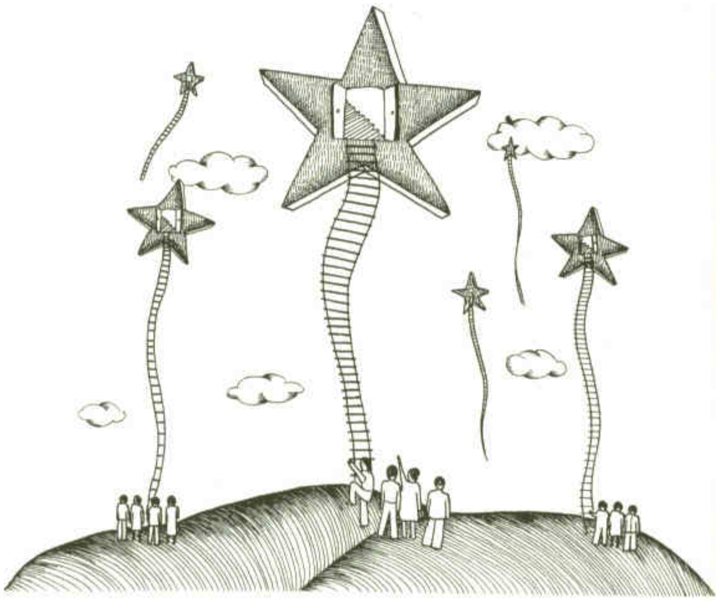


Ipertetraedri: scheda di auto-apprendimento di molte delle loro proprietà e collegamento con numerosi argomenti di matematica

Mario Barra

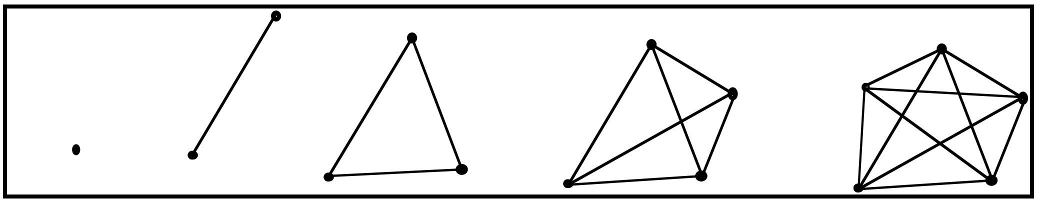
Riassunto Si presenta una scheda di auto-apprendimento relativa agli ipertetraedri. A partire dalla loro definizione, comprende 26 domande rivolte agli studenti che possono trovare le risposte autonomamente o con qualche sollecitazione. Comprende il "momento del riepilogo" delle proprietà trovate e il "momento creativo" per formulare ipotesi da argomentare o dimostrare. Sono presenti le risposte alle domande, i commenti e alcune proprietà collegate, quali: la "Caratteristica di Eulero" degli ipertetraedri, il "Piccolo Teorema di Fermat", la probabilità della somma di dadi e la densità equivalente e varie proprietà dei triangoli di Pascal "generalizzati".

Abstract A "card of auto-learning" about hyper-tetrahedrons is presented: beginning from their definition, it introduces 26 questions about many properties that can derive. The questions are turned to the students who can find the answers independently or with some aids. The found properties must be resumed to formulate hypothesis of new properties to accompany with reasoning or proofs. The answers to the questions, the comments and some connected properties are presented, as: the " Euler's Characteristic", the "Little Fermat 's Theorem", the sections of hypercubes, the distributions of the sum of dices and the equivalent density, … and many arithmetical and geometric properties of the "generalized" Pascal's triangles.

M. Barra Dip. Mat., Fac. Scienze, Un. "Sapienza". barra@mat.uniroma1.it

Scheda n° 2 **"Auto-apprendimento per induzione e analogia",** M. Barra.
Data………. Sigla di chi la compila ……………… Tempo impiegato……

IPERTETRAEDRI



$\mathbf{T^0}$ $\mathbf{T^1}$ $\mathbf{T^2}$ $\mathbf{T^3}$: $\begin{pmatrix} \textbf{i vertici sono } 4 = \mathbf{T^{0;3}} \\ \textbf{gli spigoli sono } 6 = \mathbf{T^{1;3}} \end{pmatrix}$[1] $\mathbf{T^4}$

