Ipersuperfici cubiche in $\mathbb{P}^5$: categoria derivata e razionalità

(secondo Kuznetsov)

10 Dicembre 2009

K. O'Grady

Nota: il campo base è $\mathbb{C}$

I. Il problema.

Sia $Y \subset \mathbb{P}^n$ una ipersuperficie cubica liscia:

(a) se $n=2$ Y è una curva di genere 1, non (uni)razionale. (Eulero ?)

(b) se $n=3$ Y è una superficie razionale (Cayley ?)

(c) se $n \geq 4$ Y è unirazionale

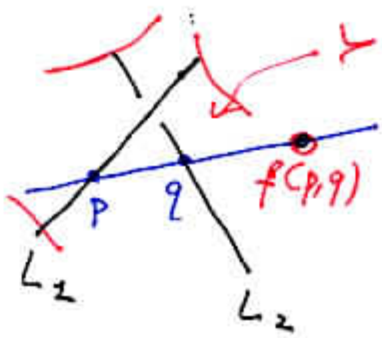
(d) se $n=4$ Y non è razionale (Clemens-Griffiths)

Ricordiamo velocemente come si dimostrano (b), (c), (d):

$\boxed{\text{dim. di (b)}}$: Y contiene rette sghembe L_1 e L_2. L'applicazione

$$L_1 \times L_2 \overset{f}{\dashrightarrow} Y$$
$$(p,q) \longmapsto (\langle p,q\rangle \cap Y \setminus \{p,q\})$$

è birazionale perché $\deg Y = 3$ e per $r \in (\mathbb{P}^3 \setminus L_1 \setminus L_2)$ passa una e una sola retta incidente L_1 e L_2

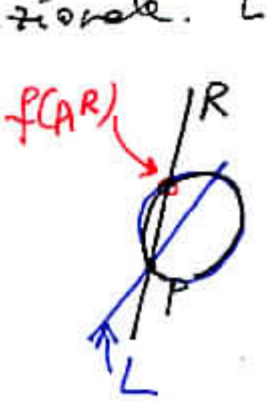


$\langle p,q\rangle \cap Y = \{p, q, f(p,q)\}$.

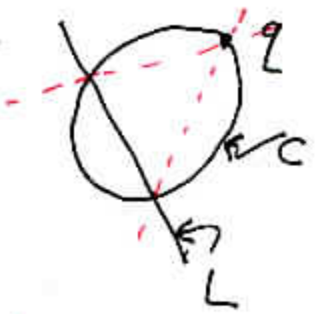
$\boxed{\text{dim. di (c)}}$ Y contiene una retta L. Dato $p \in L$ e una retta $R \subset T_pY$ passante per p (cioè R è tangente a Y in p) l'intersezione $R \cap Y$ consiste (per p e R generici) in p e un altro punto $f(p,R)$. In questo modo definiamo un'applicazione dominante

$$\mathcal{R} \overset{f}{\dashrightarrow} Y$$
$$(p,R) \longmapsto f(p,R)$$

dove $\begin{matrix}\mathcal{R}\\ \downarrow \\ L\end{matrix}$ è un $\mathbb{P}^{n-2}$-fibrato su $L \cong \mathbb{P}^1$. Siccome $\mathcal{R}$ è la proiettificazione di un fibrato vettoriale su L, cioè $\mathcal{R} = \mathbb{P}(\Theta_{Y}|_L)$, $\mathcal{R}$ è razionale. Quindi f è dominante (e ra) da una varietà razionale a Y e perciò Y è unirazionale. La costruzione di f vale anche per $n=3$:



. Si ha che $\boxed{\deg f = 2}$ perchè dato $q \in Y$ generico



$\langle q, L\rangle \cap Y = L + \underset{\text{conica}}{C}$

$f^{-1}q = \underbrace{C \cap L}_{\text{2 punti.}}$

Quindi la f <u>non è birazionale</u>.

