi per poterla interpretare in questo contesto si dovrebbe determinare la sua essenza l -dimensionale, operazione a priori infattibile. Anche per questo, conviene continuare ad usare $\text{STAB}_{\mathbb{C}}$ dal punto di vista geometrico e $\tilde{\mathbf{K}}$ da quello algebrico.

Dimostrazione: (sketch) grazie al teorema di classificazione [1.2.1] otteniamo immediatamente la biiezione $\text{VECT}_{\mathbb{C}}^l(X) \xrightarrow{1:1} [X, \text{GR}_l(\mathbb{C}^{2l})]$ e quindi l'applicazione è ben definita. La suriettività e l'iniettività seguono direttamente dal teorema di stabilità stando attenti alle disequaglianze usate; ad esempio se E e F sono due fibrati di rango l e $E \sim_s F$ allora $E \cong F$ dal momento che $l \geq \frac{n+1}{2} \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ e quindi vale il secondo teorema di stabilità. Inoltre ogni classe stabile è rappresentata da un fibrato E che possiamo assumere di rango $\geq l$ a meno di sommarvi un fibrato banale; basta usare ancora il teorema per scriverlo come $E' \oplus \varepsilon^a$ con E' di rango l , cosa possibile essendo per ipotesi $l \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Per dimostrare l'ultimo enunciato del teorema si usa la classificazione omotopica insieme a due osservazioni; il limite diretto BU è ottenuto dalle funzioni continue $i_l \circ j_l$ dove $j_l: \text{GR}_l(\mathbb{C}^{2l}) \hookrightarrow \text{GR}_{l+1}(\mathbb{C}^{2l+1})$ si forma aggiungendo un \mathbb{C} sia all' l -piano che all'ambiente e $i_l: \text{GR}_{l+1}(\mathbb{C}^{2l+1}) \hookrightarrow \text{GR}_{l+1}(\mathbb{C}^{2l+2})$ è l'inclusione standard. La prima osservazione è che ogni funzione continua $f: X \rightarrow \text{BU}$ è omotopa ad una funzione $X \rightarrow \text{GR}_l(\mathbb{C}^{2l})$ per un certo l (non è completamente banale dal momento che X non è assunto compatto; tuttavia è per ipotesi finito dimensionale ed un'analisi accurata della cellularizzazione dei vari $\text{GR}_l(\mathbb{C}^{2l})$ mostra che incrementare l'indice l non altera essenzialmente lo scheletro già costruito. Basta allora applicare il teorema di approssimazione cellulare). La seconda osservazione chiave è che se $T_{l+1,2l+2}$ è il tautologico sopra $\text{GR}_{l+1}(\mathbb{C}^{2l+2})$ allora ovviamente $i^*T_{l+1,2l+2} = T_{l+1,2l+1}$ e soprattutto $j^*T_{l+1,2l+1} = T_{l,2l} \oplus \varepsilon^1$; Quindi data una classe di omotopia $[X, \text{BU}]$ la si rappresenta come una funzione $X \rightarrow \text{GR}_l(\mathbb{C}^{2l})$ e si fa il pullback del tautologico: si ottiene un fibrato ben definito a meno di relazione di isomorfismo stabile. Il resto dei dettagli è standard. \square

2 Verso una teoria coomologica...

2.1 La successione esatta lunga a sinistra

Il punto di partenza per la costruzione di una teoria coomologica generalizzata è il seguente lemma (con la convenzione che se X è uno spazio puntato allora $X/\emptyset := X$ e $\tilde{\mathbf{K}}(\emptyset) := (0)$):

Lemma 2.1.1 (Successione esatta cortissima) Se (X, A) è una coppia decente puntata allora il diagramma $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{q} \frac{X}{A}$ induce la sequenza di gruppi esatta nel nodo centrale (i.e. $\text{im } q^\# = \ker i^\#$):

$$\tilde{\mathbf{K}}(X/A) \xrightarrow{q^\#} \tilde{\mathbf{K}}(X) \xrightarrow{i^\#} \tilde{\mathbf{K}}(A)$$

Dimostrazione: per verificare che $i^\# q^\# = (qi)^\# = 0$ basta osservare che qi fattorizza attraverso il punto base x_0 di X e A e che $\tilde{\mathbf{K}}(\{x_0\}) = (0)$. Per provare che $\ker i^\# \subseteq \text{im } q^\#$ ricordiamo che ogni elemento in $\tilde{\mathbf{K}}(X)$ si scrive come $E - \varepsilon^a$ dove $a := \dim_{\mathbb{C}} E_{x_0}$; la relazione $i^\#(E - \varepsilon^a) := E|_A - \varepsilon^a = 0$ in $\tilde{\mathbf{K}}(A)$ equivale all'esistenza di un intero b tale che $E|_A \oplus \varepsilon^b \cong \varepsilon^{a+b}$ e quindi $(E \oplus \varepsilon^b)|_A$ è banale. Dal momento che A è retratto di deformazione di un aperto di X essendo per ipotesi un suo sotto CW-complesso otteniamo una banalizzazione del fibrato $E \oplus \varepsilon^b$ su un intorno aperto di A (infatti la restrizione su quell'aperto è il pullback di un banale via un'equivalenza omotopica) e questo permette di costruire per collasso un nuovo fibrato F su X/A soddisfacente $q^*F = E \oplus \varepsilon^b$. L'elemento che cerchiamo è chiaramente $F - \varepsilon^{a+b} \in \tilde{\mathbf{K}}(X/A)$ dato che $q^\#(F - \varepsilon^{a+b}) = E \oplus \varepsilon^b - \varepsilon^{a+b} = E - \varepsilon^a \in \tilde{\mathbf{K}}(X)$. \square

Per estendere la successione esatta cortissima dobbiamo far entrare in gioco le sospensioni; in generale se (X, x_0) e (Y, y_0) sono due spazi decenti puntati allora il loro *bouquet* è definito come $X \vee Y := X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$ e con punto base (x_0, y_0) (si tratta semplicemente dello spazio ottenuto fondendo X e Y per i punti base, rappresentato per comodità come sottospazio del loro prodotto), mentre il loro *prodotto smash* è definito come $X \wedge Y := \frac{X \times Y}{X \vee Y}$ e puntato nel modo ovvio. È presente anche una natura funtoriale dal momento che se $f: X \rightarrow X'$ e $g: Y \rightarrow Y'$ sono due funzioni continue e puntate allora è ben definita una funzione $f \wedge g: X \wedge Y \rightarrow X' \wedge Y'$ indotta dal prodotto $f \times g: X \times Y \rightarrow X' \times Y'$; valgono inoltre le identificazioni naturali $X \wedge (Y \vee Z) \approx (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ e $X \wedge (Y \wedge Z) \approx (X \wedge Y) \wedge Z$. Particolarmente importante è l'operazione $S^1 \wedge -$; infatti se X è puntato allora $S^1 \wedge X := \frac{S^1 \times X}{\{\bullet\} \times X \cup S^1 \times \{x_0\}}$ e quest'ultimo spazio coincide con la sospensione ridotta di X (ovvero prima si sospende $\Sigma X := \frac{[0,1] \times X}{\{0\} \times X, \{1\} \times X}$ e poi si collassa ad un punto il segmento $[0,1] \times \{x_0\}$ per ottenere uno spazio puntato). Un ragionamento analogo mostra che se $n \geq 1$ allora $S^n \wedge -$ coincide l'iterazione di n sospensioni ridotte, mentre lo smash $S^0 \wedge X$ si identifica canonicamente con X . Le operazioni $S^n \wedge -$ hanno un'ovvia natura funtoriale.

Fissato un intero $n \geq 0$ intero osserviamo che se $A \subseteq X$ è un sottoinsieme puntato allora vale un omeomorfismo canonico $\frac{S^n \wedge X}{S^n \wedge A} \approx S^n \wedge \frac{X}{A}$ e quindi grazie al lemma precedente abbiamo una successione esatta al centro:

$$\tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge X/A) \xrightarrow{(S^n \wedge q)^\#} \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge X) \xrightarrow{(S^n \wedge i)^\#} \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge A)$$

Il prossimo fondamentale teorema mostra come collegare tutte queste successioni corte in un'unica successione esatta lunga a sinistra (si tratta di una tecnica standard in teorie coomologiche generalizzate):

Teorema 2.1.2 (Successione esatta infinita a sinistra) Se (X, A) è una coppia decente puntata allora esiste una famiglia di morfismi di gruppi $\{\delta_n: \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge A) \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}(S^{n-1} \wedge X/A)\}_{n \geq 1}$ che rende esatta

la seguente successione:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \dots & \xrightarrow{(S^2 \wedge q)^\#} & \tilde{\mathbf{K}}(S^2 \wedge A) & \\
 & & & & \searrow^{\delta^2} & & \\
 \tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge X/A) & \xrightarrow{(S^1 \wedge q)^\#} & \tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge X) & \xrightarrow{(S^1 \wedge i)^\#} & \tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge A) & & \\
 & & & \searrow^{\delta^1} & & & \\
 \tilde{\mathbf{K}}(X/A) & \xrightarrow{q^\#} & \tilde{\mathbf{K}}(X) & \xrightarrow{i^\#} & \tilde{\mathbf{K}}(A) & &
 \end{array}$$

Dimostrazione: (Sketch) in tutto quello che segue indichiamo con $X \sqcup \mathcal{C}A$ il CW-complesso identificazione $X \sqcup_A \mathcal{C}A$ con A dove $\mathcal{C}A := \frac{[0,1] \times A}{\{0\} \times A}$ è il cono di A ; dal momento che $\mathcal{C}A$ è chiaramente un sottocomplesso contraibile di $X \sqcup \mathcal{C}A$ il quoziente $X \sqcup \mathcal{C}A \xrightarrow{\sim} \frac{X \sqcup \mathcal{C}A}{\mathcal{C}A} = \frac{X}{A}$ è di fatto un'equivalenza omotopica. Inoltre abbiamo l'omeomorfismo $\frac{X \sqcup \mathcal{C}A}{X} \xrightarrow{\cong} \frac{\mathcal{C}A}{A}$ ed un'altra equivalenza omotopica $\frac{\mathcal{C}A}{A} \xrightarrow{\sim} S^1 \wedge A$ ottenuta collassando il segmento contenente il punto base di A .