DEFINIZIONE: **proiettando** un punto $T^0 \in R^0$ da un punto diverso $V_1 \in R^1$, si genera un segmento: T^1. Un triangolo T^2 si ottiene **proiettando**[2] un segmento (detto "**base**") $T^1 \subset R^1$, da un punto $V_2 \notin R^1$, (i nuovi lati si generano proiettando da V_2 i vertici (gli estremi) di T^1). Allo stesso modo **proiettando** un triangolo $T^2 \subset R^2$, da un punto $V_3 \notin R^2$, si genera un tetraedro T^3 (i nuovi triangoli e i nuovi spigoli sono ottenuti proiettando da V_3 i lati e i vertici di T^2). **Quanto detto si generalizza, in j dimensioni, dicendo che:** un tetraedro a **j** dimensioni $\mathbf{T^j}$ si ottiene **proiettando** un tetraedro $\mathbf{T^{j-1}} \subset R^{\mathbf{j-1}}$, detto **base**, da un punto , $\mathbf{V_j} \notin R^{\mathbf{j-1}}$, j=1, 2, …, d.

In $\mathbf{T^j}$: $\mathbf{V_j}$ è il vertice opposto a $T^{\mathbf{j-1}}$. Ovviamente $T^{\mathbf{0}}$ è un punto, $T^{\mathbf{1}}$ è un segmento e $T^{\mathbf{2}}$ è un triangolo.

Se si sceglie $\mathbf{V_j}$, **per j>1,** in modo tale che ogni nuovo spigolo, generato proiettando i vertici della base, abbia la stessa lunghezza dei precedenti, si ottengono **tetraedri regolari**.

Sia $\mathbf{T^{0;2}}$ il numero dei vertici (cioè il n° dei $\mathbf{T^0}$) di un triangolo $\mathbf{T^2}$, sia $\mathbf{T^{1;h}}$ il **numero** degli **spigoli**, cioè il n° di $\mathbf{T^1}$, di un tetraedro ad **h** dimensioni $\mathbf{T^h}$, e sia $\mathbf{T^{j;h}}$ **il numero dei $\mathbf{T^j}$ contenuti in un $\mathbf{T^h}$**, $j \leq h$.

---

[1] Lo stesso simbolo indica sia un oggetto sia il numero che ne indica la quantità o la misura.

[2] Inizialmente, invece della frase "Un triangolo T^2 si ottiene **proiettando** un segmento (detto "**base**") $T^1 \subset R^1$, da un punto V_2" veniva usata la seguente frase, più precisa ma più lunga "Un triangolo T^2 si ottiene **unendo tutti i punti di** un segmento (detto "**base**") $T^1 \subset R^1$, **con** un punto V_2". Il termine **"proiettando"**, che viene usato qui e successivamente, è stato suggerito dagli studenti che hanno detto: "è come al cinema, le immagini si **proiettano** da un punto" (nell'esempio diviene: "da un punto si **proietta** un segmento").

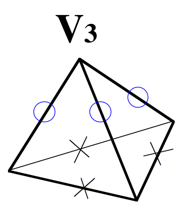
0) Quanti sono i vertici T^0 di T^3, cioè quanto vale $T^{0;3}$?
$T^{0;3}$ = ………………*4*…………………

1) Quanti sono i vertici T^0 di T^4, cioè quanto vale $T^{0;4}$?
$T^{0;4}$ = ………………*5*…………………

2) Quanti sono i vertici T^0 di T^d, cioè quanto vale $T^{0;d}$?
$T^{0;d}$ = ………………. *d+1*…………………

Immaginate un triangolo $\mathbf{T^2}$ mentre viene proiettato da un punto $\mathbf{V_3}$ per generare un tetraedro $\mathbf{T^3}$:

3) In questa operazione che cosa viene generato proiettando uno dei vertici di T^2 da V_3? ………… ***uno spigolo*** ………

A fianco è disegnato $\mathbf{T^3}$. Scegliete una delle sue 4 basi, sia $\mathbf{T^2}$, e indicate: 1) con una crocetta i **3** spigoli di $\mathbf{T^3}$ che appartengono a tale base, cioè a $\mathbf{T^2}$; 2) con un pallino i **3** spigoli di $\mathbf{T^3}$ generati dalla proiezione dei vertici di $\mathbf{T^2}$ da $\mathbf{V_3}$;	