$\boxed{\text{dim. di (d)}}$ La Jacobiana intermedia di Y

$$J^2(Y) := H^{1,2}(X) / H^3(X;\mathbb{Z})$$ (con polarizzazione data dalla forma d'intersez.)

non è un prodotto di Jacobiane di curve ($J^2(Y)$ è una varietà abeliana principalmente polarizzata da ⟶).

Se Y fosse razionale allora $J^2(Y)$ sarebbe un prodotto di Jacobiane di curve.

$\boxed{\text{Ora } Y \subset \mathbb{P}^5}$ (1) Si congettura che la generica non sia razionale. Non è stato dato un esempio di cui si sappia dimostrare che non è razionale.

(2) Si conoscono alcune famiglie di Y che sono razionali.

Idealmente vorremmo definire un invariante birazionale che sappia riconoscere se una cubica è razionale.

Kuznetsov propone un tale "invariante", o meglio definisce una sottocategoria triangolata di $\mathcal{D}(Y)$ (la categoria derivata di Y) e propone un criterio per la razionalità di Y. (Esiste anche una soluzione congetturale del problema proposta da Kulikov, faremo un accenno.)

Il nostro scopo è:

(1) Esaminare alcuni esempi di cubiche in $\mathbb{P}^5$ che sono razionali per mostrare come (possono nascere?) nascono le congetture di Kuznetsov e Kulikov.

(2) Spiegare l'enunciato della congettura di Kuznetsov e (forse) spiegare le prove in favore date da Kuznetsov.

Commento: non è chiaro se la congettura di Kuznetsov possa portare a qualche teorema, può essere un'occasione per avvicinarsi a "non commutative algebraic geometry", "homological mirror symmetry" (e poi riallontanarsi?).

II. Ipersuperfici cubiche in $\mathbb{P}^5$: razionalità e struttura di Hodge.

Siano $L, M \subset \mathbb{P}^5$ piani disgiunti. La generica cubica $Y \subset \mathbb{P}^5$ contenente L e M è liscia: infatti ~~se~~ ~~$\{x_0, x_1, x_2$~~ ~~...~~ la cubica di Fermat $V(x_0^3+x_1^3+\cdots+x_5^3)$ che è liscia contiene i piani disgiunti

$$L := V(x_0+x_1,\ x_2+x_3,\ x_4+x_5) \qquad M := V(x_0-\varepsilon x_1,\ x_2-\varepsilon x_3,\ x_4-\varepsilon x_5)$$

dove $\varepsilon = e^{\pi i/3}$.

L'applicazione razionale di p. 1 che dimostra la razionalità di una cubica liscia in $\mathbb{P}^3$ ~~si può definire in~~ suggerisce di considerare l'applicazione razionale

$$\begin{array}{ccc} L \times M & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & Y \\ (p, q) & \longmapsto & \text{Il terzo punto d'intersezione di } \langle p,q \rangle \text{ con } Y. \end{array}$$

che di fatto è $\boxed{\text{bi}}$razionale.
Vediamo quindi che Y è razionale.

Due considerazioni:

(1) L'insieme delle cubiche lisce contenenti due piani disgiunti è un sottoinsieme localmente chiuso di $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(3)|$ di codimensione $= 2$.

(2) Come si fattorizza ϕ come serie di blow-ups e blow-down con centri lisci ?

Scegliamo coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2, Z_0, Z_1, Z_2]$ su $\mathbb{P}^5$ tali che

$$L = V(Z_0, Z_1, Z_2) \qquad M = V(X_0, X_1, X_2).$$

Allora $Y = V(P)$ dove

$$P = \sum_{i,j} \left(A_{ij}(X) + B_{ij}(Z)\right) X_i Z_j \qquad A_{i,j} \in \mathbb{C}[X]_1 \quad B_{ij} \in \mathbb{C}[Z]_1$$

Siano

$$F(X,Z) := \sum_{ij} A_{ij}(X) X_i Z_j \qquad G(X,Z) := \sum_{ij} B_{ij}(Z) X_i Z_j$$

