Osservazioni su categorie e categorie abeliane.

1. Ideologia: le proprietà di una categoria $\mathcal{C}$ sono "scritte" nella struttura di $Hom_{\mathcal{C}}(\cdot,\cdot)$, per esempio gruppi abeliani nel caso in cui $\mathcal{C}$ sia additiva. Non "vediamo" mai "all'interno" dei singoli oggetti di $\mathcal{C}$, per esempio non sono insiemi con omomorfismi particolari applicazioni (anche se è così negli esempi che abbiamo in mente).

2. "Problema": le dimostrazioni di risultati quali per esempio il lemma del serpente, fatte considerando un elemento e "inseguendo" immagini e controimmagini, non valgono perché gli oggetti di $\mathcal{C}$ "non hanno elementi".
Il lemma del serpente però vale in una qualsiasi categoria abeliana, per dimostrarlo usate prodotti e coprodotti fibrati.

3. Le categorie additive che considereremo hanno spesso strutture ulteriori e di conseguenza ci ~~vet~~ limiteremo a considerare funtori che rispettano queste strutture.
Un esempio: $\mathcal{C}$ categoria additiva è k-lineare, dove k è un campo, se $Hom_{\mathcal{C}}(\cdot,\cdot)$ è dotato di struttura di k-spazio vettoriale (compatibile con la struttura di gr. ab.!) la composizione di ~~f~~ morfismi è k-bilineare. Un funtore tra categorie k-lineari $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ è k-lineare se $Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \xrightarrow{F} Hom_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$ è un'applicazione k-lineare.

Terminologia

$\boxed{\mathcal{C} = \text{categoria abeliana}}$ Un complesso è

$$\to A_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n+1} \to \quad (n \text{ in un } \overset{\text{sotto}}{\text{insieme}} \text{ finito o infinito di } \mathbb{Z})$$

dove $d_n \circ d_{n-2} = 0$. – Il complesso è <u>esatto in A_n</u> se

$$\operatorname{coker}(d_{n-2}) \to \ker(d_n) \quad \text{è un \underline{isomorfismo}}.$$

- Il complesso è <u>esatto</u> se è esatto in ogni A_n del complesso.
- Una successione esatta corta è un complesso esatto

$$0 \to A \to B \to C \to 0 \qquad (*)$$

Un funtore $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ tra categorie abeliane è esatto se trasforma successioni esatte corte in succ. esatte corte,

è $\boxed{\text{esatto a sinistra}}$ se data $(*)$ succ. esatta corta

$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$$

è esatta (manca "$\to 0$" a destra, non è una svista!)

è $\boxed{\text{esatto a destra}}$ se data $(*)$ succ. esatta corta

$$F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$$

è esatta.

Esempio: sia $M \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ e $F_M : \mathcal{C} \to \mathcal{A}b \quad (\mathcal{A}b = \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}})$

il funtore $F_M(A) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, A) \qquad \underset{\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}{F_M(\varphi)} : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M,A) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M,B)$, $\quad f \mapsto \varphi \circ f$

Per definizione di ker, coker... F_M è esatto a sinistra. In generale (cioè per $\mathcal{C}, M$ generali) F_M <u>non</u> è esatto a destra. ~~Klar~~ Infatti

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C) \to 0$$

è esatta se e solo se $(*)$ <u>si spezza</u> cioè $B \stackrel{\sim}{=} A \oplus C$ con $(*)$ ovvia.

Terminologia

$\boxed{\text{DEF}}$ $\mathcal{C}$ = categoria abeliana. $P \in ob\,\mathcal{C}$ è proiettivo se data $(*)$ (esatta!)

$$Hom_{\mathcal{C}}(P, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(P, C) \to 0$$

è esatta (cioè $Hom_{\mathcal{C}}(P,B) \twoheadrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(P, C)$).

$\boxed{\text{Esempio:}}$ $\mathcal{C} = Mod_R$ moduli liberi sono proiettivi.
$\mathcal{C} = ab$ $\mathbb{Z}/(n)$ non è proiettivo: $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(n) \to 0$, $? \nearrow \mathbb{Z}/(n)$

$\boxed{\text{DEF}}$ $\mathcal{C}$ = categoria abeliana. $I \in ob\,\mathcal{C}$ è iniettivo se data $(*)$ (esatta!)

$$Hom_{\mathcal{C}}(B, I) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, I) \to 0$$

è esatta.

Esempio: $\mathcal{C} = ab$ $\quad \mathbb{Z}$ non è iniettivo $\left(0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(n) \to 0\right.$, $Id \downarrow$, $\mathbb{Z}$?

$\mathbb{Q}$ è iniettivo, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è iniettivo.

$\boxed{\text{DEF}}$ • $\mathcal{C}$ ha sufficienti proiettivi se dato $A \in ob\,\mathcal{C}$ esistono un proiettivo P e un epimorfismo (=suriezione) $P \twoheadrightarrow A$

• $\mathcal{C}$ ha sufficienti iniettivi se dato $A \in ob\,\mathcal{C}$ esistono un iniettivo I e un monomorfismo (=iniezione) $A \hookrightarrow I$

Esempio: • Mod_R ha sufficienti proiettivi e sufficienti iniettivi.

• Coh_X : se X è uno schema proiettivo e $\dim X > 0$ allora Coh_X non ha sufficienti proiettivi né iniettivi.

• $QCoh_X$: se X è come sopra, $QCoh_X$ non ha sufficienti proiettivi ma ha sufficienti iniettivi.

