CICLI OLOMORFI

Parte I: controesempi proiettivi

Guido Pollini

Contents

1 I controesempi di Atiyah e Hirzebruch

1.1 Un corollario del criterio fondamentale

Nell'articolo [AH, teorema 6.1] viene dimostrato il seguente risultato che dà condizioni necessarie di natura esclusivamente topologica affinché un ciclo intero sia olomorfo:

Teorema 1.1.1 (Criterio fondamentale) *Sia X una varietà complessa compatta ed $x \in \mathrm{H}^{2q}(X;\mathbb{Z})$ un suo ciclo omolorfo intero; allora $d_r x = 0$ per ogni $r \geq 2$, dove d_r indica il differenziale della r-esima pagina nella successione spettrale di Atiyah-Hirzebruch $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}) \Rightarrow \mathbf{K}^*(X)$.*

Tale criterio risulta di difficile applicazione pratica visto che coinvolge i differenziali di tutte le pagine della successione, ma ha comunque un corollario che ne facilita l'utilizzo. Si veda l'appendice [2.1] per maggiori dettagli sulle operazioni che stiamo per usare; fissiato un primo p dispari[1] indichiamo con $\mathbb{Z}_p := \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ il campo con p-elementi ed utilizziamo la $\mathbb{Z}_p$-riduzione red_p, il morfismo di Bockstein $bock_p$ e l'operazione coomologica "potenza cup p-esima ridotta al primo ordine" $\mathcal{P}^1_p$ per definire un nuovo morfismo naturale $\mathscr{P}^1_p := bock_p \mathcal{P}^1_p red_p$ di grado $+2p-1$ in coomologia intera (essenzialmente si tratta di $\mathcal{P}^1_p$ in versione intera):

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^n(X;\mathbb{Z}) \arrow[r, "red_p"] \arrow[rrr, bend left, "\mathscr{P}^1_p"] & \mathrm{H}^n(X;\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\mathcal{P}^1_p"] & \mathrm{H}^{n+2p-2}(X;\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "bock_p"] & \mathrm{H}^{n+2p-1}(X;\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

Sempre nell'articolo [AH, teorema 7.1] (oppure per un diverso approccio [A]) è dimostrato il seguente corollario del criterio fondamentale:

Teorema 1.1.2 (Criterio pratico) *Sia X una varietà complessa compatta e $x \in \mathrm{H}^{2q}(X;\mathbb{Z})$ un suo ciclo intero olomorfo; allora per ogni primo p dispari risulta $\mathscr{P}^1_p x = 0$.*

[1] In tutto quello che segue considereremo soltanto *primi dispari*; per il caso $p=2$ il ragionamento è formalmente identico, avendo cura di sostituire l'operazione coomologica $\mathcal{P}^1_p$ con l'operazione coomologica $\mathcal{SQ}^3$

L'aver dato la condizione in versione *operazione coomologica* ha il vantaggio di permettere dei calcoli espliciti; anche se la condizione originale sui differenziali della successione spettrale sembra tecnicamente piu' semplice, a livello pratico è più o meno inutilizzabile.

Fissato un primo dispari p vogliamo provare l'esistenza una varietà complessa proiettiva X dotata di un elemento $x \in \mathrm{H}^4\big(X;\mathbb{Z}\big)$ soddisfacente la relazione $\mathscr{P}_p^1 x \neq 0$ e quindi non olomorfo; inoltre un tale elemento risulta essere di di p-torsione e quindi costituisce un controesempio alla congettura di Hodge su $\mathbb{Z}$ ma non alla congettura di Hodge su $\mathbb{Q}$. La varietà X deve essere scelta in modo che abbia almeno una parte dell'anello di coomologia isomorfa ad una parte bassa della coomologia di uno spazio su cui sappiamo calcolare le potenze ridotte al primo grado. Un tale spazio sarà con il senno di poi $\mathbb{K}\big(\mathbb{Z};2\big)\times\mathbb{K}(\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_p,1)=\mathbb{K}\big(\mathbb{Z};2\big)\times\mathbb{K}\big(\mathbb{Z}_p;1\big)^{\times 3}$ e dal momento che la coomologia di $\mathbb{K}\big(\mathbb{Z};2\big)\cong\mathbb{CP}^\infty$ è ben nota, nella prossima sezione provvederemo alla descrizione di quella di $\mathbb{K}\big(\mathbb{Z}_p;1\big)$. METTERCI IL COMMENTO SULLA NATURA TOPOLOGICA E ELIMINARE L?iNIZIO!!