L'idea è quella di collegare due successioni cortissime usando una terza successione cortissima e per far questo consideriamo le prime due righe del seguente diagramma; nella prima riga abbiamo la successione cortissima per la coppia $X \subseteq X \sqcup \mathcal{C}A$, mentre la seconda presenta i due spezzoni di successione da collegare:

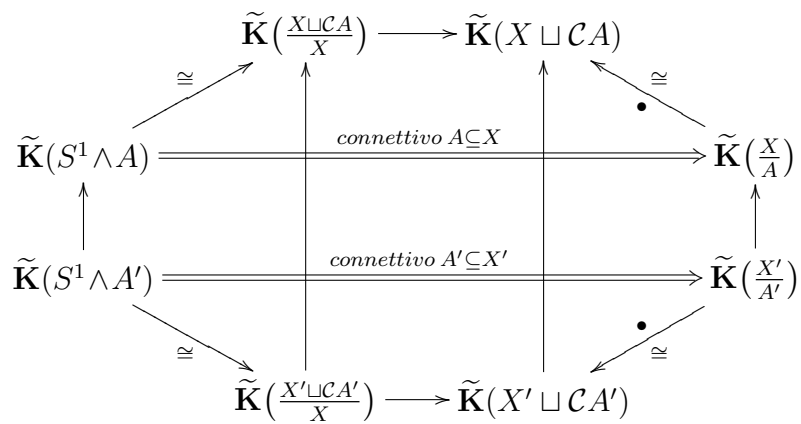
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \tilde{\mathbf{K}}\left(\frac{X \sqcup \mathcal{C}A}{X}\right) & \xrightarrow{\text{connettivo}} & \tilde{\mathbf{K}}(X \sqcup \mathcal{C}A) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(X) \\
 & & & \cong \uparrow & \searrow^{\delta^1} & \cong \uparrow & & \parallel \\
 \tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge \frac{X}{A}) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge X) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge A) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(\frac{X}{A}) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(X) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(A) \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & & & \\
 & & \tilde{\mathbf{K}}(\frac{\mathcal{C}X}{X}) & \quad ??? \quad & \tilde{\mathbf{K}}(\frac{\mathcal{C}A}{A}) & & & & & & \\
 & & \parallel & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & & & \\
 \tilde{\mathbf{K}}\left(\frac{X \sqcup \mathcal{C}A \sqcup \mathcal{C}X}{X \sqcup \mathcal{C}A}\right) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(X \sqcup \mathcal{C}A \sqcup \mathcal{C}X) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(X \sqcup \mathcal{C}A) & & & & & &
 \end{array}$$

Le due frecce verticali (dalla riga 2 alla 1) sono isomorfismi perchè indotte dalle equivalenze omotopiche sopra indicate; se definiamo il primo connettivo $\delta^1: \tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge X) \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}(\frac{X}{A})$ come la composizione indicata nel diagramma otteniamo l'esattezza ai nodi 2, 4 e 5 (partendo da sinistra) sfruttando l'esattezza centrale delle tre successioni cortissime delle prime due righe. Resta da verificare l'esattezza al terzo nodo, ovvero $\tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge X)$ e diamo soltanto un'idea di come si dimostra e delle difficoltà incontrate (si veda [AT] per maggiori dettagli) usando un'altra successione cortissima di appoggio; abbiamo un'equivalenza omotopica $X \sqcup \mathcal{C}A \sqcup \mathcal{C}X \xrightarrow{\sim} \frac{X \sqcup \mathcal{C}A \sqcup \mathcal{C}X}{\mathcal{C}X} = \frac{\mathcal{C}A}{A} \xrightarrow{\sim} S^1 \wedge A$ costruita esattamente come prima e l'equivalenza omotopica $\frac{X \sqcup \mathcal{C}A \sqcup \mathcal{C}X}{X \sqcup \mathcal{C}A} = \frac{\mathcal{C}X}{X} \xrightarrow{\sim} S^1 \wedge X$ ed usando la successione cortissima per la coppia $X \sqcup \mathcal{C}A \subseteq X \sqcup \mathcal{C}A \sqcup \mathcal{C}X$ possiamo tentare un bypass come fatto in precedenza (righe 2, 3 e 4 del diagramma). Purtroppo non è del tutto chiara la commutatività del rettangolo ???: infatti $\frac{\mathcal{C}A}{A}$ è ottenuto dal cono esterno a $\mathcal{C}X$ mentre nel morfismo $S^1 \wedge A \hookrightarrow S^1 \wedge X$ il cono $\mathcal{C}A$ è contenuto in $\mathcal{C}X$.

Si può far vedere che a livello di $\tilde{\mathbf{K}}$ il diagramma commuta, usando un doppio cono interno e questo basta per garantire l'esattezza anche al terzo nodo. Questo conclude la costruzione di δ^1 e i rimanenti connettivi si ottengono applicando questo procedimento alle varie sospensioni degli spazi. \square

In generale $\tilde{\mathbf{K}}(X) \xrightarrow{i^\#} \tilde{\mathbf{K}}(A)$ ben si guarda dell'essere suriettiva, come si vede considerando l'inclusione $i: S^2 \hookrightarrow S^3$ e ricordando che $\tilde{\mathbf{K}}(S^3) = (0)$ e $\tilde{\mathbf{K}}(S^2) \cong \mathbb{Z}$; per completare adeguatamente la successione con dei termini geometricamente sensati è necessario un risultato non banale descritto nella prossima sezione (il teorema di periodicità di Bott).

Nota 2.1.3 (Naturalità dei connettivi) L'utilità della successione appena ottenuta è strettamente legata alla sua naturalità ed a priori solo i connettivi possono creare problemi dal momento che $\tilde{\mathbf{K}}$ è functoriale; supponiamo di avere una funzione continua puntata $f: (X, A) \rightarrow (X', A')$ tra coppie decenti puntate e consideriamo il seguente diagramma per studiare la naturalità del primo connettivo δ^1 dove gli isomorfismi presenti (le frecce diagonali) sono indotti dalle equivalenze omotopiche $X \sqcup CA \rightarrow \frac{X}{A}$ e $\frac{X \sqcup CA}{X} \rightarrow S^1 \wedge A$ e lo stesso per le versioni accentate. Le frecce verticali sono tutte indotte da f nel modo ovvio.



Il diagramma commuta ovunque, essendo ottenuto applicando il funtore $\tilde{\mathbf{K}}$ ad un diagramma commutativo di funzioni continue puntate; usando il fatto che le frecce diagonali indicate con \bullet sono isomorfismi è immediato verificare che anche il diagramma rettangolare orizzontale commuta, ovvero il connettivo δ^1 è naturale. Un ragionamento analogo si applica ad ogni δ^n e quindi *la successione esatta lunga sinistra è naturale*.

Il problema era rappresentato dal fatto che le inverse delle frecce diagonali indicate con \bullet non possono essere rappresentate univocamente come funzioni continue: esiste sicuramente una funzione continua che le induce (l'inversa omotopica), ma non è unica (la sua classe di omotopia ovviamente lo è). A priori avremmo un diagramma di funzioni continue che non commuta; la soluzione è scompattare la definizione del connettivo e ridursi a rettangoli indotti da funzioni continue ben determinate; lo stesso procedimento permetterà di dimostrare la compatibilità dei connettivi con altri particolari morfismi.

La tecnica usata per costruire una successione esatta lunga a sinistra partendo da una successione esatta cortissima e giocando con le sospensioni funziona anche in coomologia cellulare (e più in generale in ogni teoria coomologica generalizzata):

Nota 2.1.4 (Coomologia cellulare) Supponiamo di aver definito per ogni spazio decente puntato i funtori di coomologia cellulare ridotta intera $\tilde{H}^n(X)$ (nulli per definizione se $n < 0$), di sapere che

sono invarianti omotopici, di avere a disposizione la successione esatta cortissima per una coppia (X, A) ed anche l'isomorfismo di sospensione $\tilde{H}^{n-1}(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^n(S^1 \wedge X)$; possiamo allora formare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \tilde{H}^n\left(\frac{X \sqcup CA}{X}\right) & \cdots \longrightarrow & \tilde{H}^n(X \sqcup CA) & \longrightarrow & \tilde{H}^n(X) \\
 & & \uparrow \cong & \nearrow & \uparrow \cong & & \parallel \\
 \tilde{H}^n(S^1 \wedge \frac{X}{A}) & \longrightarrow & \tilde{H}^n(S^1 \wedge X) & \longrightarrow & \tilde{H}^n(S^1 \wedge A) & \longrightarrow & \tilde{H}^n\left(\frac{X}{A}\right) \longrightarrow \tilde{H}^n(X) \longrightarrow \tilde{H}^n(A) \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & \nearrow \text{conn. cellulare} & \\
 \tilde{H}^{n-1}\left(\frac{X}{A}\right) & \longrightarrow & \tilde{H}^{n-1}(X) & \longrightarrow & \tilde{H}^{n-1}(A) & &
 \end{array}$$

Quindi se definiamo $\tilde{H}^n(X, A) := \tilde{H}^n\left(\frac{X}{A}\right)$ otteniamo la successione esatta naturale in coomologia cellulare ridotta; la versione non ridotta si ottiene definendo $H^n(X) := \tilde{H}^n(X_\bullet)$.

La successione esatta del teorema 2.1.2 diventa più gradevole introducendo qualche nuovo simbolo; la presenza di indici negativi a prima vista disturba, ma serve per rendere i connettivi di grado +1: l'obiettivo finale in fondo è la costruzione di una teoria simil coomologica. In quello che segue X_\bullet indica la somma disgiunta di X ed un punto; è il modo standard con cui si rende puntato uno spazio qualsiasi.