Facendo qualche conto si vede che ϕ è data da

$$\begin{array}{ccc} \overset{L}{\overset{\|}{\mathbb{P}^2_{[X]}}} \times \overset{M}{\overset{\|}{\mathbb{P}^2_{[Z]}}} & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & Y \\ ([X],[Z]) & \longmapsto & [G(X,Z)X_0, .., G(X,Z)X_2, -F(X,Z)Z_0, .., -F(X,Z)Z_2] \end{array}$$

Notate che $F, G \in \mathbb{C}[X, Z]$ sono bi-omogenei di gradi $(2,1)$ e $(1,2)$ rispettivamente e quindi

$$V(F) \in |\mathcal{O}_L(2) \boxtimes \mathcal{O}_M(1)| \qquad V(G) \in |\mathcal{O}_L(1) \boxtimes \mathcal{O}_M(2)|.$$

Sia

$$S := V(F) \cap V(G).$$

Se Y è generica tra le cubiche contenenti $L \cup M$ anche F e G sono generiche e quindi S è una <u>superficie liscia</u>. Per aggiunzione $K_S \sim 0$ e per Lefschetz $\pi_1(S) = \{1\}$.

Quindi S è una K3 (in $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$).

Osservazione: $(p,q)\in L\times M$ è in S se e solo se $\langle p,q\rangle\subset Y$.

Inoltre la formula esplicita per ϕ dimostra che ϕ è data dal sistema completo $|\mathcal{I}_S(2,2)|$ su $L\times M$.

Quindi il blow-up di $L\times M$ con centro S risolve l'indeterminazione di ϕ e abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} & Bl_S(L\times M) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\tilde{\phi}"] & \\ L\times M \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & Y \end{tikzcd}$$

A sua volta $\tilde{\phi}$ è lo scoppiamento di $L\cup M$ in Y.

[Il punto che voglio far emergere è che il centro dello scoppiamento π è una K3.]

Le cubiche lisce razionali conosciute sono:

(A) Y contenente un piano L e tale che valga:

"sia $Q\subset Y$ una superficie quadrica tale che

$$L+Q=Y\cdot\mathbb{P}^3$$

(la rete di spazi lineari di dim=3 contenenti L ~~definisce~~ ~~una~~ dà a $Bl_L(Y)$ la struttura di fibrazione in quadriche)

allora

esiste una superficie $T\subset Y$ (sottovarietà di cod=2) tale che $T\cdot Q\equiv 1 \pmod 2$"

Per esempio nel caso discusso sopra $M \cdot Q = 1$.
In questo modo si ottengono infinite famiglie di $\mathrm{cod}=2$ che parametrizzano cubiche lisce razionali

(B) Y cubica Pfaffiana cioè definita da $Y = V(P)$ dove $P \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_5]_3$ è dato da

$$P(X) = \mathrm{Pf}\,(x_0 M_0 + \cdots + x_5 M_5)$$

M_i = matrice 6×6 antisimmetrica.

Le cubiche Pfaffiane formano una famiglia (irriducibile) di $\mathrm{cod}=1$.

(Le cubiche *singolari* sono razionali ~~a meno che~~ con l'eccezione dei coni su una curva cubica piana liscia.)

Per quello che so negli esempi noti di cubiche razionali

$$\mathbb{P}^4 \overset{f}{\dashrightarrow} Y$$

in una risoluzione dell'indeterminazione di f:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & X_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \cdots & X_n \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_0 = \mathbb{P}^4 & & X_2 & & \cdots & & Y \end{tikzcd}$$

con $X_1 \to X_0$ $X_1 \to X_2$ etc. ottenuti con una serie di scoppiamenti di sottovarietà lisce, l'unico centro di $\dim = 2$ e $h^{2,0} \neq 0$ è sempre una K3.

La struttura di Hodge di una cubica liscia $Y \subset \mathbb{P}^5$.