1.2 La coomologia di $\mathbb{K}\big(\mathbb{Z}_p;1\big)$

Per la costruzione dei controesempi dobbiamo conoscere la coomologia dello spazio di Eilenberg-MacLane $\mathbb{K}(\mathbb{Z}_p,1)$ per p primo. L'azione libera $\mathbb{Z}_p\times S^\infty \longrightarrow S^\infty$ definita come $\underline{1}\cdot(z_1,z_2,z_3,\ldots\ldots):= e^{\frac{2\pi i}{p}}(z_1,z_2,z_3,\ldots\ldots)$ è chiaramente un azione di rivestimento e quindi lo spazio delle orbite $S^\infty/\mathbb{Z}_p$ ha $\pi_1\cong\mathbb{Z}_p$ ed è rivestito da S^∞, uno spazio omotopicamente banale; conseguentemente, $S^\infty/\mathbb{Z}_p$ è un Eilenberg-MacLane $\mathbb{K}(\mathbb{Z}_p,1)$. Usiamo questa rappresentazione per dimostrare:

Proposizione 1.2.1 *Per ogni primo $p\neq 2$ valgono i seguenti risultati*[2]*:*

$$\mathrm{H}^*\big(\mathbb{K}(\mathbb{Z}_p,1);\mathbb{Z}\big)\cong_{ring}\frac{\mathbb{Z}[t]}{\langle pt\rangle}\ \textit{con}\ |t|=2$$

$$\mathrm{H}^*\big(\mathbb{K}(\mathbb{Z}_p,1);\mathbb{Z}_p\big)\cong_{ring}\frac{\mathbb{Z}_p[a,b]}{\langle a^2\rangle}\ \begin{matrix}|a|=1\\|b|=2\end{matrix}\quad \textit{ed inoltre}\begin{cases}\beta_p a=b\\ \mathcal{P}_p^1 a=0\\ \mathcal{P}_p^1 b=b^p\end{cases}$$

Dimostrazione: l'azione libera $S^1\times S^{2n+1}\to S^{2n+1}\subseteq\mathbb{C}^{n+1}$ ottenuta moltiplicando componente per componente passa ad un'azione libera $S^1/\mathbb{Z}_p\times S^{2n+1}/\mathbb{Z}_p\longrightarrow S^{2n+1}/\mathbb{Z}_p$ ($\mathbb{Z}_p$ visto come sottogruppo di S^1); avendo un'azione libera di un Lie $S^1\cong\frac{S^1}{\mathbb{Z}_p}$ su una varietà compatta si ottiene un fibrato:

$$\mathrm{S}^1\cong S^1/\mathbb{Z}_p\hookrightarrow \mathrm{S}^{2n+1}/\mathbb{Z}_p\twoheadrightarrow\frac{S^{2n+1}/\mathbb{Z}_p}{S^1/\mathbb{Z}_p}\cong S^{2n+1}/S^1\cong\mathbb{CP}^{\mathrm{n}}$$

ed usando inclusioni e topologizzazioni deboli una fibrazione $\begin{array}{c}\mathrm{S}^1\hookrightarrow S^\infty/\mathbb{Z}_p\\ \downarrow\\ \mathbb{CP}^\infty\end{array}$. La semplice connessione della base dell'ultima fibrazione permette di attivare la successione spettrale di Leray-Serre a coefficienti interi con struttura moltiplicativa (teorema [2.2.1]), usando i ben noti isomorfismi $\mathrm{H}^*\big(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{Z}\big)\cong_{ring}\mathbb{Z}[c]$ con $|c|=2$ e $\mathrm{H}^*\big(S^1;\mathbb{Z}\big)\cong_{ring}\frac{\mathbb{Z}[i]}{\langle i^2\rangle}$ con $|i|=1$; dal momento che la coomologia della fibra S^1 è libera e finitamente generata come $\mathbb{Z}$-modulo la struttura moltiplicativa della seconda pagina

[2] se $p=2$ il calcolo intero è lo stesso, mentre vale l'isomorfismo $\mathrm{H}^*\big(\mathbb{K}(\mathbb{Z}_2,1);\mathbb{Z}_2\big)\cong_{ring}\mathbb{Z}_2[a]$ con $|a|=1$ e $\beta_p a=a^2$.

$E_2^{p,q} \cong \mathrm{H}^p\big(\mathbb{CP}^\infty; \mathrm{H}^q(S^1;\mathbb{Z})\big)$ è data dal prodotto tensoriale $E_2^{*,*} \cong_{ring} \mathrm{H}^*\big(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{Z}\big) \otimes \mathrm{H}^*\big(S^1;\mathbb{Z}\big)$. Il seguente diagramma mostra gli unici differenziali attivi e descrive i generatori dei singoli $\mathbb{Z}$-moduli (nota che ic indica $i \cdot c$ con $\cdot$ prodotto della seconda pagina):

$$E_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} & 0 & \cdots \\ \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} & 0 & \cdots \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} i & 0 & ic & 0 & ic^2 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & c & 0 & c^2 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

Chiaramente $d_2 i = kc$ per un certo intero k e dobbiamo determinarlo; per come sono fatti i differenziali $\mathrm{H}^2\big(S^\infty/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}\big) \cong \frac{\{c\}\mathbb{Z}}{im\, d_2} \cong \mathbb{Z}_k$ (sulla diagonale di peso 2 è il solo termine attivo) e per identificare l'intero k osserviamo che per abelianità $\pi_1(S^\infty/\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p \cong \mathrm{H}_1\big(S^\infty/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}\big)$ e quindi per il teorema dei coefficienti universali:

$$\mathbb{Z}_k \cong \mathrm{H}^2\big(S^\infty/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}\big) \cong \mathrm{HOM}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{H}_2(S^\infty/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z});\mathbb{Z}\big) \oplus \mathrm{EXT}^1_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{H}_1\big(S^\infty/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}\big);\mathbb{Z}\big) \cong \mathbb{Z}_p$$

dal momento che il termine $\mathrm{HOM}_{\mathbb{Z}}\big(-;\mathbb{Z}\big)$ per sua natura è privo di torsione e quindi $k = \pm p$. Cambiando eventualmente segno a c otteniamo $d_2 i = pc$, ma d'altra parte d_2 è una derivazione e $d_2 c = 0$ e quindi $d_2(ic^n) = (d_2 i)c^n = pc^{n+1}$ per cui tutti i differenziali sono stati descritti. Indicando con $\underline{c}$ la classe di c nel qouziente otteniamo (risultato valido anche se $p=2$):