Definizione 2.1.5 (Nuovi funtori) Sia (X, A) una coppia decente; allora per ogni $n \geq 0$ definiamo i seguenti gruppi commutativi (con la convenzione che $X/\emptyset := X_\bullet$):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^{-n}(X) &:= \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge X_\bullet) \\
 \mathbf{K}^{-n}(X, A) &:= \tilde{\mathbf{K}}\left(S^n \wedge \frac{X_\bullet}{A_\bullet}\right) = \tilde{\mathbf{K}}\left(S^n \wedge \frac{X}{A}\right)
 \end{aligned}$$

Inoltre se (X, A) è anche puntata definiamo (con la convenzione che $X/\emptyset := X$):

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X) &:= \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge X) \\
 \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X, A) &:= \tilde{\mathbf{K}}\left(S^n \wedge \frac{X}{A}\right)
 \end{aligned}$$

La natura funtoriale delle quattro operazioni è ereditata da $\tilde{\mathbf{K}}(-)$ e da $S^n \wedge -$.

Se (X, A) è una coppia decente puntata con $A \neq \emptyset$ allora per ogni $n \geq 0$ vale l'uguaglianza $\mathbf{K}^{-n}(X, A) = \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X, A)$, mentre se $A = \emptyset$ allora i due termini sono distinti dal momento che $\mathbf{K}^{-n}(X, \emptyset) = \mathbf{K}^{-n}(X)$ e $\tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X, \emptyset) = \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X)$. Una semplice verifica mostra che $\mathbf{K}^0(X) = \mathbf{K}(X) = \mathbf{K}(X, \emptyset)$ e $\mathbf{K}(X, A) = \mathbf{K}^0(X, A)$ ed un risultato analogo vale nel caso ridotto; quindi siamo partiti dalla definizione di $\tilde{\mathbf{K}}$ ed abbiamo ottenuto molti altri funtori che si combinano nella seguente successione naturale esatta lunga a sinistra (versione ridotta per coppie puntate):

$$\dots \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-2}(A) \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(X, A) \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(X) \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(A) \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}^0(X, A) \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}^0(X) \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}^0(A)$$

oppure (versione non ridotta per coppie non puntate):

$$\dots \longrightarrow \mathbf{K}^{-2}(A) \longrightarrow \mathbf{K}^{-1}(X, A) \longrightarrow \mathbf{K}^{-1}(X) \longrightarrow \mathbf{K}^{-1}(A) \longrightarrow \mathbf{K}^0(X, A) \longrightarrow \mathbf{K}^0(X) \longrightarrow \mathbf{K}^0(A)$$

Il prossimo corollario fornisce un criterio di spezzamento per la successione lunga:

Corollario 2.1.6 Sia (X, A) una coppia decente puntata e supponiamo che A sia retrato di X ; allora per ogni intero $n \geq 0$ la successione $0 \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X, A) \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X) \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(A) \rightarrow 0$ è split-esatta. Lo stesso risultato vale in versione non ridotta.

Ad esempio proviamo il corollario per $n = 0$; se $r : X \rightarrow A$ è la retrazione allora $r \circ i = id_A$ e per funtorialità e sospensione $i^\# \circ r^\# = id_{\tilde{\mathbf{K}}(A)}$ e $S^1 \wedge i^\# \circ S^1 \wedge r^\# = id_{\tilde{\mathbf{K}}^{-1}(A)}$; quindi $i^\#$ e $S^1 \wedge i^\#$ sono suriettive e per esattezza gli ultimi tre termini della successione sono esatti; inoltre $r^\#$ e $S^1 \wedge r^\#$ forniscono gli splitting necessari:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(X) & \xrightarrow{S^1 \wedge i^\#} & \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(A) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(X, A) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(X) & \xrightarrow{i^\#} & \tilde{\mathbf{K}}(A) \\ & & & \swarrow \text{split} & & & & & & \swarrow \text{split} & \\ & & & & S^1 \wedge r^\# & & & & & & r^\# \end{array}$$

Questo semplice risultato permette ad esempio di dimostrare il seguente lemma, ottenuto per bouquet infiniti con un metodo diretto nella sezione precedente; se X e Y sono due spazi decenti puntati ed

indichiamo con $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & X \vee Y \\ Y & \xrightarrow{i_Y} & \end{array}$ le inclusioni e proiezioni canoniche allora vale il seguente risultato:

Lemma 2.1.7 (Bouquet) Se X e Y sono due spazi decenti puntati allora vale l'isomorfismo di gruppi:

$$\begin{bmatrix} i_X^\# \\ i_Y^\# \end{bmatrix} : \tilde{\mathbf{K}}(X \vee Y) \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathbf{K}}(X) \oplus \tilde{\mathbf{K}}(Y)$$

il cui inverso è $\begin{bmatrix} p_X^\# & p_Y^\# \end{bmatrix}$.

Nel prossimo importante esempio non c'è una retrazione geometrica, ma soltanto una algebrica:

Esempio 2.1.8 (Prodotto smash) Sia $X \wedge Y := \frac{X \times Y}{X \vee Y}$ il prodotto smash tra due spazi decenti puntati e consideriamo la successione esatta lunga sinistra di gruppi per la coppia decente $i : X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(X \times Y) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(X \vee Y) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}^0(X \wedge Y) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}^0(X \times Y) & \xrightarrow{i^\#} & \tilde{\mathbf{K}}^0(X \vee Y) \\ & & \swarrow \text{split} & & \downarrow \cong & & \swarrow \text{split} & & \downarrow \cong \begin{bmatrix} i_X^\# \\ i_Y^\# \end{bmatrix} & & \\ & & S^1 \wedge (p_X^\# + p_Y^\#) & & \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(X) \oplus \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(Y) & & [p_X^\# \ p_Y^\#] & & \tilde{\mathbf{K}}^0(X) \oplus \tilde{\mathbf{K}}^0(Y) & & \end{array}$$

dove p'_X e p'_Y indicano le proiezioni da $X \times Y$ ed i morfismi a sinistra sono indotti dalle sospensioni di quelli a destra; un semplice conto mostra che $i^\# \begin{bmatrix} p'_X^\# & p'_Y^\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_X^\# \\ i_Y^\# \end{bmatrix} = i^\# (p'_X^\# i_X^\# + p'_Y^\# i_Y^\#) = (i_X p'_X i)^\# + (i_Y p'_Y i)^\# = (i_X p_X)^\# + (i_Y p_Y)^\# = id_{\tilde{\mathbf{K}}^0(X \vee Y)}$ grazie all'esempio dei bouquet e quindi $i^\#$ è suriettiva e spezza; lo stesso vale per $(S^1 \wedge i)^\#$ e quindi otteniamo gli isomorfismi di gruppi $\tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X \times Y) \cong \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X \wedge Y) \oplus \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X \vee Y)$ che combinati con l'esempio precedente ci danno:

$$\forall n \geq 0 \quad \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X \times Y) \cong \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X \wedge Y) \oplus \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X) \oplus \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(Y)$$

È facile verificare che una questa decomposizione è rispettata dai morfismi indotti da una coppia di funzioni continue puntate e nella prossima sezione questo isomorfismo si rivelerà estremamente utile.

Resta il problema di come concludere a destra la successione esatta:

$$\dots \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-2}(A) \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(X, A) \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(X) \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(A) \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}^0(X, A) \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}^0(X) \xrightarrow{i^\#} \tilde{\mathbf{K}}^0(A)$$

Potremmo chiuderla nel modo più semplice possibile con il conucleo di $i^\#$, ovvero ponendo $\tilde{\mathbf{K}}^1(X, A) := \text{cok } i^\# = \frac{\tilde{\mathbf{K}}(A)}{\text{im } \tilde{\mathbf{K}}(X) \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}(A)}$ ed avremmo anche la funtorialità; tuttavia è molto più conveniente sfruttare il *teorema di periodicità di Bott* e procedere in modo completamente diverso come descritto nella prossima sezione.

2.2 Il teorema di periodicità di Bott

Iniziamo con una descrizione simil-omotopica del teorema di periodicità, per poi passare ad una sua formulazione più esplicita e comoda (i dettagli si trovano nell'articolo di Bott [B]); in quello che segue indichiamo con il simbolo $[-, -]_\bullet$ le classi di omotopia tra spazi puntati che preservano i punti base e con $\Omega X := \left\{ \text{funzioni continue da } (S^1, \bullet) \longrightarrow (X, x_0) \right\}$ il loop-space di uno spazio puntato X , dotato della topologia compatto-aperta.

Si consideri il seguente fibrato $U(l)$ -principale

$$\begin{array}{ccc} U(l) \hookrightarrow V_l(\mathbb{C}^{2l}) & & \\ & \downarrow & \text{dove } V_l(\mathbb{C}^{2l}) \text{ è la varietà} \\ & \text{GR}_l(\mathbb{C}^{2l}) & \end{array}$$

di Stiefel degli l -frame ortonormali di \mathbb{C}^{2l} ; mandando l all'infinito e topologizzando debolmente si ottiene la fibrazione di CW-complessi³

$$\begin{array}{ccc} U \hookrightarrow EU & & \\ & \downarrow & \\ & BU & \end{array}, \text{ dove } U := \varinjlim_l U(l), \quad EU := \varinjlim_l V_l(\mathbb{C}^{2l}) \text{ e}$$

$BU := \varinjlim_l \text{GR}_l(\mathbb{C}^{2l})$. Si può dimostrare che la varietà di Stiefel infinita EU ha tutti i gruppi di omotopia banali e quindi essendo un CW-complesso è contraibile; fissati una volta per tutte dei punti base la precedente fibrazione permette di dedurre la semplice connessione di BU essendo U connesso e $\pi_2(BU) \cong \pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$. Quindi il primo loop-space ΩBU è connesso per archi mentre il secondo $\Omega^2 BU$ no; indichiamo con $cc\Omega^2 BU$ la componente connessa per archi contenente il punto base originale. Una delle tante forme del risultato fondamentale di questa sezione è il seguente:

Teorema 2.2.1 (Periodicità di Bott unitaria) *Vale la seguente equivalenza omotopica debole:*

$$BU \sim_{\text{weak}} cc\Omega^2 BU$$

Il teorema di Bott e la fibrazione sopra indicata permettono ad esempio di calcolare i gruppi di omotopia del grande unitario (che di fatto sono i gruppi di omotopia stabile unitaria):

$$\pi_n(U) \cong \pi_{n+2}(U) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n \text{ è dispari;} \\ (0) & \text{se } n \text{ è pari;} \end{cases}$$

Per sfruttare il teorema precedente in K -teoria ricordiamo che grazie al teorema [1.3.5] se X è uno spazio decente connesso e puntato allora vale la biiezione:

$$[X, BU] \xleftarrow{1:1} \text{STAB}_{\mathbb{C}}(X) \cong \tilde{\mathbf{K}}(X)$$

³la terminologia deriva dal fatto che se si fissa un intero n e $l \gg n$ allora i fibrati $U(l)$ -principali su un CW complesso di dimensione n sono classificati da $[X, \text{GR}_l(\mathbb{C}^{2l})]$ facendo pullback del fibrato indicato sopra; quindi $\text{GR}_l(\mathbb{C}^{2l})$ è in questo caso il classificante per $U(l)$ e viene indicato di solito con $BU(l)$.