$\boxed{\text{Lefschetz:}}$: $H^{p,q}(Y) \cong H^{p,q}(\mathbb{P}^5)$ se $p+q \neq 4$ e quindi

$$H^{odd}(Y)=0 \qquad H^{2k}(Y) = \mathbb{C}\, c_1(\mathcal{O}_Y(1))^k \quad \text{se } k \neq 2.$$

$\boxed{\text{Teoria dei residui di Griffiths}}$ Sia $h = c_1(\mathcal{O}_Y(1))$ e

$$H^4_{pr}(Y) := \{ \alpha \in H^4(Y) \mid \int_Y \alpha \wedge h^2 = 0 \} = (h^2)^{\perp}.$$

Sia $J_Y \subset \mathbb{C}[X_0, \dots, X_5]$ l'ideale (omogeneo) Jacobiano di Y, cioè

$$J_Y = \left(\frac{\partial P}{\partial X_0}, \dots, \frac{\partial P}{\partial X_5} \right) \quad \text{dove } I(Y) = (P).$$

e $R = \mathbb{C}[X_0, \dots, X_5]/J_Y$ l'anello quoziente: è una $\mathbb{C}$-algebra graduata.

Griffiths dà isomorfismi

$$0 = R_{-3} \xrightarrow{\sim} H^{4,0}_{pr}(Y) = H^{4,0}(Y) = 0$$

$$R_0 \xrightarrow{\sim} H^{3,1}_{pr}(Y) = H^{3,1}(Y)$$

$$R_3 \xrightarrow{\sim} H^{2,2}_{pr}(Y) \subsetneq H^{2,2}(Y)$$

$\vdots$

Segue (con un calcolo) che

$$h^{3,1}(Y) = 1 \qquad h^{2,2}_{pr}(Y) = 20 \quad \text{e quindi } h^{2,2}(Y) = 21.$$

Diamante di Hodge di Y:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 = h^{0,0} & & \leftarrow h^0 \\
 & & 1 = h^{1,1} & & \leftarrow h^2 \\
h^{3,1} = 1 & & h^{2,2} = 21 & & h^{1,3} = 1 \quad \leftarrow h^4 \\
 & & 1 = h^{3,3} & & \leftarrow h^6 \\
 & & 1 = h^{4,4} & & \leftarrow h^8
\end{array}$$

Nell'esempio che abbiamo esaminato: Y contenente piani disgiunti L, M il centro del blow-up $Bl_S(L\times M)\to M$ è una K3 S, come vediamo $H^2(S)$ in $H^4(Y)$?

Passiamo ai <u>cicli trascendenti</u>:

$$T(S) := H^{1,1}_{\mathbb{Z}}(S)^{\perp} \subset H^2(S)$$

sottostruttura di Hodge <u>indecomponibile</u> con $h^{2,0}=1$.

Facciamo riferimento al diagramma commutativo di <u>p. 7</u>:
Abbiamo un'<u>applicazione cilindro</u> (è semplicemente il pull-back)

$$H^2(S)\to H^2(E) \qquad \text{dove } E\subset Bl_S(L\times M) \text{ è il \underline{divisore eccezionale} di } \pi$$

che è un morfismo di strutture di Hodge: componiamo con l'applicazione di Gysin

$$H^2(E)\to H^4(Bl_S(L\times M))$$

e poi con $\tilde{\Phi}_*$. Otteniamo un morfismo di strutture di Hodge

$$H^2(S)\longrightarrow H^4(Y)$$
$$H^{p,q}(S)\longmapsto H^{p+1,q+1}(Y)$$

(Per essere precisi abbiamo $H^2(S)(-1)\to H^4(Y)$)

Restringendo a $T(S)$ otteniamo una <u>inclusione</u>

$$T(S)\hookrightarrow H^4(Y)$$

Notate che $H^{2,0}(S)\xrightarrow{\sim} H^{3,1}(Y)$ e quindi $T(S)\xrightarrow{\sim} H^{2,2}_{\mathbb{Z}}(Y)^{\perp}$.