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}_p & 0 & \mathbb{Z}_p & 0 & \cdots \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \underline{c} & 0 & \underline{c}^2 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

Notare che ad esempio l'elemento $\underline{c \cdot c}$ diventa $\underline{c} \cdot \underline{c}$ visto che il prodotto su E_3 è ereditato da quello di E_2. Essendo E_3 la pagina finale E_∞ e dal momento che su ogni sua diagonale è presente un solo termine non banale abbiamo la descrizione precisa dei gruppi di coomologia intera $\mathrm{H}^\bullet\big(S^\infty/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}\big)$ senza problemi di estensione; per quanto riguarda il prodotto un semplice controllo sulle filtrazioni (sempre il teorema [2.2.1]) mostra che ad esempio $\underline{c} \cdot \underline{c} = \underline{c} \cup \underline{c}$ fatto nell'anello $\mathrm{H}^*\big(S^\infty/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}\big)$ e avendo ottenuto una descrizione esplicita di tutti i possibili prodotti cup otteniamo:

$$\mathrm{H}^*\big(S^\infty/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}\big) \cong_{ring} \frac{\mathbb{Z}[\underline{c}]}{\langle p\underline{c}\rangle}$$

Passiamo adesso ai coefficienti $\mathbb{Z}_p$; una semplice applicazione dei coefficienti universali mostra che addittivamente:

$$\mathrm{H}^\bullet\big(S^\infty/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p\big) \cong_{group} [\mathbb{Z}_p\ \mathbb{Z}_p\ \mathbb{Z}_p\ \mathbb{Z}_p \ldots]$$

Per identificare la sua struttura di anello utilizziamo ancora la successione spettrale precedente, stavolta a coefficienti sul campo $\mathbb{Z}_p$; dal momento che ogni modulo su un campo è automaticamente libero anche in questo caso abbiamo la descrizione moltiplicativa della seconda pagina $E_2^{*,*} \cong_{ring} \mathrm{H}^*\big(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{Z}_p\big) \otimes \mathrm{H}^*\big(S^1;\mathbb{Z}_p\big)$ (sapendo che $\mathrm{H}^*\big(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{Z}_p\big) \cong_{ring} \mathbb{Z}_p[c]$ e $\mathrm{H}^*\big(S^1;\mathbb{Z}_p\big) \cong_{ring} \frac{\mathbb{Z}_p[i]}{\langle i^2\rangle}$):

$$E_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_p & 0 & \mathbb{Z}_p & 0 & \mathbb{Z}_p & 0 & \cdots \\ \mathbb{Z}_p & 0 & \mathbb{Z}_p & 0 & \mathbb{Z}_p & 0 & \cdots \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} i & 0 & ic & 0 & ic^2 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & c & 0 & c^2 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

Stavolta conosciamo come deve essere fatta la struttura addittiva della pagina finale:

$$E_\infty = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_p & 0 & \mathbb{Z}_p & 0 & \mathbb{Z}_p & 0 & \cdots \\ \mathbb{Z}_p & 0 & \mathbb{Z}_p & 0 & \mathbb{Z}_p & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

e quindi i differenziali nella seconda pagina sono tutti nulli; osservando che ancora una volta su ogni diagonale è presente un solo termine non banale ed usando la compatibilità moltiplicativa descritta dal teorema di Leray-Serre (stando molto attenti ai termini delle varie filtrazioni) otteniamo la descrizione addittiva:

$$\mathrm{H}^{\bullet}\big(S^\infty/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p\big)\cong_{group}\Big[\{1\}\mathbb{Z}_p\ \ \{i\}\mathbb{Z}_p\ \ \{c\}\mathbb{Z}_p\ \ \{i\cup c\}\mathbb{Z}_p\ \ \{c\cup c\}\mathbb{Z}_p\ \ \{i\cup c^2\}\mathbb{Z}_p\dots\Big]$$