Consideriamo la seguente successione di biiezioni, dove a destra è giustificata la biezione col termine successivo:

$$\begin{array}{lcl}
 \tilde{\mathbf{K}}(X) \cong \text{STAB}_{\mathbb{C}}(X) & \xleftarrow{1:1} [X, \text{BU}] & \text{semplice connessione di BU} \\
 & \xleftarrow{1:1} [X, \text{BU}]_{\bullet} & \text{equivalenza omotopica debole} \\
 & \xleftarrow{1:1} [X, cc\Omega^2\text{BU}]_{\bullet} & \text{connessione e puntatura di X} \\
 & \xleftarrow{1:1} [X, \Omega^2\text{BU}]_{\bullet} & \text{aggiunzione tra } \Omega^2(-) \text{ e } S^2 \wedge - \\
 \tilde{\mathbf{K}}(S^2 \wedge X) \cong \text{STAB}_{\mathbb{C}}(S^2 \wedge X) & \xleftarrow{1:1} [S^2 \wedge X, \text{BU}]_{\bullet} & \text{semplice connessione di BU}
 \end{array}$$

Sono stati usati i seguenti fatti generali: se Y è puntato semplicemente connesso allora $[X, Y]_{\bullet} = [X, Y]$ ovvero i punti base sono irrilevanti; se X e Y sono puntati allora $[X, \Omega^1 Y]_{\bullet} \xleftarrow{1:1} [S^1 \wedge X, Y]_{\bullet}$ (è in realtà un isomorfismo di gruppi); infine un equivalenza omotopica debole $Y \rightarrow Y'$ induce una biiezione $[X, Y] \xleftarrow{1:1} [X, Y']$. Questo suggerisce un legame tra $\tilde{\mathbf{K}}(X)$ e $\tilde{\mathbf{K}}(S^2 \wedge X)$ anche se in mancanza di una descrizione esplicita dell'equivalenza omotopica di Bott non è affatto chiaro se si tratti o meno di un isomorfismo.

Per descrivere esplicitamente la biiezione sopra indicata seguendo le idee di Atiyah introduciamo in K-teoria un'operazione che ricorda il prodotto cross in coomologia $\times : H^m(X; \mathbb{Z}) \otimes H^n(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{m+n}(X \times Y; \mathbb{Z})$ definito come $a \times b := p_X^* a \cup p_Y^* b$ dove p_X e p_Y sono le proiezioni; maggiori dettagli sono contenuti in [AT].

Definizione 2.2.2 (Prodotto cross) Siano X e Y due spazi decenti e consideriamo le proiezioni $X \xleftarrow{p_X} X \times Y \xrightarrow{p_Y} Y$; il prodotto cross è definito come il seguente omomorfismo di anelli ⁴ :

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{K}(X) \otimes \mathbf{K}(Y) \xrightarrow{\times} \mathbf{K}(X \times Y) \\
 a \otimes b \longmapsto a \times b := p_X^{\#} a \cdot p_Y^{\#} b
 \end{array}$$

Si tratta veramente di un omomorfismo di anelli: infatti la struttura di prodotto in $\mathbf{K}(X) \otimes \mathbf{K}(Y)$ è definita dalla formula $(a \otimes b)(\alpha \otimes \beta) := (a\alpha) \otimes (b\beta)$ ed un semplice conto mostra che $(a \otimes b) \times (\alpha \otimes \beta) = (a \times b) \cdot (\alpha \times \beta)$. È importante tener presente che se E ed F sono fibrati veri, il loro prodotto cross $E \times F$ è semplicemente il prodotto tensoriale $p_X^* E \otimes p_Y^* F$ dei pullback e quindi stiamo lavorando con l'estensione di questa operazione alle differenze formali. Il prodotto \times ha chiaramente una natura functoriale, ovvero se $f: X \rightarrow X'$ e $g: Y \rightarrow Y'$ sono funzioni continue allora $f^{\#} a \times g^{\#} b = (f \times g)^{\#} (a \times b)$ per ogni $a \in \mathbf{K}(X')$ e $b \in \mathbf{K}(Y')$.

Una delle tante versioni del teorema di periodicità di Bott afferma che:

Teorema 2.2.3 (Prodotto) Se X è uno spazio decente allora vale il seguente isomorfismo di anelli:

$$\times : \mathbf{K}(S^2) \otimes \mathbf{K}(X) \xrightarrow{\cong} \mathbf{K}(S^2 \times X)$$

È essenziale convertire le informazioni ottenute su $S^2 \times X$ in dati sulla doppia sospensione ridotta $S^2 \wedge X$ cercando di ridurre il prodotto \times ; in generale se X e Y sono due spazi decenti puntati allora il prodotto

⁴il prodotto tensoriale $A \otimes B$ tra due anelli commutativi A e B è l'anello commutativo avente $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ come struttura soggiacente di \mathbb{Z} -modulo e con il prodotto definito da $a \otimes b \cdot a' \otimes b' := aa' \otimes bb'$ ed esteso per \mathbb{Z} -bilinearità.

cross è compatibile con le riduzioni grazie alla naturalità e quindi induce un omomorfismo di anelli:

$$\tilde{\mathbf{K}}(X) \otimes \tilde{\mathbf{K}}(Y) \xrightarrow{\tilde{\times}} \tilde{\mathbf{K}}(X \wedge Y)$$

Grazie ai risultati dell'esempio [2.1.8] abbiamo a disposizione la seguente successione esatta split:

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathbf{K}}(X \wedge Y) \xrightarrow{q^\#} \tilde{\mathbf{K}}(X \times Y) \xrightarrow{\begin{matrix} i_X^\# \\ i_Y^\# \end{matrix}} \tilde{\mathbf{K}}(X) \oplus \tilde{\mathbf{K}}(Y) \longrightarrow 0$$

Se identifichiamo $\tilde{\mathbf{K}}(X \wedge Y)$ con il sottogruppo (in realtà sottoanello) $im\ q^\#$ di $\tilde{\mathbf{K}}(X \times Y)$ abbiamo il seguente criterio: un elemento $a \in \tilde{\mathbf{K}}(X \times Y)$ vive in $\tilde{\mathbf{K}}(X \wedge Y)$ se e solo se $i_X^\# a = 0$ e $i_Y^\# a = 0$; se supponiamo che $a \in \tilde{\mathbf{K}}(X)$ e $b \in \tilde{\mathbf{K}}(Y)$ allora $i_X^\#(a \times b) = i_X^\#(p_X^\# a \cdot p_Y^\# b) = i_X^\# p_X^\# a \cdot i_X^\# p_Y^\# b = i_X^\# p_X^\# a \cdot 0 = 0$ dal momento che $i^\#$ è un omomorfismo di anelli, $p_Y i_X$ fattorizza chiaramente attraverso il punto base \bullet di $X \times Y$ che sopporta soltanto fibri banali e per ipotesi il fibrato virtuale b ha rango nullo sul punto base di Y (l'idea è banale: si prende un fibrato virtuale su Y che ha rango zero sul suo punto base y_0 , lo si esporta su $X \times Y$ e lo si restringe a $X \times \{y_0\}$). Lo stesso ragionamento si applica a $i_Y^\#$ e quindi grazie al criterio sopra menzionato il prodotto $a \times b$ è un elemento in $\tilde{\mathbf{K}}(X \wedge Y)$ che in realtà vive in $\tilde{\mathbf{K}}(X \wedge Y)$ (*ma è costruito con la struttura di anello di $\tilde{\mathbf{K}}(X \times Y)$*); in conclusione:

Lemma 2.2.4 (Cross ridotto) *Se X e Y sono due spazi decenti puntati allora il prodotto cross \times si restringe all'omomorfismo naturale di anelli $\tilde{\times}$:*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{K}}(X) \otimes \tilde{\mathbf{K}}(Y) & \xrightarrow{\tilde{\times}} & \tilde{\mathbf{K}}(X \wedge Y) \\ & \searrow \times & \downarrow \\ & & \tilde{\mathbf{K}}(X \times Y) \end{array}$$

La naturalità di $\tilde{\times}$ è ereditata direttamente da \times e della decomposizione usata (si ricordi che abbiamo identificato $\tilde{\mathbf{K}}(X \wedge Y)$ con la sua immagine tramite $q^\#$) e quindi se $f: X \rightarrow X'$ e $g: Y \rightarrow Y'$ sono funzioni continue puntate allora $f^\# a \tilde{\times} g^\# b = (f \wedge g)^\#(a \tilde{\times} b)$ per ogni $a \in \tilde{\mathbf{K}}(X')$ e $b \in \tilde{\mathbf{K}}(Y')$.