Ragionamento euristico: se Y è razionale esiste

$$\mathbb{P}^4 \overset{f}{\dashrightarrow} Y$$

[e l'unica superficie con $h^{2,0} \neq 0$ che appare come centro dei blow-up che risolvono f è una K3, ~~...~~ S,]

quindi abbiamo una inclusione $T(S) \hookrightarrow H^4(Y)$ che è un isomorfismo $T(S) \xrightarrow{\sim} H^{2,2}_{\mathbb{Z}}(Y)^{\perp}$.

Ora $\dim T(S) \leq b_2(S) - 1 = 21$. Ma $h^4(Y) = 23$ e se Y è molto generale $h^{2,2}_{\mathbb{Z}}(Y) = 1$ e perciò $\dim H^{2,2}_{\mathbb{Z}}(Y)^{\perp} = 22$. La parte [...] non ha senso così come è formulata. Comunque una

Congettura (Folk) Sia $Y \subset \mathbb{P}^5$ una cubica liscia tale che $h^{2,2}_{\mathbb{Z}}(Y) = 1$. Allora Y non è razionale.

III. Categoria derivata di una cubica in $\mathbb{P}^5$ e congettura di Kuznetsov.

Sia $Y \subset \mathbb{P}^5$ una cubica liscia. Sia $D^b(Y)$ la categoria derivata limitata di Y, cioè

- $\underline{\mathrm{Ob}\, D^b(Y)}$ = oggetti di $D^b(Y)$ sono i complessi di fasci coerenti su Y limitati a destra e a sinistra

$$0 \to 0 \to \mathcal{F}^p \xrightarrow{d^p} \mathcal{F}^{p+1} \xrightarrow{d^{p+1}} \mathcal{F}^{p+2} \to \cdots \to \mathcal{F}^q \to 0 \to 0 \cdots$$

$$\boxed{d^{k+1} \circ d^k = 0}$$

- $\underline{\mathrm{Mor}\, D^b(Y)}$: si ottengono a partire dai morfismi di complessi

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^\bullet : \arrow[d, "f"'] & \to 0 \cdots \arrow[r] & \mathcal{F}^p \arrow[r, "d^p_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "f^p"'] & \mathcal{F}^{p+1} \arrow[r, "d^{p+1}_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "f^{p+1}"'] & \mathcal{F}^{p+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{p+2}"'] & \cdots \to 0 \to \cdots \\
\mathcal{E}^\bullet & \arrow[r] & \mathcal{E}^p \arrow[r, "d^p_{\mathcal{E}}"] & \mathcal{E}^{p+1} \arrow[r, "d^{p+1}_{\mathcal{E}}"] & \mathcal{E}^{p+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$f^{p+1} \circ d^p_{\mathcal{F}} = d^p_{\mathcal{E}} \circ f^p \qquad \forall p$$

dichiarando che ogni quasi-isomorfismo f (cioè tale che $H^p(f) : H^p(\mathcal{F}^\bullet) \to H^p(\mathcal{E}^\bullet)$ sia un isomorfismo di fasci) sia un isomorfismo - cioè aggiungendo il morfismo f^{-1}.

Dato un complesso $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(Y)$ ha senso l'ipercoomologia $\mathbb{H}^\circ(\mathcal{F}^\circ)$: esiste un quasi-isomorfismo $\mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{I}^\bullet$ dove $\mathcal{I}^\circ$ è un complesso di fasci iniettivi (non più coerenti!)

$$\mathbb{H}^\bullet(\mathcal{F}^\circ) = H^\bullet(\ldots \to H^\circ(\mathcal{I}^{p-1}) \to H^\circ(\mathcal{I}^p) \to H^\circ(\mathcal{I}^{p+1}) \to \ldots).$$

<u>Definizione</u>. Sia $\mathcal{A}_Y \subset D^b(Y)$ la sottocategoria (triangolata) dei complessi $\mathcal{F}^\bullet$ tali che

$$0 = \mathbb{H}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^\circ(\mathcal{F}^\bullet(-1)) = \mathbb{H}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet(-2)).$$

Congettura (Kuznetsov) La cubica liscia $Y \subset \mathbb{P}^5$ è razionale se e solo se $\mathcal{A}_Y$ è equivalente (come categoria triangolata) alla categoria derivata di una K3.