Ad esempio $i\cdot c=i\cup c$ fatto nella coomologia di $S^\infty/\mathbb{Z}_p$ dal momento che il primo prodotto deve essere uguale a $\frac{H^1_{(0)}}{\mathrm{H}^1_{(1)}}=\mathrm{H}^1\otimes\frac{H^2_{(2)}}{\mathrm{H}^2_{(3)}}=\mathrm{H}^2\longrightarrow\frac{H^3_{(2)}}{\mathrm{H}^3_{(3)}}=\mathrm{H}^3$ indotto dal cup; per questioni di grado le due lettere c e i commutano e l'unica incognita è il valore di $i\cup i$ (infatti $\frac{H^1_{(0)}}{\mathrm{H}^1_{(1)}}=\mathrm{H}^1\otimes\frac{H^1_{(0)}}{\mathrm{H}^1_{(1)}}=\mathrm{H}^1\longrightarrow\frac{H^2_{(0)}}{\mathrm{H}^2_{(1)}}=0$ e quindi la presunta compatibilità non ci dà informazioni) pur sapendo che banalmente $i\cdot i=0$. Se supponiamo $p\neq 2$ allora un tale cup deve per forza fare zero visto che $i\cup i=-i\cup i$ e $2\neq 0\in\mathbb{Z}_p$ e quindi l'anello cercato è:

$$\mathrm{H}^{*}\big(S^\infty/\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p\big)\cong_{ring}\frac{\mathbb{Z}_p[i,c]}{\langle i^2\rangle}$$

Nel caso $p=2$ si verifica ad esempio osservando che $\mathbb{K}(\mathbb{Z}_2,1)\sim\mathbb{RP}^\infty$ che $i\cup i=c$ e quindi l'anello diventa $\mathbb{Z}_2[i]$; in questo caso infatti la struttura moltiplicativa della pagina finale non descrive perfettamente quella della coomologia.

Le relazioni $\mathcal{P}^1_p i=0$ e$\mathcal{P}^1_p c=c^p$ seguono direttamente dagli assiomi delle potenze ridotte p-esime al primo grado visto che $|i|=1$ e $|c|=2$.

Per l'ultima relazione basta guardare il diagramma associato alla successione esatta di Bockstein (sottintendiamo il simbolo $S^\infty/\mathbb{Z}_p$):

$$0=\mathrm{H}^1(-;\mathbb{Z})\longrightarrow\mathrm{H}^1\big(-;\mathbb{Z}_p\big)\xrightarrow[\cong]{bock_p}\mathrm{H}^2\big(-;\mathbb{Z}\big)\xrightarrow[0]{p\cdot-}\mathrm{H}^2(-;\mathbb{Z})\xrightarrow[\cong]{red_p}\mathrm{H}^2\big(-;\mathbb{Z}_p\big)\xrightarrow{bock_p}\mathrm{H}^3\big(-;\mathbb{Z}\big)=0$$

Quindi $\beta_p=red_p bock_p$ è un isomorfismo che manda i in un generatore addittivo kc di $\mathbb{Z}_p$ e a meno di sostituire c con quest'ultimo abbiamo terminato. □

1.3 Controesempi di natura proiettiva

Teorema 1.3.1 *Per ogni primo $p\neq 2$ esiste una varietà complessa proiettiva X ed un ciclo intero $x\in\mathrm{H}^4\big(X;\mathbb{Z}\big)$ di p-torsione tale che $\mathscr{P}^1_p x\neq 0$; quindi per il criterio fondamentale x non è realizzabile come ciclo algebrico e l'ostruzione ha natura esclusivamente topologica.*

Per dimostrare il teorema abbiamo bisogno di una varietà proiettiva nella quale si sappia calcolare esplicitamente l'operazione $\mathcal{P}^1_p$ almeno per elementi di grado basso; la seguente proposizione ([AH, prop. 6.6]) ci permette di spostare il problema su uno spazio più maneggevole coomologicamente:

Proposizione 1.3.2 *Per ogni gruppo abeliano finito G e ogni intero $n\geq 2$ esiste una varietà complessa proiettiva X avente lo stesso n-tipo omotopico di $\mathbb{K}(\mathbb{Z},2)\times\mathbb{K}(G,1)$; ovvero esiste una funzione continua $\phi\colon X\longrightarrow\mathbb{K}(\mathbb{Z},2)\times\mathbb{K}(G,1)$ che induce isomorfismi sui gruppi di omotopia fino al π_n compreso.*

Supponiamo adesso di aver fissato un primo $p \neq 2$ e di voler costruire il controesempio di natura proiettiva; nel teorema [1.3.3] faremo vedere che scelto opportunamente il gruppo G esiste un elemento $x \in \mathrm{H}^4\big(\mathbb{K}(G,1);\mathbb{Z}\big)$ tale che $px = 0$ e $\mathscr{P}^1_p x \neq 0$. Usiamo la proposizione precedente con $n > 4+2p-1$ per ottenere una varietà proiettiva X ed una funzione continua ϕ che induce per il teorema di Whitehead[3] un isomorfismo di gruppi tra le coomologie intere $\phi^*: \mathrm{H}^{\leq 4+2p-1}\big(\mathbb{K}(\mathbb{Z},2)\times\mathbb{K}(G,1);\mathbb{Z}\big) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^{\leq 4+2p-1}\big(X;\mathbb{Z}\big)$ fino al grado $4{+}2p{-}1$ compreso. La formula di Kunneth fornisce il seguente isomorfismo di anelli realizzato con il prodotto cross (senza correzione di torsione dal momento che $\mathrm{H}^*\big(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{Z}\big)$ è libero e finitamente generato in ogni grado):

$$\mathrm{H}^*\big(\mathbb{K}(\mathbb{Z},2)\times\mathbb{K}(G,1);\mathbb{Z}\big) \cong_{ring} \mathrm{H}^*\big(\mathbb{K}(\mathbb{Z},2);\mathbb{Z}\big) \otimes \mathrm{H}^*\big(\mathbb{K}(G,1);\mathbb{Z}\big)$$