Per continuare ricordiamo che $\tilde{\mathbf{K}}(S^2) \cong_{group} \mathbb{Z}$ e che se X è uno spazio decente con punto base x_0 allora $\mathbf{K}(X) =_{group} \tilde{\mathbf{K}}(X) \oplus \{\varepsilon^1 - \varepsilon^0\} \mathbb{Z}$ dove l'ultimo addendo è la naturale rappresentazione di $\mathbf{K}(\{x_0\}) \cong \mathbb{Z}$ come sottogruppo di $\mathbf{K}(X)$ e $\varepsilon^1 - \varepsilon^0$ è l'unità dell'anello $\mathbf{K}(X)$; adesso consideriamo il seguente diagramma di gruppi commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{K}(S^2) \otimes \mathbf{K}(X) & \cong & (\tilde{\mathbf{K}}(S^2) \otimes \tilde{\mathbf{K}}(X)) \oplus \tilde{\mathbf{K}}(S^2) \oplus \tilde{\mathbf{K}}(X) \oplus \mathbb{Z} & & \\ \downarrow \times & & \downarrow \tilde{\times} & & \parallel \quad \parallel \quad \parallel \\ \mathbf{K}(S^2 \times X) & \cong & \tilde{\mathbf{K}}(S^2 \wedge X) \oplus \tilde{\mathbf{K}}(S^2) \oplus \tilde{\mathbf{K}}(X) \oplus \mathbb{Z} & & \end{array}$$

La prima riga è ottenuta decomponendo $\mathbf{K}(X) = \tilde{\mathbf{K}}(X) \oplus \{\varepsilon^1 - \varepsilon^0\} \mathbb{Z}$ e $\mathbf{K}(S^2) = \tilde{\mathbf{K}}(S^2) \oplus \{\varepsilon^1 - \varepsilon^0\} \mathbb{Z}$ e sviluppando i vari prodotto tensoriali (ricordando che quando moltiplichiamo per \mathbb{Z} stiamo usando le unità dei due anelli); la seconda riga si ottiene in modo analogo usando anche la decomposizione standard dello smash. La commutatività e l'identificazione del morfismo $\tilde{\times}$ si ottiene allora per naturalità; grazie al teorema [2.2.3] il morfismo \times è un isomorfismo di anelli e quindi lo stesso vale per $\tilde{\times}$. Essendo $\tilde{\mathbf{K}}(S^2) \cong_{ring} \mathbb{Z}_{fake}$ generato additivamente da $H - \varepsilon^1$ otteniamo una descrizione della periodicità di Bott molto più precisa di quella presentata all'inizio di questa sezione:

Teorema 2.2.5 (TEOREMA DI PERIODICITÀ DI BOTT) Se X è uno spazio decente puntato e H indica il tautologico di S^2 allora vale il seguente isomorfismo naturale di anelli:

$$\begin{aligned} \text{bott} : \tilde{\mathbf{K}}(X)_{fake} &\xrightarrow{\cong} \tilde{\mathbf{K}}(S^2 \wedge X) \\ a &\longmapsto (H - \varepsilon^1) \tilde{\times} a \end{aligned}$$

dove $\tilde{\mathbf{K}}(X)_{fake}$ indica l'anello ottenuto da $\tilde{\mathbf{K}}(X)$ rendendo nullo il prodotto.

L'anello ridotto $\tilde{\mathbf{K}}$ di uno spazio topologico avente lo stesso tipo di omotopia di una doppia sospensione ha prodotto banale e vedremo in seguito che lo stesso vale per una sospensione (è quindi importante tener presente che il prodotto $\tilde{\times}$ sfrutta la struttura moltiplicativa di $\tilde{\mathbf{K}}(S^2 \times X)$ e non quella di $\tilde{\mathbf{K}}(S^2 \wedge X)$ che è nulla).

L'isomorfismo di Bott è naturale; infatti se $f: X \rightarrow Y$ è una funzione continua puntata allora basta formare il seguente diagramma che commuta grazie alla naturalità dei cross:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{\times} & & \\ & \searrow & \text{---} & \searrow & \\ \tilde{\mathbf{K}}(S^2) \otimes \tilde{\mathbf{K}}(X) & \xrightarrow{\times} & \tilde{\mathbf{K}}(S^2 \times X) & \xleftarrow{q^\#} & \tilde{\mathbf{K}}(S^2 \wedge X) \\ \uparrow \text{id}_{S^2}^\# \otimes f^\# & & \uparrow (id_{S^2} \times f)^\# & & \uparrow (id_{S^2} \wedge f)^\# \\ \tilde{\mathbf{K}}(S^2) \otimes \tilde{\mathbf{K}}(Y) & \xrightarrow{\times} & \tilde{\mathbf{K}}(S^2 \times Y) & \xleftarrow{q'^\#} & \tilde{\mathbf{K}}(S^2 \wedge Y) \\ & \searrow & \text{---} & \searrow & \\ & & \tilde{\times} & & \end{array}$$

Quindi se $e \in \tilde{\mathbf{K}}(Y)$ allora $(S^2 \wedge f)^\# \text{bott}(e) = (id_{S^2} \wedge f)^\#((H - \varepsilon^1) \tilde{\times} e) = (H - \varepsilon^1) \tilde{\times} f^\# e = \text{bott}(f^\# e)$.

Grazie ai calcoli eseguiti precedentemente sappiamo che $\tilde{\mathbf{K}}(S^1) \cong \tilde{\mathbf{K}}(S^3) \cong (0)$ e $\tilde{\mathbf{K}}(S^2) \cong_{ring} \mathbb{Z}_{fake}$ e banalmente $\tilde{\mathbf{K}}(S^0) \cong_{ring} \mathbb{Z}$; il teorema di Bott permette di completare il calcolo su ogni sfera:

Corollario 2.2.6 (Sfere) Valgono i seguenti isomorfismi di anelli:

$$\tilde{\mathbf{K}}(S^n) \cong_{ring} \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n=0 \\ (0) & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \mathbb{Z}_{fake} \text{ generato come gruppo da } (H - \varepsilon^1) \tilde{\times}^n & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Sapendo che i $\tilde{\mathbf{K}}$ delle sfere sono finitamente generati come \mathbb{Z} -moduli possiamo provare il seguente confortante risultato per spazi compatti:

Corollario 2.2.7 (Finita generazione) Se X è un CW-complesso finito puntato allora $\tilde{\mathbf{K}}(X)$ è un gruppo commutativo finitamente generato; in particolare anche $\tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X)$ è finitamente generato per ogni intero $n \geq 0$ e lo stesso risultato vale in versione non ridotta.

Dimostrazione: ragioniamo per induzione sul numero di celle lavorando con $\tilde{\mathbf{K}}$; dal momento che il risultato è chiaramente vero per un numero finito di punti possiamo supporre che $X = Y \sqcup \{k\text{-cella}\}$ e quindi $\frac{X}{Y} \approx S^k$, con $\tilde{\mathbf{K}}(Y)$ finitamente generato per ipotesi induttiva. Consideriamo la successione esatta cortissima $\tilde{\mathbf{K}}(S^k) \cong \tilde{\mathbf{K}}(\frac{X}{Y}) \xrightarrow{q^\#} \tilde{\mathbf{K}}(X) \xrightarrow{i^\#} \tilde{\mathbf{K}}(Y)$; per il teorema di omomorfismo $\frac{\tilde{\mathbf{K}}(X)}{\ker i^\#} =$

$\frac{\tilde{\mathbf{K}}(X)}{im\ q^\#} \cong im\ i^\# \hookrightarrow \tilde{\mathbf{K}}(Y)$ e quindi $\frac{\tilde{\mathbf{K}}(X)}{im\ q^\#}$ è finitamente generato essendo un sottogruppo di un finitamente generato. Ma anche $im\ q^\#$ è finitamente generato essendo immagine omomorfa di un gruppo con la stessa proprietà e quindi lo stesso risultato vale per $\tilde{\mathbf{K}}(X)$; per concludere basta ricordare che $\tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X) := \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge X)$. \square

Se X è uno spazio decente con punto base x_0 allora sappiamo che $\mathbf{K}(X) \cong \tilde{\mathbf{K}}(X) \oplus \mathbb{Z}$ come gruppi commutativi; per descrivere il legame tra \mathbf{K}^{-n} e $\tilde{\mathbf{K}}^{-n}$ osserviamo che per definizione $\mathbf{K}^{-n}(X) := \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge X_\bullet)$ e $\tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X) := \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge X)$. Il sottospazio $Y := \{x_0\} \cup \bullet$ di X_\bullet è chiaramente un suo retratto di deformazione ed inoltre $X_\bullet / Y = X$; applicando il corollario [2.1.6] alla coppia $Y \subseteq X$ otteniamo l'isomorfismo $\mathbf{K}^{-n}(X) := \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge X_\bullet) =: \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X_\bullet) \cong \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X) \oplus \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(Y) = \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X) \oplus \tilde{\mathbf{K}}(S^n)$ (infatti $S^n \wedge (\{x_0\} \cup \bullet) = S^n$) e quindi:

Corollario 2.2.8 *Se X è uno spazio decente puntato allora vale il seguente isomorfismo di gruppi:*

$$\mathbf{K}^{-n}(X) \cong \begin{cases} \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X) \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

La vera conseguenza del teorema di Bott che ne giustifica peraltro il nome è la seguente; sia X un decente puntato e $n \geq 0$ un intero; allora l'isomorfismo *bott* induce gli isomorfismi di gruppi $\tilde{\mathbf{K}}^{-2n}(X) := \tilde{\mathbf{K}}(S^{2n} \wedge X) \cong \tilde{\mathbf{K}}(X)$ e $\tilde{\mathbf{K}}^{-2n-1}(X) := \tilde{\mathbf{K}}(S^{2n+1} \wedge X) \cong \tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge X) =: \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(X)$ ed un ragionamento analogo vale per le versioni relative o non ridotte (basta osservare che ad esempio $\mathbf{K}(X) = \tilde{\mathbf{K}}(X_\bullet) \cong \tilde{\mathbf{K}}(S^2 \wedge X_\bullet) =: \mathbf{K}^{-2}(X)$). Quindi *la famiglia di gruppi $\{\tilde{\mathbf{K}}^{-n}(X)\}_{n \geq 0}$ contiene soltanto due elementi distinti che si ripetono con periodicità di ordine 2* e questo fatto ha delle conseguenze profonde, descritte nella prossima sezione.

2.3 Una teoria coomologica generalizzata

Utilizzando le sospensioni ridotte abbiamo definito i gruppi commutativi $\{\tilde{\mathbf{K}}^{-n}\}_{n \geq 0}$ che condividono parzialmente alcune proprietà formali della coomologia cellulare; l'isomorfismo di Bott 2.2.5 e l'ultima osservazione della sezione precedente permettono di portare avanti notevolmente questa analogia.