Categoria derivata

$\mathcal{A}$ = categoria abeliana

$C(\mathcal{A})$:= categoria dei complessi in $\mathcal{A}$, cioè:

Ob $C(\mathcal{A})$: complessi (infiniti a destra e a sinistra)

$A^\bullet \quad \to A^{-1} \xrightarrow{d_A} A^0 \xrightarrow{d_A} A^1 \to \dots \qquad A^i \in \mathcal{A} \quad d_A \circ d_A = 0$

Hom $C(\mathcal{A})$: morfismi di complessi

$$\begin{array}{ccccccc} A^\bullet & \to A^{-1} & \xrightarrow{d_A} & A^0 & \xrightarrow{d_A} & A^1 \to \\ f\downarrow & \downarrow f^{-1} & & f^0 \downarrow & & \downarrow f^1 \\ B^\bullet & \to B^{-1} & \xrightarrow{d_B} & B^0 & \xrightarrow{d_B} & B^1 \to \end{array} \qquad f \circ d_A = d_B \circ f$$

(composizione termine a termine)

Terminologia: $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ sono <u>omotopi</u> se esistono $\theta^i : A^i \to B^{i-1}$ tali che

$$\begin{array}{ccccccc} \to A^{-1} & \xrightarrow{d_B} & A^0 & \xrightarrow{d_A} & A^1 \to \dots \\ \swarrow & \theta \swarrow & \downarrow f^0 - g^0 & \theta \swarrow & \\ \to B^{-1} & \xrightarrow{d_B} & B^0 & \xrightarrow{d_B} & B^1 \to \end{array}$$

$$f^i - g^i = \theta^{i+1} \circ d_A + d_B \circ \theta^i$$

Omologia di $A^\bullet$: $H^q(A^\bullet) = \ker(A^q \to A^{q+1}) / \mathrm{Im}(A^{q-1} \to A^q)$
(Co)

Osservazione: $C(\mathcal{A})$ è una <u>categoria abeliana</u> (la struttura di gruppo abeliano su Hom $(A^\bullet, B^\bullet)$ è quella ovvia).
$H^q : C(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ è un funtore additivo.

Perché $C(\mathcal{A})$? Ricordiamo un buon motivo:

Ipotesi: $\mathcal{A}$ ha sufficienti iniettivi.
$F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ funtore additivo dove $\mathcal{A}'$ è una categoria abeliana.

Supponiamo che F sia <u>esatto a sinistra</u>.

I funtori derivati $R^qF : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ sono definiti così:

① sia $A \in \mathcal{A}$: $0 \to A \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \dots$
un complesso aciclico (cioè $H^q(\,) = 0 \ \forall q$) con $I^0, I^1, \dots$ iniettivi.

(esiste perché $\mathcal{A}$ ha sufficienti iniettivi) cioè una risoluzione iniettiva di A

② $R^qF(A)$ è la q-esima coomologia di $0 \to F(I^0) \to F(I^1) \to \dots$

$$\begin{array}{cccc} \deg & -1 & 0 & 1 & \dots \end{array}$$

③ $R^qF(A)$ è definito a meno di isomorfismo perché vale:

se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ e

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \to & A & \to & I^0 & \to & I^1 & \to \dots \\ & \downarrow f & & \downarrow f^0 & & \downarrow f^1 & \\ 0 \to & B & \to & J^0 & \to & J^1 & \to \dots \end{array}$$

risol. iniettive di A e B

esistono $f^0, f^1, \dots$ in modo che $(*)$ sia un morfismo di complessi, e in più $F : I^\bullet \to J^\bullet$ è ben definito a meno di omotopia.

La categoria derivata $D(\mathcal{A})$:

DEF Un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$ è un quasi-isomorfismo se $H^q(f) : H^q(A^\bullet) \to H^q(B^\bullet)$ è un isomorfismo $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Passo intermedio: La categoria (additiva) $K(\mathcal{A})$ dei complessi modulo omotopia:

$\mathrm{Ob}\, K(\mathcal{A}) = \mathrm{Ob}\, C(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hom}\, K(\mathcal{A})$: $A^\bullet, B^\bullet \in \mathrm{Ob}\, K(\mathcal{A})$ $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) := \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) / Ht(A^\bullet, B^\bullet)$

dove $Ht(A^\bullet, B^\bullet) := \{ f : A^\bullet \to B^\bullet \mid f \text{ omotopo a } 0 \}$

Definiamo $D(\mathcal{a})$ così:

- $\mathrm{Ob}\, D(\mathcal{a}) = \mathrm{Ob}\, C(\mathcal{a}) = \mathrm{ob}\, K(\mathcal{a})$

- $\mathrm{Hom}\, D(\mathcal{a})$: $A^\bullet, B^\bullet \in \mathrm{ob}\, D(\mathcal{a})$ $\quad \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{a})}(A^\bullet, B^\bullet) =$ classi di equivalenza di diagrammi

$$\begin{tikzcd} & X^\bullet \arrow[dl, "f"', "qis"] \arrow[dr, "g"] & \\ A^\bullet & & B^\bullet \end{tikzcd}$$

f, g morfismi di complessi

f è un quasi-isomorfismo

(pensiamo che corrisponde a $g \cdot f^{-1}$ - vogliamo invertire tutti i quasi-isomorfismi).