Consideriamo l'elemento $1\times x \in \mathrm{H}^0\big(\mathbb{K}(\mathbb{Z},2);\mathbb{Z}\big) \otimes \mathrm{H}^4\big(\mathbb{K}(G,1);\mathbb{Z}\big) \subseteq \mathrm{H}^4\big(\mathbb{K}(\mathbb{Z},2)\times\mathbb{K}(G,1);\mathbb{Z}\big)$ che per definizione di prodotto cross coincide con $p_1^*1 \cup p_2^*x = 1 \cup p_2^*x = p_2^*x$ dove p_1 e p_2 sono le proiezioni del prodotto topologico; sviluppando otteniamo $\mathscr{P}^1_p(1\times x) = \mathscr{P}^1_p p_2^* x = p_2^*\mathscr{P}^1_p x = p_1^*1 \cup p_2^*\mathscr{P}^1_p x = 1\times\mathscr{P}^1_p x \neq 0$ dal momento che l'ultimo termine è copiato tramite isomorfismo di Kunneth $0 \neq \mathscr{P}^1_p x = 1\times\mathscr{P}^1_p x \in \mathrm{H}^0\big(\mathbb{K}(\mathbb{Z},2);\mathbb{Z}\big) \otimes \mathrm{H}^{4+2p-1}\big(\mathbb{K}(G,1);\mathbb{Z}\big) \subseteq \mathrm{H}^{4+2p-1}\big(\mathbb{K}(\mathbb{Z},2)\times\mathbb{K}(G,1);\mathbb{Z}\big)$ nella coomologia del prodotto (per questo avevamo bisogno dell'oscura relazione $n > 4+2p-1$). Dal momento che per costruzione l'operazione $\mathscr{P}^1_p$ è naturale rispetto ai morfismi indotti da funzioni continue $\mathscr{P}^1_p\phi^*(1\times x) = \phi^*\mathscr{P}^1_p(1\times x) \neq 0$ e quindi $\phi^*(1\times x)$ è l'elemento della coomologia di X che stavamo cercando.

Resta adesso da scegliere bene il gruppo G; il candidato ottimale per i calcoli fatti in precedenza è $G := \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ e dobbiamo quindi mostrare che nella coomologia intera di $\mathbb{K}(\mathbb{Z}_p^{\oplus 3},1) \sim \mathbb{K}(\mathbb{Z}_p,1)^{\times 3}$ c'è un elemento che fa al caso nostro:

Teorema 1.3.3 *Per ogni primo $p \neq 2$ esiste un $x \in \mathrm{H}^4\big(\mathbb{K}(\mathbb{Z}_p,1)^{\times 3};\mathbb{Z}\big)$ tale che $px = 0$ e $\mathscr{P}^1_p x \neq 0$*

Dimostrazione: per semplicità poniamo $X := \mathbb{K}(\mathbb{Z}_p,1)^{\times 3}$ in tutto quello che segue; grazie alla proposizione [1.2.1] sappiamo che

$$\mathrm{H}^\bullet\big(\mathbb{K}(\mathbb{Z}_p,1);\mathbb{Z}\big) \cong_{group} [\mathbb{Z}\ \ 0\ \ \mathbb{Z}_p\ \ 0\ \ \mathbb{Z}_p\ \ 0\ \ \mathbb{Z}_p\ \ \ldots]$$

e quindi una semplice applicazione della formula di Kunneth prova che per ogni $n \geq 1$ il gruppo $\mathrm{H}^n\big(X;\mathbb{Z}\big)$ è di p-torsione (i termini di correzione di torsione $\mathrm{TOR}_\mathbb{Z}$ sono al massimo somme di $\mathbb{Z}_p$); di conseguenza della successione esatta contenente il morfismo di Bockstein $bock_p$ [2.1] resta soltanto il seguente pezzo esatto essendo nullo ogni morfismo $p\cdot -$:

$$\forall\, n \geq 1 \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{H}^n\big(X;\mathbb{Z}\big) \xrightarrow{red_p} \mathrm{H}^n\big(X;\mathbb{Z}_p\big) \xrightarrow{bock_p} \mathrm{H}^{n+1}\big(X;\mathbb{Z}\big) \longrightarrow 0$$

Quindi in grado strettamente positivo $\mathrm{H}^n\big(X;\mathbb{Z}\big) = ker\ bock_p$, ma essendo $red_p : \mathrm{H}^{n+1}\big(X;\mathbb{Z}\big) \to \mathrm{H}^{n+1}\big(X;\mathbb{Z}_p\big)$ iniettiva abbiamo la relazione $ker\ bock_p = ker(red_p bock_p) = ker\ \beta_p$ ed in conclusione:

$$\forall\, n \geq 1 \qquad \mathrm{H}^n\big(X;\mathbb{Z}\big) = ker\ \beta_p : \mathrm{H}^n\big(X;\mathbb{Z}_p\big) \longrightarrow \mathrm{H}^{n+1}\big(X;\mathbb{Z}_p\big)$$

Si tratta di un risultato estremamente comodo perchè ci permette di lavorare interamente con tecniche di natura $\mathbb{Z}_p$, come ad esempio β_p e $\mathcal{P}^1_p$, sapendo esattamente cosa può essere trasferito in versione intera.