4) E' vero che vale la seguente relazione fra i numeri già precisati:
$T^{1;3} = T^{1;2} + T^{0;2}$ **?** ……… ***sì*** …………

Immaginate un tetraedro $\mathbf{T^3}$ che viene proiettato da V_4 per generare $\mathbf{T^4}$:

5a) Quanti dei $T^{1;4}$ appartengono a un T^3, cioè a una base di T^4?
…………………… ***6*** ……………………

5b) Quanti dei $T^{1;4}$ sono stati ottenuti proiettando una base T^3 da V_4 ?
…………………… ***4*** ……………………

5c) Esprimi $T^{1;4}$ attraverso $T^{1;3}$ e $T^{0;3}$.
$T^{1;4}$ = …… $T^{1;3} + T^{0;3}$………………………

6) Proiettando T^2 da V_3 per generare T^3, che cosa si genera proiettando un lato, T^1, di T^2 da V_3? …… *T^2*……

Ricorda che $\mathbf{T^{2;h}}$ è il numero dei **triangoli** di un tetraedro ad **h** dimensioni.

7a) Quanti dei $T^{2;4}$ appartengono ad una sua base T^3 di T^4?
…………………… ***4*** ………………………

7b) Quanti dei $T^{2;4}$ sono stati ottenuti proiettando la base T^3 da V_4 ?
……………………. *6* ………………………

7c) Esprimi $T^{2;4}$ attraverso i numeri degli elementi che hanno generato i T^2 di **T^4.** $T^{2;4}$ = ... $T^{2;3} + T^{1;3}$ ……………………………

Se una domanda ti risulta difficile in dimensione maggiore di 3, può essere utile cercare di rispondere alla questione analoga formulata in 3 o in 2 dimensioni. Le domande precedenti e **seguenti** possono aiutarti per **completare** la seguente tabella che **deve essere riempita soltanto nei riquadri con la cornice nera**.[3] La tabella rappresenta un momento importante di sintesi e approfondimento che potrà servirti anche per rispondere alle domande poste di seguito.

	T^0 h=0	T^1 h=1	T^2 h=2	T^3 h=3	T^4 h=4	T^5 h=5	…	T^d h=d
$T^{0;h}$	1	2	3	*4*	*5*	*6*		*d+1*
$T^{1;h}$	0	1	3	6	*10*	*15*		$T^{1;d} = T^{1;d-1}+T^{0;d-1}$
$T^{2;h}$	0	0	1	4	*10*	*20*		$T^{2;d}= T^{2;d-1}+T^{1;d-1}$
$T^{3;h}$	0	0	0	1	*5*	*15*		$T^{3;d} = T^{3;d-1}+T^{2;d-1}$
$T^{4;h}$	0	0	0	0	1	*6*		$T^{4;d} = T^{4;d-1}+T^{3;d-1}$
$T^{5;h}$	0	0	0	0	0	*1*		
Tot.	*1*	*3*	7	*15*	*31*	*63*		$2^{d+1}-1$
…								
$T^{j;h}$								$T^{j;h} = T^{j;h-1}+j^{i-1;h-1}$

Guardando anche la tabella, cerca di rispondere alle seguenti domande:

8) Quanti sono i T^3 di un ipertetraedro T^4, cioè quanto vale $T^{3;4}$?
$T^{3;4}$ = …………… *5* ………………

9) Quanti sono gli spigoli T^1 di un T^5, cioè quanto vale $T^{1;5}$?
$T^{1;5}$ = …………… *15* ………………

[3] In ogni riquadro che non ha la cornice nera gli studenti trovano, prima di dare le loro risposte, i numeri che possono aiutarli a completare la tabella.

10) Quanti sono i triangoli T^2 di un T^5, cioè quanto vale $T^{2;5}$?

$T^{2;5}$ = …………… ***20*** ………………………

11) Quanti sono i tetraedri T^3 di un T^5, quanto vale $T^{3;5}$?

$T^{3;5}$ = …………… ***15*** ………………………

12) Esprimi il numero dei T^2 di un T^4 (i $T^{2;4}$) attraverso $T^{2;3}$ e $T^{1;3}$.

$T^{2,4}$ = … $T^{2;3} + T^{1;3}$ …………………………

13) Esprimi il numero dei T^3 di un T^4 (i $T^{3;4}$) attraverso $T^{3;3}$ e $T^{2;3}$.