- da definire l'equivalenza; dati

$$\begin{tikzcd} & X^\bullet \arrow[dl, "f"'] \arrow[drr, "g"] & Y^\bullet \arrow[dll, "h"'] \arrow[dr, "m"] & \\ A^\bullet & & & B^\bullet \end{tikzcd}$$

> Osservazione: in generale un qis non ha inversa in $C(\mathcal{a})$ né in $K(\mathcal{a})$.
>
> Esempio
> $$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot n"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "qis"] & 0 \\ \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/(n) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
> non ha inversa

- con f e h q.i.s. diciamo che sono equivalenti se esiste diagramma commutativo in $K(\mathcal{a})$ (cioè commuta a meno di omotopia)

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddl, bend right=60, "qis"'] & \\ X^\bullet \arrow[d, "qis"] \arrow[drr] & & Y^\bullet \arrow[dll, "qis"'] \arrow[d] \\ A^\bullet & & B^\bullet \end{tikzcd}$$

Da verificare che:

① Quella definita è una relazione di equivalenza

② Possiamo definire la composizione di morfismi

③ La categoria $D(\mathcal{A})$ è additiva (<u>non è abeliana</u> in generale)

~~Una~~ <u>Referenze</u>: D. Huybrechts: "Fourier-Mukai Transforms in Algebraic Geometry"

M. Kashiwara-P. Schapira: "Categories and sheaves"

~~F~~.I. Gelfand-Y.I. Manin: "Methods of Homological Algebra".

Si considerano anche:

$D^{\pm}(\mathcal{A})$: categoria derivata ottenuta "a partire da" $C^{\pm}(\mathcal{A})$ = complessi

$\cdots 0 \to 0 \to A^q \to A^{q+1} \to \cdots$ $\quad C^+$ (limitati a sin.)

$\cdots \to A^{q-1} \to A^q \to 0 \to 0$ $\quad C^-$ (limitati a destra)

$D^b(\mathcal{A})$: categoria derivata ottenuta "a partire da" $C^b(\mathcal{A})$ = complessi

$\to 0 \to A^q \to \cdots A^{q+n} \to 0 \to \cdot$ $\quad$ limitati a destra <u>e</u> a sin.

Supponiamo che $\mathcal{A}$ abbia sufficienti iniettivi.

Sia $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ la sottocategoria <u>additiva</u> degli oggetti iniettivi

$K^+(\mathcal{I})$ = categoria dei complessi $\cdots 0 \to I^q \to I^{q+1} \to \cdots$ limitati a sinistra con I^n <u>iniettivi</u>, morfismi = morfismi di complessi modulo omotopia.

Si dimostra che ~~l'inclusione~~ il funtore additivo.

$$K^+(\mathcal{I}) \to D^+(\mathcal{A})$$

è una <u>equivalenza</u>.
(Siccome $\mathcal{A}$ ha sufficienti iniettivi il contenuto dell'affermazione è che i morfismi in $D^+(\mathcal{A})$ tra complessi iniettivi sono "veri" morfismi di complessi a meno di omotopia).

$\boxed{\text{Un esempio.}}$ $\mathcal{A} = \mathcal{A}b$ = categoria dei gruppi abeliani.
$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sono oggetti iniettivi. Sia $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ l'applicazione quoziente: è un epimorfismo in $\mathcal{A}$. Possiamo considerare $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ come complessi iniettivi concentrati in deg=0, quindi in $K^+(\mathcal{I})$.

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Dimostriamo che $(*)$ <u>non</u> è un <u>epimorfismo di complessi</u>.
Infatti

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & A^\bullet \arrow[d, "f"] \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & B^\bullet \arrow[d, "g"] \\ \cdots \arrow[r] & \mathbb{Q} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots & C^\bullet \end{tikzcd}$$

La composizione $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{K^+(\mathcal{I})}(A^\bullet, C^\bullet)$ è $= 0$ perchè è omotopa a $\underline{0}$ (l'omotopia è tratteggiata).

D'altra parte $g \not\simeq 0$ (non è omotopa a 0) perchè siccome $\mathrm{Hom}_{\mathcal{ab}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = 0$ ~~se~~ se $g \simeq 0$ allora $g = 0$ (in $C(\mathcal{ab})$) ma $g \neq 0$ in $C(\mathcal{ab})$. Siccome $g \circ f = 0$ ma $g \neq 0$

f non è un epimorfismo.

Categorie triangolate.

$D(\mathcal{A})$ in generale non è una categoria abeliana e quindi non ha senso parlare di successioni esatte in $D(\mathcal{A})$. Esiste una nozione che "sostituisce" le successioni esatte (triangoli distinti) - la struttura aggiuntiva su $D(\mathcal{A})$ è un esempio (l'esempio?) di categoria triangolata.

"Motivazione": $C(\mathcal{A})$ è una categoria abeliana: sia

$$0 \to A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \to 0 \qquad (*)$$

una successione esatta di complessi. Il lemma del serpente dà una successione esatta lunga in $\mathcal{A}$:

$$\cdots \to H^p(A^\bullet) \to H^p(B^\bullet) \to H^p(C^\bullet) \to H^{p+1}(A^\bullet) \to \cdots \qquad (+)$$

Vorremmo che $(*)$ definisse una successione esatta in $D(\mathcal{A})$; non ha senso (in generale) ma otterremo un complesso in $D(\mathcal{A})$ che "ricorda" $(+)$.

Per definire i triangoli distinti dobbiamo prima definire il "mapping cone" di un morfismo $f: A^\bullet \to B^\bullet$ di complessi.

$Mc(f) = D^\bullet$ è il complesso definito così:

$$D^i = A^{i+1} \oplus B^i \qquad \begin{aligned} D^i = A^{i+1} \oplus B^i &\xrightarrow{d_D} D^{i+1} = A^{i+2} \oplus B^{i+1} \\ (a, b) &\longmapsto (-d_A(a), f(a) + d_B(b)) \end{aligned}$$

(Ho introdotto gli elementi di A^i, B^i etc., concedetemelo ...)