[3]**Teorema di Whitehead:** sia $f : X \longrightarrow Y$ è una funzione continua tra due spazi connessi per archi tale che $\pi_i(f) : \pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(Y)$ è un isomorfismo $\forall i \leq n$; allora $\mathrm{H}^i(f) : \mathrm{H}^i(Y;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X;\mathbb{Z})$ è un isomorfismo $\forall i < n$.

La formula di Kunneth a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_p$ e la proposizione [1.2.1]forniscono il seguente isomorfismo realizzato con un triplo crossing:

$$\mathrm{H}^*\big(X;\mathbb{Z}_p\big) \cong_{ring} \frac{\mathbb{Z}_p[a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3]}{\langle a_1^2,a_2^2,a_3^2\rangle} \begin{array}{l}|a_i|=1\\|b_i|=2\end{array} \begin{array}{l}\beta_p a_i = b_i\\ \mathcal{P}_p^1 a_i = 0\\ \mathcal{P}_p^1 b_i = b_i^p\end{array}$$

Le ultime relazioni scritte valgono dal momento che ad esempio l'elemento a_1 in realtà è $a_1\times 1\times 1$ dove a_1 vive nella coomologia del primo $\mathbb{K}(\mathbb{Z}_p,1)$ e le altre sono le unità coomologiche degli spazi rimanenti; dal momento che le operazioni β_p, $\mathcal{P}_p^1$ e $\cup$ rispettano la naturalità e si comportano bene con i cup le relazioni suddette sono vere (il cross è un cup di due pullback).

Con il senno di poi scegliamo l'elemento $y:=\beta_p(a_1a_2a_3)\in\mathrm{H}^4\big(X;\mathbb{Z}_p\big)$ e facciamo vedere che soddisfa le nostre richieste; dal momento che $\beta_p y=\beta_p\beta_p(a_1a_2a_3)=0$ per quanto detto sopra esiste un elemento di p-torsione $x\in\mathrm{H}^4\big(X;\mathbb{Z}\big)$ tale che $red_p x=y$. Dobbiamo far vedere che $\mathscr{P}_p^1 x\neq 0$, ma essendo in questo caso red_p iniettiva basta provare che $red_p\mathscr{P}_p^1 x\neq 0$ e adesso possiamo lavorare a coefficienti $\mathbb{Z}_p$ dal momento che :

$$red_p\mathscr{P}_p^1 x = red_p bock_p \mathcal{P}_p^1 red_p x = \beta_p\mathcal{P}_p^1\beta_p(a_1a_2a_3)$$

e sviluppando l'ultima espressione usando le relazioni dimostrate fin ora si ottiene facilmente:

$$\beta_p\mathcal{P}_p^1\beta_p(a_1a_2a_3) = b_1^p(b_2a_3-a_2b_3)+b_2^p(b_1a_3-a_1b_3)+b_3^p(b_1a_2-a_1b_2)\neq 0\in\frac{\mathbb{Z}_p[a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3]}{\langle a_1^2,a_2^2,a_3^2\rangle}$$

E questo conclude la dimostrazione. □

2 Appendice

2.1 Morfismi di Bockstein e riduzioni di potenze $\cup$

In tutto quello che segue X indicherà uno spazio topologico *decente*. Una successione esatta di gruppi commutativi origina notoriamente una successione esatta lunga in coomologia; fondamentale per queste note è la sequenza associata al diagramma esatto $0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_p\to 0$ dove il primo morfismo è la moltiplicazione per p. Scriviamo la successione esatta lunga in coomologia:

$$\ldots\ldots \xrightarrow{red_p} \mathrm{H}^{n-1}\big(X;\mathrm{Z}_p\big) \overset{bock_p}{\Longrightarrow} \mathrm{H}^n\big(X;\mathbb{Z}\big) \xrightarrow{p\cdot -} \mathrm{H}^n\big(X;\mathrm{Z}\big) \xrightarrow{red_p} \mathrm{H}^n\big(X;\mathrm{Z}_p\big) \overset{bock_p}{\Longrightarrow} \mathrm{H}^{n+1}\big(X;\mathbb{Z}\big) \xrightarrow{p\cdot -} \ldots\ldots$$

I morfismi red_p e $bock_p$ sono gli strumenti fondamentali per passare dalla coomologia intera a quella modulo p e viceversa e si può far vedere che entrambe le operazioni sono naturali rispetto ai morfismi indotti da funzioni continue. Anche la composizione $red_p bock_p$ ha una sua importanza rivelata dal seguente:

Proposizione 2.1.1 *Se $\beta_p := \mathrm{H}^n\big(X;\mathbb{Z}_p\big) \longrightarrow \mathrm{H}^{n+1}\big(X;\mathbb{Z}_p\big)$ indica il connettivo della successione coomologica indotta da $0\to\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_{p^2}\to\mathbb{Z}_p\to 0$ allora:*

$$\beta_p = red_p bock_p$$

Vale la formula $\beta_p(x\cup y)=(\beta_p x)\cup y+(-1)^{|x|}x\cup\beta_p b$ ed inoltre $\beta_p\beta_p=0$.