Il nostro obiettivo: spiegare con maggiore precisione il significato di "categoria derivata (triangolata)", $\mathcal{A}_Y$.

Kuznetsov mette alla prova la propria congettura dimostrando che:

(1) nei casi in cui è noto che $Y \subset \mathbb{P}^5$ è razionale esiste una K3 S e una equivalenza esatta tra $\mathcal{D}^b(S)$ e $\mathcal{A}_Y$

(2) esistono cubiche $Y \subset \mathbb{P}^5$ tali che non esista una K3 con la proprietà che $\mathcal{D}^b(S)$ è equivalente (come categoria triangolata) a $\mathcal{A}_Y$.

(1) e (2) potranno essere studiati in seguito (se c'è l'interesse a farlo).

IV. Categorie additive e abeliane.

Ricordiamo: una categoria $\mathcal{C}$ è

(a) Una coppia $(\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}})$ dove $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ è un insieme (gli oggetti di $\mathcal{C}$) e

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \times \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}} & \mathrm{Set} \\ (A,B) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \end{array}$$

sono i morfismi

(b) Un elemento identità $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$ $\forall A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

(c) Un'applicazione di composizione per ogni $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

tali che valgano:

(I) Se $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A',B') \neq \emptyset$ allora $A=A'$ e $B=B'$.

(II) $\mathrm{Id}_B \circ f = f$ e $f \circ \mathrm{Id}_A = f$ $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$

(III) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$.

DEF $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ è un isomorfismo se esiste $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$ t.c. $\begin{cases} g \circ f = \mathrm{Id}_A \\ f \circ g = \mathrm{Id}_B \end{cases}$

ESEMPI:

Vec_k: oggetti = sp. vett. sul campo k, morfismi = le applicazioni k-lineari

Mod_R: oggetti = moduli sull'anello* R, morfismi = omomorfismi di R-moduli.

Coh_X: oggetti = fasci coerenti sullo schema X, morfismi = morfismi di $\mathcal{O}_X$-moduli

La categoria opposta $\mathcal{C}^{op}$ della categoria $\mathcal{C}$: $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{op} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ma se $A, B \in \mathcal{C}^{op}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A) \quad (g \circ f)_{\mathcal{C}^{op}} := (f \circ g)_{\mathcal{C}}$$

---

* commutativo con 1 per noi.

<u>Ricordiamo:</u> se $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ sono categorie un <u>funtore</u> F da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ è:

$$\begin{array}{ccc} Ob\,\mathcal{C} & \xrightarrow{F} & Ob\,\mathcal{D} \\ A & \longmapsto & F(A) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} F(\varphi) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)) \\ \forall \varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \end{array}$$

tali che:

(I) $F(Id_A) = Id_{F(A)}$

(II) $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$.

Notazione: $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

<u>Esempi:</u>
- F funtore da Vec_k a Vec_k^{op}

$$F(V) = V^{\vee} \qquad F(\varphi) = \varphi^t$$

- $F : Mod_R \to Coh_{specR}$ $\quad F(M) = \tilde{M} =$ "fascificazione di M"
  spiga di $\tilde{M}$ su $p \in specR = M_p$
  $F(\varphi) =$ ovvio

- $F : Coh_X \to Vec_k$ $\quad (X = var./k)$ $\quad F(\mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{F})$ $(= H^0(\mathcal{F}))$.
  $F(\varphi)$: ovvio.

<u>Morfismo tra funtori:</u> $F_1, F_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtori.