Si verifica subito che $d_D \circ d_D = 0$ (notate il segno)

Collegamento con (*): se f è come in (*) possiamo definire

$$\begin{aligned} Mc(f) &\xrightarrow{\theta} C^{\bullet} \\ A^{i+1}\oplus B^{i} &\longrightarrow C^{i} \\ (a,b) &\longmapsto g(b) \end{aligned}$$

θ è un morfismo di complessi e si verifica che è un quasi-isomorfismo: notate che però in generale θ non è invertibile né in $C(a)$ né in $K(a)$ (in $D(a)$ lo è per "decreto").

Abbiamo un morfismo di complessi

$$\begin{aligned} B^{\bullet} &\xrightarrow{\tau} Mc(f) \\ B^{i} &\longrightarrow A^{i+1}\oplus B^{i} \\ b &\longmapsto (0,b) \end{aligned}$$

Abbiamo anche un morfismo di complessi $Mc(f) \xrightarrow{\pi} A^{\bullet}[1]$ dove $A^{\bullet}[n]$ è il complesso: $A[n]^{i} := A^{n+i}$ (spostiamo $A^{\bullet}$ n passi a sinistra)

$$\begin{aligned} Mc(f) &\xrightarrow{\pi} A^{\bullet}[1] \\ A^{i+1}\oplus B^{i} &\longrightarrow A^{i+1} \\ (a,b) &\longmapsto a. \end{aligned}$$

Ora :

- La composizione $\pi \circ \tau = 0$ in $C(a)$.

- La composizione $\tau \circ f = 0$ in $K(a)$ (non in $C(a)$ in generale!)

L'omotopia di $\tau \circ f$ è Θ : $\quad (\tau \circ f(a) = (0, f(a)))$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "\tau\circ f"'] & A^{i} \arrow[r, "d_A"] \arrow[dl, "\Theta"'] \arrow[d, "\tau\circ f"] & A^{i+1} \arrow[r] \arrow[dl, "\Theta"'] \arrow[d, "\tau\circ f"] & \dots \\
& A^{i} \oplus B^{i-1} \arrow[r, "d_D"] & A^{i+1} \oplus B^{i} \arrow[r, "d_D"] & A^{i+2} \oplus B^{i+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

$\Theta(a) := (a, 0)$ infatti $\begin{cases} \tau \circ f(a) = (0, f(a)) \\ \Theta \circ d_A(a) + d_D \circ \Theta(a) = (d_A(a), 0) + (-d_A(a), f(a)) \end{cases}$

$\boxed{\text{DEF}}$ Il diagramma

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{\tau} Mc(f) \xrightarrow{\pi} A^\bullet[1]$$

è un <u>triangolo distinto in $D(a)$</u>.

<u>Oss.</u> Abbiamo verificato che $\tau \circ f = 0$ e $\pi \circ \tau = 0$ in $K(a)$ e quindi anche in $D(a)$.

Gli assiomi di una categoria triangolata

$\mathcal{D}$ = categoria additiva

$T: \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ equivalenza di categorie (funtore di traslazione)

Notazione: $A \in \mathcal{D}$ $T^k(A) = A[k]$ $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A,B)$ $T^k(f) = f[k]$.

Terminologia: • Un triangolo in $\mathcal{D}$ è un diagramma di morfismi

$$A \to B \to C \to T(A) = A[1]$$

• Un morfismo di triangoli è un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & T(A) \arrow[d] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & T(A') \end{tikzcd}$$

(è un isomorfismo se i morfismi verticali sono isomorfismi)

$\boxed{\text{Assiomi}}$ Una categoria additiva con traslazione è una $\boxed{\text{categoria triangolata}}$ dotata di una famiglia di triangoli - i triangoli distinti (t.d.) - tali che valgano TR0-TR5:

TR0 Un triangolo isomorfo a un t.d. è un t.d.

TR1 Il triangolo $A \xrightarrow{\mathrm{Id}} A \to 0 \to A[1]$ è distinto

TR2 Dato $A \xrightarrow{f} B$ esiste un t.d. $A \xrightarrow{f} B \to C \to A[1]$.

TR3 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$ è un t.d. $\Leftrightarrow$ $B \xrightarrow{+g} C \xrightarrow{+h} A[1] \xrightarrow{-f[1]} B[1]$

TR4 Se abbiamo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, dotted, "\gamma"] & A[1] \arrow[d, "\alpha[1]"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & A'[1] \end{tikzcd}$$

con righe t.d. e $f' \circ \alpha = \beta \circ f$ esiste γ che dà morfismo di t.d.

TR5 (Assioma dell'ottaedro) Consultate <u>Gelfand-Manin</u> oppure <u>Kashiwara-Shapira</u>

Si dimostra che se $\mathcal{A}$ = categoria abeliana

$\mathcal{D} = D(\mathcal{A})$ $\quad T : D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A})$ definito da $T(A^\bullet) = A^\bullet[1]$

$\boxed{\text{e triangoli distinti dati dal "mapping cone"}}$ $T(f) = f[1]$

allora sono soddisfatti TR0-TR5, cioè la categoria derivata è un esempio di categoria triangolata.