La relazione fondamentale $\beta_p = red_p bock_p$ si ottiene collegando le due successioni corte con i morfismi di proiezione e facendo diagram chase, mentre $\beta_p^2 = 0$ segue banalmente dalla successione lunga per $bock_p$; leggermente più complessa è la dimostrazione della relazione tra β_p ed il cup, in ogni caso non valida in quella forma per il morfismo $bock_p$.

Un'altra operazione in coomologia $\mathbb{Z}_p$ è la potenza cup p-esima $\mathrm{H}^n(X;\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathrm{H}^{pn}(X;\mathbb{Z}_p)$ definita come $x \longmapsto x^{\cup p}$; il seguente teorema permette di *ridurre* una tale potenza prendendone in un certo senso solo una parte (se la prendiamo tutta otteniamo la potenza cup originaria). Una trattazione sistematica dell'unicità ed esistenza di queste operazioni si trova in [S]:

Teorema 2.1.2 (Esistenza p-potenze $\cup$ ridotte al grado i-esimo) *Sia $p \neq 2$ un primo dispari; allora per ogni coppia di indici $i \geq 0$ e $n \geq 0$ esiste un morfismo $\mathcal{P}_p^i : \mathrm{H}^n(X;\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathrm{H}^{n+2i(p-1)}(X;\mathbb{Z}_p)$ soddisfacente i seguenti assiomi:*

- $\mathcal{P}_p^i a = \begin{cases} a & \textit{se } i=0 \\ a^{\cup p} & \textit{se } 2i=|a| \\ 0 & \textit{se } 2i>|a| \end{cases}$

- $\mathcal{P}_p^i f^* a = f^* \mathcal{P}_p^i a$ *per ogni funzione continua* $f : X \longrightarrow Y$;

- $\mathcal{P}_p^i(a+b) = \mathcal{P}_p^i a + \mathcal{P}_p^i b$;

- $\mathcal{P}_p^i(a \cup b) = \sum_{j=0\ldots i} \mathcal{P}_p^j a \cup \mathcal{P}_p^{i-j} b$;

L'apparente stranezza degli indici deriva dal fatto che la relazione $\mathcal{P}_p^i a = a^{\cup p}$ è banale se $|a|$ è dispari dal momento che $a^{\cup p} = (a \cup a) \cup a^{\cup p-2} = 0$ essendo per ipotesi p dispari; inoltre se $2i = |a|$ allora $\mathcal{P}_p^i a = a^{\cup p} \in \mathrm{H}^{2ip}$ e quindi l'operazione $\mathcal{P}_p^i$ deve essere di grado $2i(p-1)$.

Un'altra proprietà fondamentale non usata in queste note è la compatibilità dell'operazione $\mathcal{P}_p^i$ con gli isomorfismi di sospensione $\sigma_n : \widetilde{\mathrm{H}}^n(X;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^{n+1}(\Sigma X;\mathbb{Z}_p)$, ovvero $\mathcal{P}_p^i \circ \sigma_n = \sigma_{n+2i(p-1)} \circ \mathcal{P}_p^i$; un risultato standard in coomologia afferma che se a e b sono elementi in $\mathrm{H}^*(\Sigma X;\mathbb{Z}_p)$ di grado strettamente positivo allora $a \cup b = 0$, ovvero la sospensione distrugge essenzialmente la struttura prodotto dell'anello di coomologia (fatto valido per coefficienti in un anello qualsiasi, basta saper fare i cup relativi). Invece $\mathcal{P}_p^i$ sopravvive alla sospensione ed in un certo senso si può considerare come un sostituto stabile della potenza cup p-esima.

2.2 Struttura moltiplicativa nella successione di Leray-Serre

Richiamiamo brevemente gli strumenti usati nel calcolo della coomologia di $S^\infty/\mathbb{Z}_p$ ([DK], pagg. 257-258); sia $\mathrm{F} \hookrightarrow E \overset{p}{\twoheadrightarrow} B$ una fibrazione con base B CW-complesso semplicemente connesso. Se indichiamo con B_p il p-scheletro di B e definiamo $\mathrm{H}^n_{(p)} := ker\ \mathrm{H}^n(E;R) \longrightarrow \mathrm{H}^n(p^{-1}(B_{p-1});R)$ otteniamo una filtrazione per $\mathrm{H}^n(E;R)$:

$$\mathrm{H}^n(E;R) =: \mathrm{H}^n_{(0)} \supseteq \mathrm{H}^n_{(1)} \supseteq \ldots\ldots \mathrm{H}^n_{(n-1)} \supseteq \mathrm{H}^n_{(n)} \supseteq \mathrm{H}^n_{(n+1)} = (0)$$