$T^{3;4}$ = … $T^{3;3} + T^{2;3}$ …………………………

14) In generale esprimi $T^{j;d}$ attraverso $T^{j;d-1}$ e $T^{j-1;d-1}$.

$T^{j;d}$ = … $T^{j;d-1} + T^{j-1;d-1}$………………………

15) Un tetraedro T^3 si può ottenere proiettando uno qualsiasi dei suoi T^2 dal vertice opposto V_3?……… ***sì*** ………

Ricorda che il coefficiente binomiale $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}$ *indica ad esempio il numero dei modi in cui si possono scegliere 3 oggetti su 5 e* $\binom{d}{j} = \frac{d(d-1)\ldots(d-j+1)}{j!} =$ $= \frac{d!}{j!(d-j)!}$ *è il numero di modi di scegliere j oggetti su d.* $\binom{d}{0} = 1$, $\binom{d}{1} = d$, $\binom{d}{d} = 1$.

Cerca di rispondere alle domande n°: **16$_c$)**, **17$_c$)**, **19$_c$)**,...,**21$_c$)**, **23$_c$)** e **25$_c$)**, attraverso i **c**oefficienti binomiali; ad es. nella domanda**: 16$_c$)** i **triangoli** in un **vertice** di **T^3**, cioè i **$T^{2,0,3}$,** sono $\binom{3}{2}$ in quanto in ogni vertice di T^3 ci sono 3 spigoli e scegliendone comunque 2, si individua un triangolo, perché non ci sono 2 spigoli che non appartengano ad un triangolo. Dunque: **$T^{2,0,3}$** = $\binom{3}{2}$.

16$_c$) Sia **O** un vertice di T^4. **Quanto vale $T^{2,0,3}$,** cioè quanti sono i triangoli, T^2, in un vertice di un **T^3 ?** **$T^{2,0,3}$** = ……… $\binom{3}{2}$ ………

17$_c$) Quanti sono gli spigoli di T^4 in un suo vertice O? Cioè quanto vale $T^{1,0,4}$? **$T^{1,0,4}$** = ……… $\binom{4}{1}$ ………

18) Un tetraedro T^4 è la proiezione di uno qualsiasi dei suoi T^3 dal vertice V_4 di T^4 opposto al T^3 scelto come base? …… *sì* ……

19c) Quanti sono i tetraedri in un vertice O di T^4 ? Cioè quanto vale $T^{3,0,4}$? $T^{3,0,4}$ = ……… $\binom{4}{3}$ …………………

20c) Quanti sono i triangoli in un vertice O di T^4 ? Cioè quanto vale $T^{2,0,4}$? $T^{2,0,4}$ = ……… $\binom{4}{2}$ …………………

21c) Quanti sono gli spigoli in un vertice O di T^d ? Cioè quanto vale $T^{1,0,d}$? $T^{1,0,d}$ = ……… $\binom{d}{1}$ …………………

22) Un ipertetraedro T^d si può ottenere dal collegamento di uno qual siasi dei suoi T^{d-1} con il vertice opposto ? … *si* ...

23c) Quanti sono i triangoli in un vertice O di T^d ? Cioè quanto vale $T^{2,0,d}$? $T^{2,0,d}$ = ……… $\binom{d}{2}$ …………………

24c) Quanti sono i tetraedri in un vertice O di T^d ? Cioè quanto vale $T^{3,0,d}$? $T^{3,0,d}$ = ……… $\binom{d}{3}$ …………………

25c) Quanto vale in generale $T^{j,o,d}$?

$T^{j,o,d}$ = ……… $\binom{d}{j}$ …………………

26!) Se nella tabella hai verificato qualche regolarità nella riga dei totali, prova ad esprimerla, o a darne una giustificazione o una dimostrazione scrivendo sul retro di questa pagina.

Valuta la scheda di auto-apprendimento **e assegna un voto** (1-10) su:
interesse ……………… **facilità** ……………… **chiarezza** ……………… [4]
Eventuali osservazioni: ……………………………………………………

[4]Come già detto, spesso la novità dell'argomento e l'impegno dei docenti che girano fra i banchi fornendo alcune sollecitazioni più o meno esplicite per agevolare le risposte degli studenti "premiando" gli atteggiamenti costruttivi, viene ripagato con delle valutazioni positive. E' importante convincere gli studenti che in matematica, anche in un argomento nuovo e "invisibile", non debbono limitarsi a "ripetere e applicare". Debbono capire che possono essere anche dei protagonisti in grado di fare alcune scoperte e qualche argomentazione e dimostrazione.