Osservazione: Per TR3 ogni t.d. appartiene a una "elica" (infinita) - ricorda qualcosa?

$$\cdots \to C[-1] \xrightarrow{h[-1]} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1] \xrightarrow{-f[1]} B[1] \xrightarrow{-g[1]} C[1] \xrightarrow{h[1]} A[2] \to \cdots$$

(non sono sicurissimo sui segni: da considerare che

$$A \xrightarrow{\varepsilon_1 f} B \xrightarrow{\varepsilon_2 g} C \xrightarrow{\varepsilon_3 h} A[1]$$

con $\varepsilon_i = \pm 1$ è isomorfo a $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$ se $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 = 1$) in cui <u>ogni</u> ~~due~~ "tetra" sottodiagramma è un t.d.

<u>Esempio/esercizio</u>: $(\mathcal{D}, T)$ categoria triangolata, $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$ triangolo distinto. Allora dato $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ la successione (di gruppi abeliani)

$$\cdots \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, C[-1]) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, A[1]) \to$$

è esatta.

① Per l'osservazione p.35 è sufficiente verificare che

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,C) \qquad (+)$$

è esatta.

② La composizione di due morfismi consecutivi nell'<u>elica</u> di p.35 è $=0$: segue da TR1 e TR4

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\gamma"] & A[1] \arrow[d, "\mathrm{Id}[1]=\mathrm{Id}"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & A[1] \end{tikzcd}$$

t.d. per TR1

Per TR4 esiste γ che rende un morfismo di t.d.
Segue che $g \circ f = 0$. Questo dimostra che $(+)$ è un complesso.

③ Sia $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,B)$ tale che $g \circ \alpha = 0$. Da dimostrare: esiste $\tilde{\alpha} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,A)$ tale che $\alpha = f \circ \tilde{\alpha}$.

Per TR1, TR3 e TR4 esiste un morfismo di t.d.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\tilde{\alpha} := \gamma"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & X[1] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma[1] = \gamma'"] & X[1] \arrow[d, "\alpha[1]"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, "h"] & A[1] \arrow[r] & B[1] \end{tikzcd}$$

(nel rettangolo tratteggiato, TR4 dà l'esistenza di γ', e poniamo $\gamma := \gamma'[-1]$).

$\boxed{\text{DEF}}$ $\mathcal{Q}$ = categoria abeliana: $X, Y \in \mathrm{ob}\,\mathcal{Q}$, siano $\underline{X}, \underline{Y} \in \mathrm{ob}\,\mathbf{D}(\mathcal{Q})$ i complessi concentrati in deg$=0$ $\to 0 \to X \to 0 \to \cdots$, $\to 0 \to Y \to 0 \to \cdots$

$\mathrm{Ext}^k(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{Q})}(\underline{X}, \underline{Y}[k])$. Si dimostra che c'è un isomorfismo naturale di $\sim$ con il "solito" $\mathrm{Ext}^k(X,Y)$.

Ora potete leggere l'"esercizio" di A. Maffei: $\mathbf{D}(\mathcal{Ab})$ <u>non</u> è categoria abeliana.

DEF Siano $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ categorie triangolate, con funtori di traslazione $T: \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ e $T': \mathcal{D}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'$. Un <u>funtore esatto</u> $F: \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ è un funtore additivo tale che:

① Esiste un isomorfismo di funtori $T' \circ F \xrightarrow{\sim} F \circ T$

② Se $A \to B \to C \to A[1]$ è un t.d. di $\mathcal{D}$ allora

$$F(A) \to F(B) \to F(C) \to F(A[1]) \cong F(A)[1]$$

è un triangolo distinto di $\mathcal{D}'$.

F è una <u>equivalenza di categorie triangolate</u> se oltre a essere un funtore esatto è una equivalenza di categorie.

<u>Oss.</u> Sia $F: \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ una equivalenza di categorie triangolate e $G: \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ funtore tale che

$$G \circ F \cong Id_{\mathcal{D}} \qquad F \circ G \cong Id_{\mathcal{D}'}$$

Allora G manda t.d. di $\mathcal{D}'$ in t.d. di $\mathcal{D}$

(applicate gli assiomi TR... insieme al risultato: se in un morfismo di t.d.

$$\begin{array}{ccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & A[1] \\ \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \alpha[1]\downarrow \\ A' & \to & B' & \to & C' & \to & A'[1] \end{array}$$

α e β sono isomorfismi allora anche γ lo è

suggerimento: estendete aggiungendo $\begin{array}{c} B[1] \\ \beta[1]\downarrow \\ B'[1] \end{array}$, applicate $Hom(X, \cdot)$ con $X \in \mathcal{D}$ arbitrario, invocate l'Es./eserc. p. 35 e applicate il "Lemma del 5", per il Lemma di Yoneda segue che γ è un isomorfismo)

D-equivalenza

Un risultato degli anni 60

Teorema (Peter Gabriel)

Siano X, Y schemi Noetheriani. Se le categorie abeliane $Coh(X)$, $Coh(Y)$ dei fasci coerenti su X e Y sono equivalenti allora X è isomorfo a Y.

Ricordiamo: se X è uno schema $D^b(X) \subset D(Coh X)$ è la sottocategoria triangolata dei complessi limitati

D'altra parte negli anni 80 Mukai ha dimostrato:

Teorema (Shigeru Mukai)

Sia A una varietà abeliana e $\hat{A} = Pic^0(A)$: esiste una equivalenza di categorie triangolate $D^b(A) \xrightarrow{\sim} D^b(\hat{A})$.