Teorema 2.3.1 (Periodicità in K-teoria) *Se X è uno spazio decente allora l'isomorfismo di Bott induce i seguenti isomorfismi di gruppi (validi anche in versione ridotta):*

$$\forall n \geq 0 \quad \mathbf{K}^{-n}(X) \cong \begin{cases} \mathbf{K}(X) & \text{se } n \text{ è pari} \\ \mathbf{K}^{-1}(X) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Consideriamo adesso una coppia decente (X, A) ; ragionando come in [2.1.3] e usando la naturalità dell'isomorfismo di Bott si deduce facilmente che *bott* commuta con i morfismi connettivi della successione esatta lunga sinistra per la coppia. Quindi per ogni $n \geq 0$ otteniamo il seguente diagrammone

commutativo:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \mathbf{K}^{-n-4}(A) & \longrightarrow & \mathbf{K}^{-n-3}(X, A) & \longrightarrow & \mathbf{K}^{-n-3}(X) & \longrightarrow & \mathbf{K}^{-n-3}(A) & \longrightarrow & \mathbf{K}^{-n-2}(X, A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 \dots & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(S^{n+4} \wedge A_\bullet) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(S^{n+3} \wedge \frac{X}{A}) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(S^{n+3} \wedge X_\bullet) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(S^{n+3} \wedge A_\bullet) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(S^{n+2} \wedge \frac{X}{A}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \cong \uparrow \text{bott} & & \cong \uparrow \text{bott} & & \cong \uparrow \text{bott} & & \cong \uparrow \text{bott} & & \cong \uparrow \text{bott} & & \\
 \dots & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(S^{n+2} \wedge A_\bullet) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(S^{n+1} \wedge \frac{X}{A}) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(S^{n+1} \wedge X_\bullet) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(S^{n+1} \wedge A_\bullet) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge \frac{X}{A}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 \dots & \longrightarrow & \mathbf{K}^{-n-2}(A) & \longrightarrow & \mathbf{K}^{-n-1}(X, A) & \longrightarrow & \mathbf{K}^{-n-1}(X) & \longrightarrow & \mathbf{K}^{-n-1}(A) & \longrightarrow & \mathbf{K}^{-n}(X, A) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Questo significa che anche nella successione esatta per la coppia è presente una periodicità naturale (questa volta i termini a priori distinti sono 6); esplicitamente, il prolungamento naturale della successione a sinistra è il seguente:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & \tilde{\mathbf{K}}^{-2}(A) & & & & & & \\
 & & & & & & \uparrow \cong & \searrow & & & & & \\
 \dots & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(A) & \implies & \tilde{\mathbf{K}}^0(X, A) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}^0(X) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}^0(A) & & \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(X, A) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(X) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

La naturalità permette di sfruttare la periodicità per estendere la definizione dei funtori di K-teoria nel seguente modo (valido anche in versione ridotta o relativa):

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \mathbf{K}^n(X) := \begin{cases} \mathbf{K}(X) & \text{se } n \text{ è pari} \\ \mathbf{K}^{-1}(X) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Per ogni coppia decente si ottiene una successione esatta lunga infinita, i cui dati essenziali si possono riassumere nel seguente suggestivo esagono esatto naturale:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{K}(X) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \mathbf{K}(X, A) & & & & \mathbf{K}(A) \xrightarrow{\cong \text{bott}} \mathbf{K}^{-2}(A) \\
 \uparrow & & & & \downarrow \\
 \mathbf{K}^{-1}(A) & & & & \mathbf{K}^{-1}(X, A) \\
 & \nwarrow & & \swarrow & \\
 & & \mathbf{K}^{-1}(X) & &
 \end{array}$$

In sostanza abbiamo ottenuto una famiglia di funtori $\{\mathbf{K}^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ che originano per ogni coppia decente una successione esatta infinita in entrambe le direzioni; questo è un risultato estremamente importante perchè ci garantisce di lavorare con una teoria coomologica generalizzata:

Teorema 2.3.2 (Una teoria coomologica generalizzata) *La famiglia di funtori $\{\mathbf{K}^n(-, -)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dalla categoria delle coppie decenti alla categoria dei gruppi commutativi e le trasformazioni naturali $\{\delta^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ soddisfano i seguenti assiomi:*

- omotopia: se $f, g: (X, A) \longrightarrow (X', A')$ sono funzioni di coppie omotope allora $f^\# = g^\#$;
- successione esatta lunga naturale: per ogni coppia $A \subseteq X$ esiste la successione esatta lunga infinita naturale:

$$\dots \longrightarrow \mathbf{K}^{n-1}(A) \implies \mathbf{K}^n(X, A) \longrightarrow \mathbf{K}^n(X) \longrightarrow \mathbf{K}^n(A) \implies \mathbf{K}^{n+1}(X, A) \longrightarrow \dots$$

- escissione: se $X = A \cup B$ con A e B sottospazi decenti allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ vale l'isomorfismo $\mathbf{K}^n(X, A) \cong \mathbf{K}^n(B, A \cap B)$ indotto dall'inclusione $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$.

L'assioma di escissione vale praticamente per definizione dal momento che ad esempio se $n \geq 0$ allora $\mathbf{K}^{-n}(X, A) := \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge \frac{X}{A})$ e l'ipotesi di decenza degli spazi implica l'omeomorfismo $\frac{X}{A} \approx \frac{B}{A \cap B}$ da cui l'escissione. L'assioma dimensionale non vale dal momento che ad esempio $\mathbf{K}^{-2n}(\{*\}) = \tilde{\mathbf{K}}(S^{2n} \wedge \{*\}) = \tilde{\mathbf{K}}(S^{2n}) \cong \mathbb{Z}$; da qui il nome di teoria generalizzata.

2.4 Il vero anello di K-teoria

Abbiamo visto nella sezione precedente come la famiglia di funtori $\{\mathbf{K}^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ condivide molte delle proprietà della coomologia, almeno dal punto di vista additivo; tuttavia il cup coomologico permette di definire una struttura di anello sul gruppo commutativo $\bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{H}^n(X; \mathbb{Z})$ in modo che i vari addendi interagiscano tra loro. Potremmo cercare di ottenere qualcosa di simile in K-teoria considerando il gruppo $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{K}^n(X)$ che per periodicità di Bott consiste in una antieconomica somma di infinite copie di $\mathbf{K}^0(X)$ e $\mathbf{K}^{-1}(X)$; ogni gruppo $\mathbf{K}^{-n}(X) := \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge X_\bullet)$ ha anche una struttura di anello, essendo il $\tilde{\mathbf{K}}$ di uno spazio, tuttavia il teorema di periodicità di Bott rende banale il prodotto in $\mathbf{K}^{-n}(X)$ per $n \geq 2$ e grazie al lemma [2.4.3] lo stesso accade per $\mathbf{K}^{-1}(X) := \tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge X)$. Quindi dotare $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{K}^n(X)$ di struttura di anello componente per componente darebbe le stesse informazioni moltiplicative contenute in $\mathbf{K}^0(X)$, l'unico anello a priori non banale, ed inoltre i vari termini non interagirebbero tra loro. In questa sezione mostriamo come estendere il prodotto cross per definire un nuovo anello $\mathbf{K}^*(X)$, strutturalmente molto simile a $\mathbf{H}^*(X; \mathbb{Z})$ a parte per il sistema di graduazione.

In coomologia intera è relativamente semplice definire il prodotto cup $\mathbf{H}^m(X) \otimes \mathbf{H}^n(X) \xrightarrow{\cup} \mathbf{H}^{m+n}(X)$ ed utilizzarlo per formare il cross (cup esterno) $\mathbf{H}^m(X) \otimes \mathbf{H}^n(Y) \xrightarrow{\times} \mathbf{H}^{m+n}(X \times Y)$ ponendo $a \times b := p_X^* a \cup p_Y^* b$ dove p_X e p_Y sono le proiezioni sui due fattori; si può anche procedere in modo contrario, definire prima in qualche modo il cross (fatto decisamente non banale) e poi passare al cup ponendo $a \cup b := \text{diag}^*(a \times b)$ dove $\text{diag} : X \hookrightarrow X \times X$ è l'inclusione diagonale. Per perfunzionalità i due percorsi sono equivalenti.

In K-teoria conviene partire dal cross (appoggiandosi in ultima analisi al prodotto \otimes tra fibrati) e dedurre da esso il prodotto cup; cominciamo con il generalizzare il cross. Usando la relazione $X_\bullet \times Y_\bullet = (X \times Y) \cup (X \times \bullet) \cup (\bullet \times Y) \cup (\bullet \times \bullet)$ definiamo il morfismo $X_\bullet \times Y_\bullet \longrightarrow (X \times Y)_\bullet$ che lascia fisso il prodotto e manda gli ultimi tre termini nel punto base; il quoziente iniettivo di questa funzione continua è l'omeomorfismo canonico $X_\bullet \wedge Y_\bullet \approx (X \times Y)_\bullet$. L'omeomorfismo canonico tra $X \wedge Y$ e $Y \wedge X$ è invece il quoziente dello scambio $X \times Y \approx Y \times X$. Possiamo usare il prodotto $\tilde{\times}$ per estendere il

prodotto \times ai \mathbf{K} superiori nel modo seguente; per ogni $m, n \geq 0$ si consideri il diagramma di gruppi:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{-m}(X) \otimes \mathbf{K}^{-n}(Y) & \xrightarrow{\text{nuovo prodotto } \times} & \mathbf{K}^{-m-n}(X \times Y) \\ \parallel & & \parallel \\ \tilde{\mathbf{K}}(S^m \wedge X_\bullet) \otimes \tilde{\mathbf{K}}(S^n \wedge Y_\bullet) & \xrightarrow{\tilde{\times}} \tilde{\mathbf{K}}(S^m \wedge X_\bullet \wedge S^n \wedge Y_\bullet) \cong \tilde{\mathbf{K}}(S^{m+n} \wedge (X \times Y)_\bullet) & \end{array}$$

dove l'isomorfismo \cong è indotto dall'omeomorfismo $S^m \wedge X_\bullet \wedge S^n \wedge Y_\bullet \approx S^{m+n} \wedge X_\bullet \wedge Y_\bullet \approx S^{m+n} \wedge (X \times Y)_\bullet$. (la presenza dello scambio tra S^m e X creerà in seguito alcuni problemi di segno; lemma [2.4.5]); si tratta effettivamente di una generalizzazione del vecchio prodotto cross $\mathbf{K}^0(X) \otimes \mathbf{K}^0(Y) \xrightarrow{\times} \mathbf{K}^0(X \times Y)$ dal momento che $\tilde{\times}$ è una restrizione di \times . È presente anche una *naturalità* ereditata direttamente da $\tilde{\times}$ e dalle sospensioni.