Commento alla domanda n° 26!)

La seguente <u>ipotesi</u> viene formulata da quasi tutti gli studenti, con espressioni analoghe: *i numeri nei totali degli elementi di* T^d *sono* 2^{d+1}*-1= =2(*2^d*-1)+1 (il doppio del totale calcolato nella colonna precedente, più uno), per d =0,1 2,...:* 2^1*- =**1**,* 2^2*-1=**3**,* 2^3*- =2·3+1 =**7**,* 2^4*-1 =2·7+1=**15*** ...

- 1a) *I dimostrazione*

Una dimostrazione semplice considera che, a partire dal primo vertice, ogni elemento conteggiato in una colonna compare 2 volte nella colonna successiva: una volta nella "base", e un'altra volta mentre genera un elemento di dimensione immediatamente maggiore durante la proiezione. Si deve inoltre aggiungere il nuovo vertice dal quale si effettua la proiezione.[5]

- 1b) *II dimostrazione*

Una dimostrazione (analitica) può essere data determinando anche la <u>formula che esprime in generale e in modo esplicito il numero delle componenti di un tetraedro T^d</u>, senza usare la formula ricorsiva determinata nella tabella. Es.: quanti sono gli spigoli di un T^3? Il numero dei vertici di T^3 è 4 e in ciascuno di questi ci sono 3 spigoli, ma facendo il prodotto 4·3=12 ciascuno spigolo viene contato 2 volte perché uno spigolo ha 2 vertici. In generale in T^d ci sono **d+1** vertici e moltiplicando per il numero di T^h in ogni vertice, $\binom{d}{h}=T^{h,0,d}$, ciascun T^h viene contato **h+1** volte, perché T^h ha **h+1** vertici:

$$\mathbf{T^{h;d}} = (d+1)\binom{d}{h}/(h+1) = (\mathbf{d+1})\frac{\mathbf{d...(d-h+1)}}{\mathbf{h!(h+1)}} = \frac{\mathbf{(d+1)d...(d-h+1)}}{\mathbf{(h+1)!}} = \binom{d+1}{h+1}.$$

È ovvio! Il n° dei tetraedri ad h dimensioni contenuti in un tetraedro a d dimensioni è $\binom{d+1}{h+1}$ perché T^d ha **d+1** vertici e comunque se ne prendano **h+1** si individua un $\mathbf{T^{d+1}}$. Così: $\sum_{j=0}^{d}\binom{\mathbf{d+1}}{\mathbf{j+1}} = \sum_{k=0}^{d+1}\binom{\mathbf{d+1}}{\mathbf{k}} - \binom{\mathbf{d+1}}{\mathbf{0}} = \mathbf{(1+1)^{d+1}-1 = 2^{d+1}-1}$. **c.d.d.**

Inoltre $\mathbf{T^{h;d}} = \binom{d+1}{h+1} = \mathbf{T^{h-1;d}(d+1-h)/(h+1)} = \binom{d+1}{h}\mathbf{(d+1-h)/(h+1)}$, perché tutti i $\mathbf{T^{h;d}}$ si ottengono proiettando tutti i $\mathbf{T^{h-1;d}}$ dai **(d+1-h)** vertici non appartenenti a $\mathbf{T^{h-1;d}}$, dividendo il prodotto per gli **(h+1)** vertici di $\mathbf{T^{h;d}}$.

[5] La tabella può agevolare l'individuazione delle risposte ad alcune domande. Ad es. gli studenti possono comprendere che il primo numero 3, che rappresenta il numero dei vertici del triangolo, è presente due volte nella colonna successiva (all'interno di altri numeri) che indica le componenti del tetraedro: ci sono 3 vertici nella base triangolare, e si ritrova ancora 3 nella stessa colonna, perché 3 dei 6 spigoli del tetraedro sono generati durante la proiezione della base, dai 3 vertici di T^2. In ogni caso è necessario considerare un vertice in più: quello dal quale si effettua la proiezione. Lo stesso per gli altri numeri.