Quindi varietà non isomorfe possono avere categorie derivate (limitate) equivalenti. Notate che una varietà abeliana ha fibrato canonico banale

DEF $X, Y/k$ sono D-equivalenti se $D^b(X), D^b(Y)$ sono equivalenti come categorie triangolate k-lineari

Teorema (Bondal, Orlov, 2001)

Siano X, Y varietà proiettive lisce. Supponiamo che il fibrato canonico di X si ampio o anti-ampio (K_X^{-1} ampio). Se le categorie triangolate $D^b(X)$ e $D^b(Y)$ sono equivalenti allora $X \cong Y$.

Osservazione. ~~Questa~~ Nei teoremi di Mukai e Bondal-Orlov si ~~dabba~~ assume che A, X, Y sono definiti su un campo k e che l'equivalenza esatta F sia k-lineare, cioè $Hom_{D^b(A)}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} Hom_{D^b(\hat{A})}(F(\mathcal{E}^\bullet), F(\mathcal{F}^\bullet))$ sia k-lineare e similmente per Bondal-Orlov

<u>Morale</u>: Teoremi del tipo Mukai esistono per superfici K3 e in generale con canonico banale; MIRROR SYMMETRY!

Come si dimostra il Teorema di Mukai (e altri simili)?

Supponiamo che Y, Z siano schemi proiettivi lisci,

$$\begin{tikzcd} & Y\times Z \arrow[dl, "\pi_Y"'] \arrow[dr, "\pi_Z"] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

proiezioni.

Sia $P^\bullet \in D^b(Y\times Z)$: si definisce un funtore esatto

$$\Phi_{P^\bullet} : D^b(Y) \to D^b(Z)$$

~~così~~ componendo:

① $\pi_Y^*: D^b(Y) \to D^b(Y\times Z)$
$\mathcal{E}^\bullet \longmapsto \pi_Y^*\mathcal{E}^\bullet$

Non ci sono problemi a definire il "pull-back" in questo modo perché π_Y è piatto.

② $D^b(Y\times Z) \to D^b(Y\times Z)$
$\mathcal{F}^\bullet \longmapsto \mathcal{F}^\bullet \otimes^L P^\bullet$ ⟵ ?

Siccome $Y\times Z$ è liscio esistono $\mathcal{F}^\bullet \to A^\bullet$ e $P^\bullet \to B^\bullet$ quasi isom. con $A^\bullet$ e $B^\bullet$ complessi limitati di fasci <u>localmente liberi</u>

$\mathcal{F}^\bullet \otimes^L P^\bullet := A^\bullet \otimes B^\bullet$ dove

$$(A^\bullet\otimes B^\bullet)^n := \bigoplus_{i+j=n} A^i \otimes B^j \quad \text{e} \quad d^n_{A^\bullet\otimes B^\bullet} = d_{A^\bullet}\otimes 1_{B^\bullet} + (-1)^n 1_{A^\bullet}\otimes d_{B^\bullet}$$

Il punto: se <u>non</u> passiamo a complessi di fasci loc. liberi <u>non</u> è vero che se $\mathcal{F}^\bullet$ è qis a $\mathcal{G}^\bullet$ allora $\mathcal{F}^\bullet\otimes\mathcal{M}^\bullet$ è qis a $\mathcal{G}^\bullet\otimes\mathcal{M}^\bullet$!

③ $\pi_{Z,*} : D^b(Y\times Z) \to D^b(Z)$ definita così:

dato $\mathcal{E}^\bullet \in \mathrm{ob}\, D^b(Y\times Z)$ sia $\mathcal{E}^\bullet \to \mathcal{I}^\bullet$ qis dove $\mathcal{I}^\bullet$ è un complesso di iniettivi (fasci quasi-coerenti) e ora $\mathcal{I}^\bullet$ è limitato solo a sinistra, $\mathcal{I}^\bullet \in \mathrm{ob}\, D^+(Y\times Z)$.

Ora il complesso $\pi_{Z,*}(\mathcal{I}^\bullet) : 0 \to \cdot \to \pi_{Z,*}(\mathcal{I}^n) \to \pi_{Z,*}(\mathcal{I}^{n+1}) \to \cdot$ è in $D^+(\mathrm{QCoh}\, Z)$ e inoltre i fasci di coomologia sono coerenti e nulli in grado $\gg 0$ (perché Z è proiettivo). La sottocategoria di $D^+(\mathrm{QCoh}\, Z)$ i cui oggetti hanno tale proprietà è equivalente a $D^b(\mathrm{Coh}\, Z)$ (vedi Huybrechts) e quindi

$$\begin{array}{ccc} D^b(Y\times Z) & \xrightarrow{\pi_{Z,*}} & D^b(Z) \\ \mathcal{I}^\bullet & \longmapsto & \pi_{Z,*}(\mathcal{I}^\bullet) \end{array}$$

Ora

$$\Phi_{P^\bullet}(\mathcal{E}^\bullet) := \pi_{Z,*}\left(\pi_Y^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^L P^\bullet\right)$$

Perché $\Phi_{P^\bullet}$ è esatto? Immagino perché i triangoli distinti di $D^b(X)$ sono definiti via il "mapping cone" e i tre funtori definiti sopra commutano con il "mapping cone".

$\Phi_{P^\bullet}$ è una trasformata di Fourier-Mukai

$\boxed{\text{PROP}}$ (Bondal, Orlov) Y, Z varietà proiettive lisce$/k$, $k=\bar{k}$.
$P^\bullet \in ob\, D^b(Y\times Z)$: $\Phi_{P^\bullet}$ è pienamente fedele* se e solo se:

dati $y, y' \in Y$ (punti chiusi) si ha

$$\mathrm{Hom}_{D^b(Z)}(\Phi_{P^\bullet}(k(y)), \Phi_{P^\bullet}(k(y'))[i]) = \begin{cases} k & \text{se } y=y' \text{ e } i=0 \\ & \text{oppure} \\ 0 & \text{se } y\neq y', \text{ o } i<0 \\ & \text{oppure } i>\dim Y. \end{cases}$$

$\boxed{\text{PROP}}$ (Bridgeland).