Se X and Y sono spazi puntati possiamo ripetere la costruzione precedente in versione ridotta per ottenere un omomorfismo di gruppi naturale $\tilde{\mathbf{K}}^{-m}(X) \otimes \tilde{\mathbf{K}}^{-n}(Y) \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-m-n}(X \wedge Y)$; inoltre se (X, A) e (Y, B) sono due coppie compatte un ragionamento analogo può essere ripetuto usando l'omeomorfismo canonico $\frac{X \times Y}{A \times Y \cup X \times B} \approx \frac{X}{A} \wedge \frac{Y}{B}$ (quoziente iniettivo di $X \times Y \rightarrow \frac{X}{A} \wedge \frac{Y}{B}$) per ottenere un altro omomorfismo naturale $\mathbf{K}^{-m}(X, A) \otimes \mathbf{K}^{-n}(Y, B) \rightarrow \mathbf{K}^{-m-n}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$.

Per estendere queste costruzioni ai gruppi di K-teoria ad indici positivi dobbiamo verificare la loro compatibilità con l'isomorfismo di Bott; in generale se $sw: Y \times X \xrightarrow{\approx} X \times Y$ indica l'omeomorfismo di scambio allora un semplice esercizio sulla definizione del cross permette di ottenere il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}(X) \otimes \mathbf{K}(Y) & \xrightarrow{\times} & \mathbf{K}(X \times Y) \\ \downarrow & & \downarrow sw^\# \\ \mathbf{K}(Y) \otimes \mathbf{K}(X) & \xrightarrow{\times} & \mathbf{K}(Y \times X) \end{array}$$

Quindi se $a \in \mathbf{K}(X)$ e $b \in \mathbf{K}(Y)$ allora $b \times a = sw^\#(a \times b)$ e lo stesso risultato vale per il prodotto $\tilde{\times}$ e i $\tilde{\mathbf{K}}$; è altrettanto semplice verificare l'associatività, ovvero $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ ed analogamente in versione ridotta. Questo basta per far vedere la compatibilità del nuovo cross con l'isomorfismo di Bott (che, ricordiamo, si realizza facendo cross ridotto con $H - \varepsilon^1$); ad esempio:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathbf{K}}(X_\bullet) \otimes \tilde{\mathbf{K}}(S^2 \wedge X_\bullet) & \xrightarrow{\tilde{\times}} & \tilde{\mathbf{K}}(X_\bullet \wedge S^2 \wedge X_\bullet) & \xrightarrow{(sw \wedge id)^\#} & \tilde{\mathbf{K}}(S^2 \wedge X_\bullet \wedge X_\bullet) \\ \uparrow id \otimes bott & & & & \uparrow bott \\ \tilde{\mathbf{K}}(X_\bullet) \otimes \tilde{\mathbf{K}}(X_\bullet) & \xrightarrow{\tilde{\times}} & & & \mathbf{K}(X_\bullet \wedge X_\bullet) \end{array}$$

e quindi $(sw \wedge id)^\#(a \tilde{\times} (bott b)) = (sw \wedge id)^\#(a \tilde{\times} ((H - \varepsilon^1) \tilde{\times} b)) = (H - \varepsilon^1) \tilde{\times} a \tilde{\times} b = bott(a \tilde{\times} b)$. Ripetendo un ragionamento simile in versione ridotta e relativa otteniamo:

Teorema 2.4.1 (Cross generali) Per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$ esistono i seguenti omomorfismi di gruppi, naturali rispetto a morfismi indotti da funzioni continue (eventualmente puntate):

$$\begin{array}{l} \mathbf{K}^m(X) \otimes \mathbf{K}^n(Y) \rightarrow \mathbf{K}^{m+n}(X \times Y) \\ \tilde{\mathbf{K}}^m(X) \otimes \tilde{\mathbf{K}}^n(Y) \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{m+n}(X \wedge Y) \\ \mathbf{K}^m(X, A) \otimes \mathbf{K}^n(Y, B) \rightarrow \mathbf{K}^{m+n}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) \end{array}$$

Naturalità ad esempio significa che se $f: (X, A) \rightarrow (X', A')$ and $g: (Y, B) \rightarrow (Y', B')$ sono funzioni continue di coppie allora per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$ il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^m(X, A) \otimes \mathbf{K}^n(Y, B) & \longrightarrow & \mathbf{K}^{m+n}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) \\ \uparrow f^\# \otimes g^\# & & \uparrow (f \times g)^\# \\ \mathbf{K}^m(X', A') \otimes \mathbf{K}^n(Y', B') & \longrightarrow & \mathbf{K}^{m+n}(X' \times Y', A' \times Y' \cup X' \times B') \end{array}$$

Questi prodotti cross generali possono essere usati per definire sulla somma diretta di gruppi $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{K}^n(X)$ una struttura moltiplicativa che faccia interagire i vari termini tra loro come accade nell'anello di coomologia. Come fare è suggerito dal fatto che se $a \in \mathbf{K}(X)$ e $b \in \mathbf{K}(X)$ allora per definizione $a \times b := p_X^\#(a) \cdot p_X^\#(b)$ e quindi se vi applichiamo il morfismo di anelli indotto dall'inclusione diagonale $diag: X \hookrightarrow X \times X$ otteniamo $diag^\#(p_X^\#(a) \cdot p_X^\#(b)) = a \cdot b$ visto che $p_X \circ diag = id_X$. Quindi il prodotto in $\mathbf{K}(X)$ può essere descritto con un cross seguito da una diagonale ed è del tutto naturale estenderlo per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbf{K}^m(X) \otimes \mathbf{K}^n(X) \xrightarrow{\times} \mathbf{K}^{m+n}(X \times X) \xrightarrow{diag^\#} \mathbf{K}^{m+n}(X)$$

Analogamente, se X è puntato e $\widetilde{diag}: X \hookrightarrow X \wedge X$ è il quoziente della diagonale otteniamo un'estensione a $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{K}}^n(X)$ del prodotto in $\widetilde{\mathbf{K}}(X)$:

$$\widetilde{\mathbf{K}}^m(X) \otimes \widetilde{\mathbf{K}}^n(X) \xrightarrow{\widetilde{\times}} \widetilde{\mathbf{K}}^{m+n}(X \wedge X) \xrightarrow{\widetilde{diag}^\#} \widetilde{\mathbf{K}}^{m+n}(X)$$

e non sorprende che nel caso relativo usando la diagonale relativa \overline{diag} si ottenga:

$$\mathbf{K}^m(X, A) \otimes \mathbf{K}^n(X, A) \xrightarrow{\times} \mathbf{K}^{m+n}(X \times X, A \times X \cup X \times A) \xrightarrow{\overline{diag}^\#} \mathbf{K}^{m+n}(X, A)$$

Riassumendo:

Teorema 2.4.2 (cross interni) *Per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$ esistono i seguenti omomorfismi di gruppi, naturali rispetto a morfismi indotti da funzioni continue (eventualmente puntate):*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^m(X) \otimes \mathbf{K}^n(X) & \longrightarrow & \mathbf{K}^{m+n}(X) \\ \widetilde{\mathbf{K}}^m(X) \otimes \widetilde{\mathbf{K}}^n(X) & \longrightarrow & \widetilde{\mathbf{K}}^{m+n}(X) \\ \mathbf{K}^m(X, A) \otimes \mathbf{K}^n(X, A) & \longrightarrow & \mathbf{K}^{m+n}(X, A) \end{array}$$

Si tratta di estensioni dei prodotti degli anelli $\mathbf{K}(X)$, $\widetilde{\mathbf{K}}(X)$ e $\mathbf{K}(X, A)$.

L'esistenza di un cross relativo e ridotto implica la banalità della struttura moltiplicativa dell'anello $\widetilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge X)$ per ogni spazio decente puntato X , come segue dal prossimo risultato:

Corollario 2.4.3 *Sia X è uno spazio decente puntato esprimibile come $X = A \cup B$ dove A e B sono suoi sottospazi decenti contenenti il punto base; allora il prodotto dell'anello $\widetilde{\mathbf{K}}(X)$ è banale.*

Dimostrazione: usiamo l'omeomorfismo canonico $\frac{X \times X}{A \times X \cup X \times B} \approx \frac{X}{A} \wedge \frac{X}{B}$, le equivalenze omotopiche indotte dalle proiezioni $X \rightarrow \frac{X}{A}$ e $X \rightarrow \frac{X}{B}$ (vista la contraibilità dei due sottospazi) e la commutatività

del diagramma
$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \wedge X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{X}{A \cup B} & \longrightarrow & \frac{X \times X}{A \times X \cup X \times B} \end{array}$$
 (dove le frecce orizzontali sono indotte dalle diagonali e le verticali dalle proiezioni) per formare il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathbf{K}}\left(\frac{X}{A}\right) \otimes \tilde{\mathbf{K}}\left(\frac{X}{B}\right) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}\left(\frac{X}{A} \wedge \frac{X}{B}\right) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}\left(\frac{X}{A \cup B}\right) \cong (0) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \\ \tilde{\mathbf{K}}(X) \otimes \tilde{\mathbf{K}}(X) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(X \wedge X) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}(X) \end{array}$$

La riga finale per quanto detto sopra coincide con il prodotto in $\tilde{\mathbf{K}}(X)$ che quindi è banale. \square

Un ragionamento formalmente analogo vale in coomologia e quindi sotto le stesse ipotesi per lo spazio X , l'anello $\tilde{\mathbf{H}}^*(X; \mathbb{Z})$ ha prodotto banale. Il corollario precedente si applica in particolare ad una sospensione $S^1 \wedge X$ e forse conviene ripetere un'osservazione già fatta in precedenza:

Nota 2.4.4 Se consideriamo ad esempio il prodotto $\tilde{\mathbf{K}}(X) \otimes \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(X) \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(X)$ è importante tener presente che stiamo usando la struttura moltiplicativa dell'anello $\tilde{\mathbf{K}}(S^1 \times (X \wedge X))$ (si veda la definizione del cross ridotto [2.2.4]) e non quella nulla a priori di $\tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge (X \wedge X))$.