- 2) Regola di Stiefel (è un corollario di quanto indicato nel punto **- 1b)**

Quanto ottenuto nella scheda: $\mathbf{T^{j;d}=T^{j;d-1}+T^{j-1;d-1}}$ (il n° dei T^j in T^d sono i T^j e i T^{j-1} della base perché la traslazione trasforma i T^{j-1} in T^j), con le considerazioni fatte, dimostra la regola di Stiefel: $\binom{d+1}{j+1}=\binom{d}{j+1}+\binom{d}{j}$; reiterando si ottiene: $\mathbf{T^{j;d}=T^{j;d-1}+\{T^{j-1;d-1}=[T^{j-1;d-2}+(T^{j-2;d-2}=T^{j-2;d-3}+}$ ... e traducendo, si ottiene quella che verrà chiamata la "regola della mazza da Hockey":

- 3) La caratteristica di Eulero afferma che: $N_0-N_1+N_2-...(-1)^dN_d=1$[6]. ($N_j$ è il n° di "oggetti" di dimensione j). **In T^d vale la caratteristica di Eulero?**

- 3a) 1ª dimostrazione (è sempre un corollario di quanto indicato in 1b))

In T^d vale la caratteristica di Eulero, *perché, come già detto nella risposta precedente, il numero dei tetraedri di dimensione* ***h*** *contenuti in un tetraedro in* ***d*** *dimensioni è* $T^{h;d}=\binom{d+1}{h+1}=N_h$ *e risulta:* $\binom{d+1}{1}-\binom{d+1}{2}+\binom{d+1}{3}-...=$

$$=[\binom{d+1}{0}-\binom{d+1}{0}]+\binom{d+1}{1}-\binom{d+1}{2}+\binom{d+1}{3}-...=(\binom{d+1}{0}=1)-(1-1)^{d+1}=1.$$

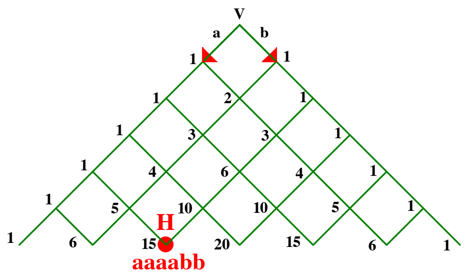
- 3b) ***2ª dimostrazione (più generale e senza formule)***

Dato un poliedro o un insieme di poliedri in qualsiasi dimensione, per i quali, sonsiderando "tutto" con segni alterni: n^i vertici, spigoli, facce, poliedri,..., la caratteristica di Eulero vale **uno**, con una proiezione da un punto V, la caratteristica di Eulero rimane ancora **uno** perché il numero degli elementi di dimensione **h** considerato con un certo segno dalla caratteristica di Eulero calcolata nell'insieme iniziale, viene annullato dallo stesso numero relativo agli elementi generati per proiezione che hanno ora dimensione **h+1** e quindi hanno segno opposto. L'unico numero che non si annulla è relativo al vertice V che vale **uno** (gli ipertetraedri sono generati con successive proiezioni a partire da T^0 per il quale la caratteristica di Eulero vale **uno**). Il ragionamento si può adattare a *proiezioni da un punto* di **parti di poliedri**.

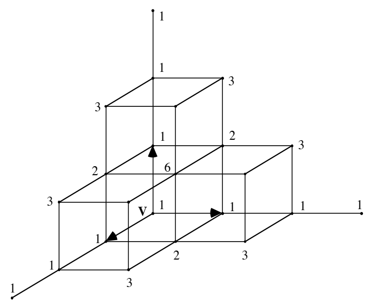
6 In un solido tridimensionale di solito si considerano unicamente i numeri dei vertici, degli spigoli e delle facce e con questi la caratteristica di Eulero risulta: $N_0-N_1+N_2=2$; ma considerando "tutto", cioè anche l'unità data dal poliedro tridimensionale, si ottiene: $N_0-N_1+N_2-N_3=1$, che è generalizzabile in qualsiasi dimensione. Si può vedere: Barra M. Giammei F., Laganà G. A., Spagnulo D, 2008, Cartesio Eulero, …, Cauchy e la formula V-S+F=2. Gli studenti con l'aiuto della storia costruiscono una dimostrazione semplice, fantasiosa e applicabile agli ipersolidi, @27, V. 9, Ed. Pagine, pp. 419–457.

- 4) Si dimostra facilmente il "piccolo teorema di Fermat"

Il teorema è già stato dimostrato guardando all'interno di $\mathbf{C^p{}_z}$* (alla sua diagonale (con **z** cubetti)). Ora, scambiando apice e pedice, guardiamo all'esterno di $\mathbf{T^z{}_p}$, ai suoi spigoli di lunghezza **p** che escono da un vertice V.