Ipotesi come sopra (e quindi $\Phi_{P^\bullet}$ è pienamente fedele).
Allora $\Phi_{P^\bullet}$ è una equivalenza (k-lineare) di categorie triangolate se e solo se

$$\Phi_{P^\bullet}(k(y)) \otimes^L \underbrace{K_Z}_{\substack{\text{complesso}\\ \text{concentrato in } 0}} \cong \Phi_{P^\bullet}(k(y)) \quad \forall y \in Y.$$

Nota: se $K_Z \cong \mathcal{O}_Z$ l'ipotesi in più di Bridgeland è vuota.

Dimostrazione del Teorema di Mukai: $D^b(A)$ equiv. a $D^b(\hat{A})$.
(A = varietà abeliana).

Sia $P^\bullet$ = fibrato di Poincaré$^+$ su $A\times\hat{A}$.
Allora $\Phi_{P^\bullet}: D^b(A) \to D^b(\hat{A})$ è una equivalenza per la Prop. di Bondal-Orlov insieme al noto Teorema: se $\mathcal{O}_A \neq L \in Pic^0(A)$ allora $H^i(L)=0$ $\forall i$.

---

* Un funtore $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è pienamente fedele se $\forall X, Y \in \mathcal{A}$
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),F(Y))$ è una biiezione.

$^+$ Ecco perché la P!

$\boxed{k = \mathbb{C}}$

<u>Esempio</u> $S = K3$ proiettiva. Sia M uno spazio di moduli di fasci $\mathcal{O}_S(1)$-semistabili che soddisfa a:

① ogni fascio parametrizzato da M è <u>stabile</u> (non semistabile non-stabile)

② $\dim M = 2$.

③ M è uno spazio di moduli fine cioè esiste un fascio tautologico

$$\begin{array}{c} F \\ \downarrow \\ S \times M \end{array}$$

(Lo indico così perché segue da ①-② che ogni fascio parametrizzato da M è localmente libero, quindi F è un fibrato vettoriale.)

Allora (considerando F come complesso concentrato in deg=0)

$$\Phi_F : D^b(M) \to D^b(S)$$

è una equivalenza k-lineare esatta di categorie triangolate.

Perché?

(I) Mukai: M è una K3, in particolare $K_M \sim \mathcal{O}_M$ e perciò per Bridgeland è sufficiente verificare che vale l'ipotesi della Prop. di Bondal-Orlov.

(II) Se $p \in M$ rappresenta il fascio E $\Phi_F(p) = E$ (complesso concentrato in deg=0)
L'ipotesi di Bondal-Orlov è verificata perché siccome $\dim M = 2$
$\chi(E,E) = h^0(E,E) - \underbrace{h^1(E,E)}_{=2} + h^2(E,E) = h^0(E,E) - h^1(E,E) + \underbrace{h^0(E,E)}_{\text{Dualità di Serre}} = 0$

Ora se $E_1 \not\cong E_2$ segue che

$\boxed{\text{Notazione: } h^i(A,B) := \dim \mathrm{Ext}^i(A,B)}$

$$0 = \chi(E,E) = \chi(E_1,E_2) = h^0(E_1,E_2) - h^1(E_1,E_2) + h^2(E_1,E_2) =$$
$$= h^0(E_1,E_2) - h^1(E_1,E_2) + h^0(E_2,E_1)$$

Siccome $E_1 \not\cong E_2$, E_1 e E_2 sono stabili e con polinomi di Hilbert uguali segue che $h^0(E_1,E_2) = 0$.

Quindi $h^1(E_1,E_2) = 0$. Questo dimostra che se $p_1 \neq p_2 \in M$ allora $\mathrm{Hom}_{D^b(S)}(\Phi_F(\mathbb{C}(p_1)), \Phi_F(\mathbb{C}(p_2))[i]) =$

$$= \mathrm{Ext}^i(E_1, E_2) = 0.$$

Inoltre la condizione per $p_1 = p_2$ è verificata perché ogni $[E] \in M$ è stabile. $\square$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Richiamo: se } S \text{ è una superficie proiettiva } T(S) \subset H^2(S;\mathbb{Z})/\mathrm{Tors} \text{ è} \\ T(S) := H^{1,1}_{\mathbb{Z}}(S)^{\perp} \quad T(S)_{\mathbb{C}} := T(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}\end{array}}$

<u>Teorema</u> (Mukai + Orlov + ...)

Siano S, S' superfici K3 proiettive/$\mathbb{C}$.
Allora $D^b(S)$ è equivalente come categoria triangolata ($\mathbb{C}$-lineare) a $D^b(S')$ se e solo se esiste una isometria integrale

$$T(S)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} T(S')_{\mathbb{C}}$$

che è anche un isomorfismo di strutture di Hodge.

<u>Oss.</u> Esistono coppie S, S' di K3 proiettive/$\mathbb{C}$ tali che $T(S)_{\mathbb{C}} \cong T(S')_{\mathbb{C}}$ ma $H^2(S) \not\cong H^2(S')$ e quindi $S \not\cong S'$.

Osservazione $S = K3$ proiettiva, M = spazio di moduli di fasci $\mathcal{O}_S(1)$-stabili su S tale che valgano ① e ② di p. 42.
In generale non vale ③, cioè non esiste un fascio tautologico su $S \times M$.