Prima di proseguire dobbiamo studiare la commutatività dei nuovi prodotti [2.4.2]; l'originale prodotto su $\mathbf{K}(X)$ era commutativo essendo ottenuto direttamente dal prodotto tensoriale di fibrati. Le nuove operazioni tuttavia non sono completamente commutative:

Lemma 2.4.5 (Anticommutatività) *Se $a \in \mathbf{K}^m(X)$ e $b \in \mathbf{K}^n(X)$ allora $a \cdot b = (-1)^{mn} b \cdot a \in \mathbf{K}^{m+n}(X)$; lo stesso risultato è valido anche in versione ridotta o relativa.*

Dimostrazione: (Sketch) se $m = n = 0$ allora stiamo lavorando con il prodotto in $\mathbf{K}(X)$ che è commutativo per definizione; supponiamo adesso che $m=0$ e $n=1$ e consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathbf{K}}(X) \otimes \tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge X) & \xrightarrow{\tilde{x}} & \tilde{\mathbf{K}}(X \wedge S^1 \wedge X) & & \\ \downarrow & & \downarrow (sw \wedge id_X)^\# & & \\ \mathbf{K}(S^1 \wedge X) \otimes \mathbf{K}(X) & \xrightarrow{\tilde{x}} & \mathbf{K}(S^1 \wedge X \wedge X) & \xrightarrow{(S^1 \wedge \widetilde{diag})^\#} & \tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge X) \end{array}$$

dove $sw : S^1 \wedge X \xrightarrow{\sim} X \wedge S^1$ indica l'omeomorfismo di scambio e la commutatività del diagramma è già stata osservata all'inizio di questa sezione. Quindi se $a \in \tilde{\mathbf{K}}(X)$, $a \in \mathbf{K}(X)$ e $b \in \tilde{\mathbf{K}}(S^1 \wedge X)$ allora per definizione $a \cdot b := (S^1 \wedge \widetilde{diag})^\# (sw \wedge id_X)^\# (a \tilde{x} b) = (S^1 \wedge \widetilde{diag})^\# (b \tilde{x} a) = b \cdot a$. Se si ripete questo ragionamento per $m = n = 1$ si giunge con un po' di fatica a dover dimostrare che l'omeomorfismo $ref \wedge id_X : S^2 \wedge X \xrightarrow{\sim} S^2 \wedge X$ ottenuto da una riflessione ref di S^2 induce una moltiplicazione per -1 in $\tilde{\mathbf{K}}(S^2 \wedge X)$; non si tratta di un risultato difficile, ma di solito lo si ottiene gratuitamente dalla dimostrazione del teorema di Bott per cui ne omettiamo la prova. \square

Adesso abbiamo tutti gli strumenti per definire il vero anello di K-teoria:

Definizione 2.4.6 (Il vero K-anello) Se X è uno spazio topologico decente allora il suo K-anello $\mathbf{K}^*(X)$ è definito come segue:

- struttura additiva: $\mathbf{K}(X) \oplus \mathbf{K}^{-1}(X)$;
- prodotto: indotto dai cross interni [2.4.2].

L'anello $\mathbf{K}^*(X)$ è \mathbb{Z}_2 -graduato e \mathbb{Z}_2 -commutativo con unità; la natura functoriale ereditata per somma diretta da \mathbf{K} e \mathbf{K}^{-1} rende \mathbf{K}^* un funtore controvariante omotopico $\text{HTOP}_{dec} \rightarrow \text{RING}_{cl}^{\mathbb{Z}_2}$. In modo analogo sono definiti il K-anello relativo $\mathbf{K}^*(X, A)$ per una coppia decente (X, A) ed il K-anello ridotto $\tilde{\mathbf{K}}^*(X)$ per uno spazio decente puntato X .

Per costruzione $\mathbf{K}(X)$ è un sottoanello commutativo di $\mathbf{K}^*(X)$ ed il prodotto $\mathbf{K}(X)\mathbf{K}(X) \subseteq \mathbf{K}(X)$ è esattamente il prodotto originale di $\mathbf{K}(X)$; il prodotto $\mathbf{K}(X)\mathbf{K}^{-1}(X) \subseteq \mathbf{K}^{-1}(X)$ è definito usando il cross generale e continua ad essere commutativo. Invece $\mathbf{K}^{-1}(X)$ è soltanto un sottogruppo di $\mathbf{K}^*(X)$, il prodotto $\mathbf{K}^{-1}(X)\mathbf{K}^{-1}(X) \subseteq \mathbf{K}^{-2}(X) \cong^{bott} \mathbf{K}(X)$ utilizza in modo essenziale l'isomorfismo di Bott ed è anticommutativo.

L'anello $H^*(X; \mathbb{Z})$ è \mathbb{Z} -graduato, ma possiamo indebolire la struttura di graduazione lavorando con $H^{*pari}(X; \mathbb{Z}) \oplus H^{*dispari}(X; \mathbb{Z})$ e continuando ad utilizzare il prodotto cup: l'anello \mathbb{Z}_2 -graduato così ottenuto presenta delle notevoli analogie formali con $\mathbf{K}^*(X)$. Vedremo in seguito che l'analogia ha un contenuto molto più profondo.

L'esagono esatto per la coppia (X, A) origina la seguente stringa esatta di gruppi:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathbf{K}(A) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{K}(X, A) & \longrightarrow & \mathbf{K}(X) & \longrightarrow & \mathbf{K}(A) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{K}(X, A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \\ \cdots & \longrightarrow & \mathbf{K}^{-1}(A) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{K}^{-1}(X, A) & \longrightarrow & \mathbf{K}^{-1}(X) & \longrightarrow & \mathbf{K}^{-1}(A) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{K}^{-1}(X, A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

dove il morfismo \implies richiede un minimo di attenzione, essendo definito utilizzando l'isomorfismo di Bott; schiacciando la stringa con una somma \oplus e arrotondandola per ridondanza otteniamo il seguente triangolo esatto di gruppi (il triangolo esatto di K-teoria per una coppia):

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^*(X, A) & \longrightarrow & \mathbf{K}^*(X) \\ & \searrow & \swarrow \\ & & \mathbf{K}^*(A) \end{array}$$

Questo triangolo ha una struttura algebrica abbastanza ricca, ma non quanto vorremmo dal momento che la freccia \dashrightarrow non è un morfismo di anelli; lo stesso fenomeno accade in coomologia, dove se $a \in H^p(A)$ e $b \in H^q(A)$ allora $d(a \cup b)$ non può essere uguale a $da \cup db$ anche solo per questioni di grado (d indica il connettivo $H^*(A) \rightarrow H^{*+1}(X, A)$). Tuttavia sappiamo che se $a \in H^p(A)$ e $b \in H^p(X)$ allora $d(a \cup i^*b) = (da) \cup b$ dove $i: A \hookrightarrow X$ è l'inclusione ed il secondo \cup è il cup ibrido; di conseguenza, se dotiamo $H^*(X, A)$ e $H^*(A)$ della struttura di $H^*(X)$ -moduli il connettivo d è un omomorfismo di $H^*(X)$ -moduli ed otteniamo il noto triangolo esatto di $H^*(X)$ -moduli per la coomologia di una coppia:

$$\begin{array}{ccc} H^*(X, A; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^*(X; \mathbb{Z}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & & H^*(A; \mathbb{Z}) \end{array}$$

Lo stesso risultato vale in K -teoria; se $a \in \mathbf{K}^*(A)$ e $b \in \mathbf{K}^*(X)$ allora definendo $b \cdot a := (i^\# b) \cdot a \in \mathbf{K}^*(A)$ (dove $i: A \hookrightarrow X$ indica l'inclusione ed il prodotto a destra è fatto nell'anello $\mathbf{K}^*(A)$) otteniamo una struttura di $\mathbf{K}^*(X)$ -modulo per $\mathbf{K}^*(A)$; per rendere $\mathbf{K}^*(X, A)$ un $\mathbf{K}(X)$ basta identificare $\mathbf{K}^*(X)$ con $\mathbf{K}^*(X, \emptyset)$ ed utilizzare il cross generale. Allora vale il seguente teorema con il cui enunciato concludiamo queste note:

Teorema 2.4.7 *Il triangolo esatto di K -teoria per la coppia (X, A) è un diagramma di $\mathbf{K}^*(X)$ -moduli.*

3 Bibliografia

- [A] J.F. Adams: *On Chern characters and the structure of the unitary group*, Proc. Camb. Phil. Soc, vol. 57 (1961), pagg. 189-199.
- [AH] M.F. Atiyah - F. Hirzebruch: *Analytic cycles on complex manifolds*, Topology, vol. 35, pagg. 25-45.
- [AT] M.F. Atiyah: *K-theory*, W.A, Benjamin Inc., New York, 1967.
- [B] R. Bott: *Quelques remarques sur les théorèmes de périodicité*, Bull. de la S.M.F., tome 87 (1959), pagg. 273-310.
- [DK] J.F. Davis - P. Kirk: *Lecture notes in algebraic topology*, Grad. Studies in Math., vol. 35.
- [H] D. Husemoller: *Fibre bundles*, McGraw-Hill.
- [LW] A.T. Lundell - S. Weingram: *The topology of CW-complexes*, The Univ. series in Higher Math., 1969.
- [S] N.E. Steenrod: *Cohomology operations*, Annals of Math. Studies, vol. 50.