Nel Triangolo di Pascal**,** considerando le "passeggiate" che possono essere percorse sul grafo in figura, a partire dal punto **V** secondo le direzioni **a** e **b**, dopo "**quattro** passi del tipo **a**" e "**due b**", cioè con la successione **aaaabb**, si giunge nel punto H dove è indicato il coefficiente binomiale $\binom{6}{2}$= **15**, che esprime il numero degli anagrammi della parola **aaaabb**, corrispondenti sia a tutti i modi raggiungere il punto H a partire da V, sia al coefficiente di $\mathbf{a^4b^2}$ = **aaaabb** nello sviluppo di $(a+b)^6$. Con questo triangolo si può dimostrare soltanto un caso molto particolare del piccolo teorema di Fermat: $\mathbf{2^p\text{-}2 = pk}$. Ad esempio nella 5ª riga: 1=$\binom{5}{0}$, 5, 10, 10, 5, $\binom{5}{5}$=1, salvo le due unità agli estremi, tutti i numeri sono divisibili per 5 perché in: $\binom{5}{h} = \frac{5!}{h!(5-h)!}$ il numero primo 5 non può essere semplificato se non quando **h** è uguale a **5** o a **0**. Quindi: (1+5+10+10+5+1)-2= = 2^5-2 = 5k. Lo stesso in tre dimensioni ove a partire da un vertice V di un T^3, si "passeggia" secondo tre direzioni indicate dagli spigoli che escono da V.



Dopo 3 passi, i numeri:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 3 & & \\ & 3 & & 6 & & 3 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

corrispondono sia agli anagrammi delle parole con tre lettere scelte fra **a**, **b**, **c**, sia ai coefficienti di $(a+b+c)^3$, sia al numero delle passeggiate che portano ai punti raggiungibili dopo tre passi. Così ciascuna delle parole **aaa**, **bbb**, **ccc**, ha un solo anagramma, ciascuna delle parole **aab**, **aac**, **bba**, **bbc**, **cca**, **ccb**, ha 3 anagrammi e la parola **abc** ha 6 anagrammi corrispondenti al numero delle passeggiate che raggiungono con tre passi da V il punto centrale del disegno.

Analogamente in un tetraedro a **z** dimensioni, $\mathbf{T^z}_\mathbf{p}$: a partire da un vertice **V** ci sono **z** spigoli sui quali sono indicati i passi unitari di **z** tipi con i quali si costruisce un grafo a **z** dimensioni dove tutte le $\mathbf{z^p}$ parole con **p** lettere sono indicate dalle $\mathbf{z^p}$ passeggiate con **p** passi che raggiungono i punti dove sono indicati i numeri (interi) $\mathbf{\frac{p!}{n_a!\, n_b! \ldots n_z!}}$ degli anagrammi delle parole nelle quali la lettera **a** è contenuta $\mathbf{n_a}$ volte, la lettera **b** è contenuta $\mathbf{n_b}$ volte, ..., la lettera **z** è contenuta $\mathbf{n_z}$ volte (con $\mathbf{n_a+n_b+\ldots+n_z=p}$, ricordando che 0!=1). Tutti questi numeri sono multipli di **p**, che è primo, a meno che non si faccia riferimento alle parole che hanno tutte le **p** lettere uguali: **aaaa...a**, **bbbb...b**, ..., **zzzz...z**, ciascuna con un solo anagramma, corrispondente alla passeggiata che si muove da V con p passi sempre sullo stesso spigolo che porta a uno dei **z** vertici della base dove sono indicate **z** unità.

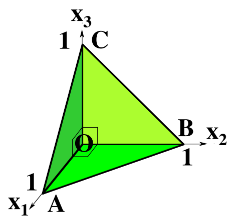
Togliendo queste parole: $\mathbf{z^p - z = ph}$. **c.d.d.**