Esempio concreto: $S \subset \mathbb{P}^5$ $K3$ di genere $= 5$, $\boxed{\text{generica}}$, quindi

$$|I_S(2)| \cong \mathbb{P}^2.$$

Il divisore $B \subset |I_S(2)|$ delle quadriche singolari è una sestica liscia; sia $M \to |I_S(2)|$ il rivestimento doppio ramificato sopra B. Si dimostra che

$$M \cong \left\{ \begin{matrix} E \\ \downarrow \\ S \end{matrix} \;\middle|\; E \text{ è } \mathcal{O}_S(1)\text{-semistabile, } \begin{matrix} \mathrm{rg}\,E = 2 & \det E \cong \mathcal{O}_S(1) \\ c_2(E) = 4 & \end{matrix} \right\} \Big/ \text{equiv.}$$

e che ogni tale fascio è stabile (e localmente libero).
Però non esiste un fascio tautologico. Infatti se esistesse allora $T(S)_{\mathbb{Q}} \cong T(M)_{\mathbb{Q}}$ ma questo è impossibile se $h^{1,1}_{\mathbb{Z}}(S) = 1$ perché il discriminante della forma d'intersezione è

$= -8$ per $T(S)$

$= -2$ per $T(M)$.

Se siamo in questa situazione esiste una classe in $\alpha \in H^2(\mathcal{O}_M^*)$ (di torsione) che è l'ostruzione all'esistenza di un fascio tautologico. Seguendo Căldăraru si definisce la categoria (abeliana) dei fasci coerenti α-twistati su M e la sua categoria derivata $D^b(M, \alpha)$. Si definisce un'equivalenza di categorie triangolate $D^b(M,\alpha) \xrightarrow{\sim} D^b(S)$. In questo modo

Huybrechts & Stellari hanno dimostrato un'analogo del

Teorema di Mukai + Orlov; non diamo la formulazione

precisa, menzioniamo solo che si tratta di un criterio

di "tipo Hodge" per l'esistenza di una equivalenza

$D^b(S,\alpha) \xrightarrow{\sim} D^b(S',\alpha')$ dove $\alpha \in H^2(\mathcal{O}_S^*)$, $\alpha' \in H^2(\mathcal{O}_{S'}^*)$ sono

classi di torsione.

Una domanda.

Premessa (Beauville - Donagi).

Sia $Y \subset \mathbb{P}^5$ una ipersuperficie liscia. $/\mathbb{C}$. Sia

$$X = F(Y) := \{ L \subset Y \mid L \text{ retta} \} \subset Gr(1, \mathbb{P}^5).$$

Allora X è una deformazione di

$$S^{[2]} := \{ Z \subset S \mid \underset{\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathcal{O}_Z)}{\overset{\shortparallel}{\ell(\mathcal{O}_Z)}} = 2 \}$$

dove S è una superficie K3: X è una cosidetta varietà Hyperkähler (HK). Come procedono Beauville - Donagi? Dimostrano che se Y è una cubica Pfaffiana generica allora $X \cong S^{[2]}$ per una certa K3 associata a Y nel modo seguente:
Sia V uno spazio vettoriale complesso di dim$=6$, quindi $\mathbb{P}^5 \cong \mathbb{P}(V)$. Sia

$$A \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V^\vee) \cong \mathbb{P}^{14}$$

un sottospazio lineare, $\dim A = 5$. Sia $D \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V^\vee)$ l'ipersuperficie delle forme antisimmetriche degeneri; $\deg D = 3$ (Pfaffiano).
Se A è generica

$$Y := A \cap D \subset A \cong \mathbb{P}^5$$

è una ipersuperficie cubica liscia: viceversa ogni ipersuperficie Pfaffiana è descritta così. Consideriamo $A^\perp \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, uno spazio lineare di dim$=8$. L'intersezione

$$S := A^\perp \cap \underbrace{Gr(2, V)}_{\overset{\shortparallel}{D^\vee}} \subset A^\perp \cong \mathbb{P}^8$$

è una K3 di genere 8 (di più: la generica K3 di genere 8 si può scrivere così). Beauville-Donagi dimostrano:

$$F(Y) \cong S^{[2]}.$$

Inoltre B-D dimostrano che se Y è liscia arbitraria esiste un isomorfismo naturale

$$H^4_{pr}(Y) \xrightarrow{\sim} H^2_{pr}(X) \qquad (*)$$

definito così: sia $\Gamma \subset Y \times X$ il ciclo di incidenza

$$\Gamma := \{(p, L) \mid p \in L\}$$

e
$$\begin{tikzcd} & \Gamma \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ Y & & X \end{tikzcd}$$
le proiezioni (π ha fibra generica una curva di genere $=4$, ρ è la proiettificazione di un fibrato vett. di rg$=2$).

L'isomorfismo $(*)$ è dato da

$$H^4_{pr}(Y) \xrightarrow{\rho_* \circ \pi^*} H^2_{pr}(X)$$
$$\alpha \longmapsto \rho_*(\pi^* \alpha).$$

<u>Oss.</u> Da $(*)$ si vede facilmente che se Y è (molto) generica allora non esiste una K3 T tale che $X(Y) \cong T^{[2]}$.

<u>Domande</u>. Cosa succede se applichiamo $\rho_* \circ \pi^*$ a $D^b(Y)$?

- La congettura di Kuznetsov equivale a una congettura formulata in termini di $H^4(Y)$?

Le domande sono motivate dai risultati su $D^b(K3)$.