Un morfismo $\theta : F_1 \to F_2$ consiste di

$$\theta(A) = \theta_A \in Hom_{\mathcal{D}}(F_1(A), F_2(A)) \qquad \forall A \in \mathcal{C}$$

tale che per ogni $A, B \in \mathcal{C}$ e $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ il diagramma

$$\begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{F_1(\varphi)} & F_1(B) \\ \theta_A \downarrow & & \downarrow \theta_B \\ F_2(A) & \xrightarrow{F_2(\varphi)} & F_2(B) \end{array}$$

sia commutativo.

<u>Esempio</u> $\mathcal{C}$ = categoria $\mathcal{S}et$ = categoria i cui oggetti sono gli insiemi (ammm... attenzione, di un universo?) e i morfismi le applicazioni tra insiemi.

Dato $A \in \mathcal{C}$ definiamo il funtore

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\xrightarrow{F_A} \mathcal{S}et \\ X &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \end{aligned}$$

Ora dato $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (Notazione: $\varphi : A \to B$) definiamo un morfismo di funtori $\theta_\varphi : F_B \to F_A$ così:

$$\begin{array}{ccc} \theta_\varphi(X) : F_B(X) & \to & F_A(X) \\ \| & & \| \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \\ \ni f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

<u>Definizione</u> Un morfismo $\vartheta : F \to G$ di funtori $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un <u>isomorfismo</u> se esiste un morfismo di funtori $\eta : G \to F$ tale che per ogni $A \in \mathcal{C}$ valgano:

$$\vartheta(A) \circ \eta(A) = \mathrm{Id}_{G(A)} \qquad \eta(A) \circ \vartheta(A) = \mathrm{Id}_{F(A)}.$$

(In particolare $\vartheta(A)$ e $\eta(A)$ ($\in \mathcal{D}$) sono isomorfi ($\forall A \in \mathcal{C}$) ma <u>non basta</u> che siano isomorfi per ogni $A \in \mathcal{C}$ perché ϑ sia un isomorfismo, vedi esempio nella pagina seguente.)

<u>Notazione</u> $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sono isomorfi se esiste un isomorfismo tra F e G.

Esempio. $Id: Vec_k^f \to (Vec_k^f)^{op}$ e $D: Vec_k^f \to (Vec_k^f)^{op}$
$$V \mapsto V \qquad\qquad V \mapsto V^\vee$$

(Qui Vec_k^f è la categoria degli sp. vett./k di $\dim_k < \infty$.)

Per ogni $V \in Vec_k^f$ $\underset{\underset{V}{\parallel}}{Id(V)}$ è isomorfo a $\underset{\underset{V^\vee}{\parallel}}{D(V)}$ ma i funtori Id e D non sono isomorfi.

- Ora invece di D consideriamo

$$Vec_k^f \xrightarrow{DD} Vec_k^f$$
$$V \mapsto (V^\vee)^\vee$$

Allora i funtori $Id: Vec_k^f \to Vec_k^f$ e $DD: Vec_k^f \to Vec_k^f$ sono isomorfi (ma non uguali!)

Definizione

Un funtore $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è una equivalenza di categorie se esiste un funtore $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tale che:

(1) $G \circ F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ (un funtore!) è isomorfo al funtore $Id_{\mathcal{C}}$

(2) $F \circ G: \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ è isomorfo al funtore $Id_{\mathcal{D}}$.

Esempio: $D: Vec_k^f \to (Vec_k^f)^{op}$ è una equivalenza di categorie.

Osservazione (importante): un funtore $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un isomorfismo di categorie se $\exists\, G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ t.c. $G \circ F = Id_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G = Id_{\mathcal{D}}$. È una nozione più restrittiva dell'equivalenza e poco utile, vedi l'esempio sopra.

$\boxed{\text{DEF}}$ Una categoria additiva è una categoria $\mathcal{C}$ provvista di:

(1) Un elemento $0 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

(2) Una struttura di gruppo abeliano su $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ $\forall A,B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$
(in particolare $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \neq \emptyset$)

tali che

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,A) = \{0\}$ $\forall A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

(b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$ è bilineare.

Inoltre $\mathcal{C}$ deve possedere prodotti e coprodotti finiti.