dove la banalità dei termini finali deriva ad esempio dal fatto che la coppia (B, B_n) è n-connessa ed essendolo per proprietà di fibrazione anche $(X, p^{-1}(B_n))$ la successione esatta per la coppia fornisce $\mathrm{H}^n(X;R) \cong \mathrm{H}^n(p^{-1}(B_n);R)$. Sotto l'ipotesi di semplice connessione per la base B (o in generale l'azione coomologica banale di $\pi_1(B)$ sulla coomologia della fibra tipica F) la seconda pagina della successione spettrale di Leray-Serre per la fibrazione è $E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p\big(B; \mathrm{H}^q(F;R)\big)$ e soprattutto sulla diagonale di peso totale n della pagina finale abbiamo:

$$E_\infty = \begin{bmatrix} E_\infty^{0,n} & & & & & \\ & E_\infty^{1,n-1} & & & & \\ & & E_\infty^{2,n-2} & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & E_\infty^{n-1,1} & \\ & & & & & E_\infty^{n,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{H}^n_{(0)}}{\mathrm{H}^n_{(1)}} & & & & & \\ & \frac{\mathrm{H}^n_{(1)}}{\mathrm{H}^n_{(2)}} & & & & \\ & & \frac{\mathrm{H}^n_{(2)}}{\mathrm{H}^n_{(3)}} & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & \frac{\mathrm{H}^n_{(n-1)}}{\mathrm{H}^n_{(n)}} & \\ & & & & & \mathrm{H}^n_{(n)} \end{bmatrix}$$

Su ogni pagina è anche presenta una struttura moltiplicativa; infatti, i prodotti cup della base e della fibra permettono di definire un nuovo prodotto sulla seconda pagina della successione spettrale (modulo un cambiamento di segno $(-1)^{p+q}$):

$$\mathrm{H}^p\big(B;\mathrm{H}^q(F;R)\big)\times\mathrm{H}^s\big(B;\mathrm{H}^t(F;R)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^{p+s}\big(B;\mathrm{H}^q(F;R)\otimes_R\mathrm{H}^t(F;R)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^{p+s}\big(B;\mathrm{H}^{q+t}(F;R)\big)$$

dove il primo morfismo usa il cup su B ed il secondo è il morfismo di coefficienti indotto dal cup su F. Il seguente teorema descrive la parziale compatibilità tra i cup sulle coomologie degli spazi F, B e E; va tenuto presente che la struttura di algebra di E_∞ non è in generale sufficiente a descrivere la struttura di anello $\mathrm{H}^*\big(E;R\big)$, neppure quando su ogni diagonale è presente un solo termine attivo: si deve prestare molta attenzione alla forma delle filtrazioni (si veda il calcolo di $\mathrm{H}^*(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z}_2)$ fatto in precedenza):

Teorema 2.2.1 (Struttura moltiplicativa) *Sia* $\mathrm{F} \hookrightarrow E \overset{p}{\twoheadrightarrow} B$ *una fibrazione con base B CW-complesso semplicemente connesso e sia $\big\{E_r, d_r\big\}_{r\geq 2}$ la corrispondente successione spettrale coomologica di Leray-Serre a coefficienti in un anello commutativo R; allora i prodotti cup della base e della fibra permettono di costruire un prodotto su ogni pagina, compresa E_∞:*

$$E_r^{p,q}\times E_r^{st} \longrightarrow E_r^{p+s,q+t}$$

soddisfacente le seguenti relazioni:

- $d_r(x\cdot y) = (d_r x)\cdot y + (-1)^{p+q}x\cdot d_r y$ *se* $x\in E_r^{p,q}$*;*
- *il prodotto in E_{r+1} è indotto da quello di E_r per passaggio al quoziente;*
- *se la coomologia della fibra F è addittivamente un R-modulo libero finitamente generato allora vale l'isomorfismo di R-algebre:*

$$E_2 \cong \mathrm{H}^*\big(B;R\big)\otimes_R\mathrm{H}^*\big(F;R\big)$$

- *il prodotto cup in $\mathrm{H}^n\big(E;R\big)$ si restringe per naturalità ad un prodotto $\mathrm{H}^m_{(p)}\otimes\mathrm{H}^n_{(q)} \longrightarrow \mathrm{H}^{m+n}_{(p+q)}$ e quindi ad un'operazione:*

$$\frac{\mathrm{H}^m_{(p)}}{\mathrm{H}^m_{(p+1)}}\otimes\frac{\mathrm{H}^n_{(q)}}{\mathrm{H}^n_{(q+1)}} \longrightarrow \frac{\mathrm{H}^{m+n}_{(p+q)}}{\mathrm{H}^{m+n}_{(p+q+1)}}$$

che coincide esattamente con la moltiplicazione:

$$E_\infty^{p,m-p}\otimes E_\infty^{q,n-q} \longrightarrow E_\infty^{p+q,m+n-p-q}$$

3 Bibliografia

[A] J.F. Adams: *On Chern characters and the structure of the unitary group*, Proc. Camb. Phil. Soc, vol. 57 (1961), pagg. 189-199.

[AH] M.F. Atiyah - F. Hirzebruch: *Analytic cycles on complex manifolds*, Topology, vol. 35, pagg. 25-45.

[DK] J.F. Davis - P. Kirk: *Lecture notes in algebraic topology*, Grad. Studies in Math., vol. 35.

[S] N.E. Steenrod: *Cohomology operations*, Annals of Math. Studies, vol. 50.