(Fatto/Notazione) Siano $A,B \in \mathcal{C}$ dove $\mathcal{C}$ è categoria additiva. Si dimostra che c'è isomorfismo (naturale) tra prodotto $A \times B$ e coprodotto $A \sqcup B$: si pone

$$A \oplus B := A \times B \cong A \sqcup B .$$

(L')Esempio: $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$ = categoria dei gruppi abeliani.

Altro esempio: $\mathcal{C} = \mathrm{Coh}_X$.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria additiva. Sia $f : A \to B$ $A,B \in \mathcal{C}$.
Sia $h : K \to A$: si dice che <u>h è un nucleo di f</u> ($h = \ker f$)
se la successione di gruppi abeliani

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \varphi & \longmapsto & f \circ \varphi \\ 0 \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,K) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,B) & \\ & \varphi & \longmapsto & h \circ \varphi & & & \end{array}$$

è esatta. $\forall X \in \mathcal{C}$.

Sia $p : B \to Q$: si dice che p è un <u>conucleo di f</u> ($p = \operatorname{coker} f$) se la succ. di gr. ab.

$$0 \to \operatorname{Hom}(Q, X) \to \operatorname{Hom}(B, X) \to \operatorname{Hom}(A, X)$$
$$\varphi \mapsto \varphi \circ p \qquad \psi \mapsto \psi \circ f$$

è esatta $\forall X \in \mathcal{C}$.

<u>Oss.</u> Se $\ker f$ esiste è unico a meno di isom. unico e similmente per $\operatorname{coker} f$.

<u>Def.</u> Sia $f : A \to B$. Se $\underset{\overset{\|}{h}}{\ker f} : K \to A$ esiste e $\operatorname{coker}(h) : A \to Q$ esiste poniamo $\operatorname{coim}(f) := \operatorname{coker}(h) : A \to Q$.

Se $\underbrace{\operatorname{coker}(f)}_{\overset{\|}{p}} : B \to Q'$ esiste e $\ker(p) : K' \to B$ esiste poniam $\operatorname{im}(f) := \ker(p) : K' \to B$. Abbia

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[d] & & B \arrow[r] & \operatorname{coker} f \\
& \operatorname{coim} f \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & \operatorname{im} f \arrow[u] &
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

esiste per le proprietà che definiscono ker e coker.

$\boxed{\text{DEF}}$ Una categoria abeliana è una categoria additiva $\mathcal{C}$ tale che:

(1) Esistono $\ker f$ e $\operatorname{coker} f$ $\forall f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$

(2) Il morfismo φ di $(*)$ è un <u>isomorfismo</u>.

Esempi: (1) Mod_R è abeliana

(2) Coh_X è abeliana.

(3) $\mathcal{C}$ = categoria dei gruppi abeliani con filtrazione (diciamo indicizzata da $\mathbb{Z}$): un oggetto di $\mathcal{C}$ è un gruppo abeliano G e

$$\ldots < F^{i-1}G < F^{i}G \leq F^{i+1}G < F^{i+2}G < \ldots$$

una successione di sottogruppi (indicizzati da $\mathbb{Z}$).

I morfismi sono $\varphi: G \to G'$ omomorfismi di gruppi tali che $\varphi(F^iG) \subset F^iG'$.

Si vede che ker e coker esistono ma

coim $f \to$ im f non è necessariamente un isomorfismo: basta considerare lo stesso gruppo G con filtrazioni F^i e H^i t.c. $F^iG \subset H^iG$ $\forall i$ e $F^{i_0}G \neq H^{i_0}G$ per un qualche i_0. Allora $\ker(Id_G) = 0$ $\operatorname{coker}(Id_G) = 0$: quindi $\operatorname{coim}(Id_G) = Id_G$ $\operatorname{im}(Id_G) = Id_G$. e se

coim $f \cong$ im f avremo che Id_G è isomorfismo, assurdo.

Quindi $\mathcal{C}$ che è <u>additiva</u> <u>non è abeliana</u>.