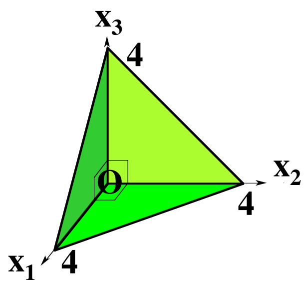
La dimostrazione è un po' lunga, ma *l'induzione e l'analogia* possono rendere più semplice sia lo sviluppo del ragionamento (tanto che in alcuni casi possono anticiparlo), sia l'intuizione del "supporto geometrico" *analogo* a quello in 2 e 3 dimensioni. L'immagine mentale guida la scelta delle parole utili per esprimere l'argomento, facilita la sua memorizzazione e rende più semplice la comprensione di altri argomenti che possono essere collegati.[7]

[7] Per un discorso molto più esteso ed un collegamento ad esempio con l'*entropia* si può vedere: Barra M., 2003, Aspetti storici e pedagogici relativi al calcolo combinatorio. Una proposta innovative che coinvolge i diagrammi ad albero, gli anagrammi e i sottoinsiemi di un insieme, *Progetto Alice,* N. 11, Vol. 4, Ed. Pagine, pp. 225 - 278.

Rappresentazione cartesiana dei tetraedri "più importanti" [8]

\# Tetraedri (trirettangoli isosceli) **rettangoli** [9] "nel **continuo**" $\mathbf{T^3(\leq s)}$

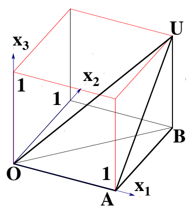


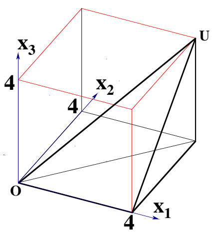


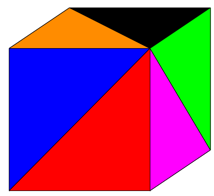
$$\mathbf{T^3(\leq 1)} = \{x=(x_1,x_2,x_3): \sum_{1}^{3} \mathbf{x_j} \leq 1,\ 0\leq x_j,\ j=1,2,3\} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3!}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} = 0{,}1666...$$

$$\mathbf{T^3(\leq 4)} = \{x=(x_1,x_2,x_3): \sum_{1}^{3} \mathbf{x_j} \leq 4,\ 0\leq x_j,\ j=1,2,3\} = \frac{\mathbf{4^3}}{\mathbf{3!}} = \frac{\mathbf{64}}{\mathbf{6}} = 10{,}666...$$

\# Tetraedri **fattoriali** "nel **continuo**"[10] $\mathbf{T^3!(s)} = T^3(s\geq)$







$$\mathbf{T^3!(1)} = T^3(1\geq) = \{x=(x_1,x_2,x_3): \mathbf{1}\geq x_1\geq x_2\geq x_3\geq \mathbf{0}\} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3!}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} = 0{,}1666...$$

$$\mathbf{T^3!(4)} = T^3(4\geq) = \{x=(x_1,x_2,x_3): \mathbf{4}\geq x_1\geq x_2\geq x_3\geq \mathbf{0}\} = \frac{\mathbf{4^3}}{\mathbf{3!}} = \frac{\mathbf{64}}{\mathbf{6}} = 10{,}666...$$

---

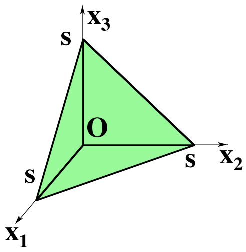
[8] Viene limitato (rispetto agli ipercubi) il collegamento con altre proprietà per dare maggiore spazio a quanto segue, che interessa maggiormente. In particolare per i tetraedri la rappresentazione cartesiana permette approfondimenti e collegamenti (credo siano in qualche caso originali) che non potrebbero essere raggiunti limitandosi ad una loro presentazione sintetica (come nei libri del grandissimo Coxeter e di molti altri autori).

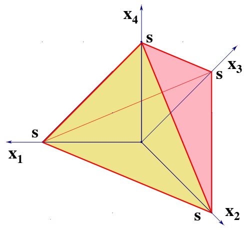
Alcuni approfondimenti e applicazioni vengono presentati negli articoli che seguono.

[9] A meno di eccezioni giustificate, chiamerò "rettangoli" i tetraedri "trirettangoli isosceli".

[10] Scusate il doppio simbolo, non ho sufficiente esperienza per stabilire quale è il migliore.

Tetraedri **regolari** "nel **continuo**" $\mathbf{T^3(s)}$

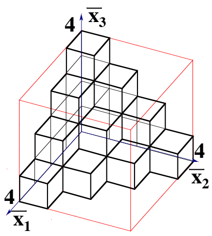


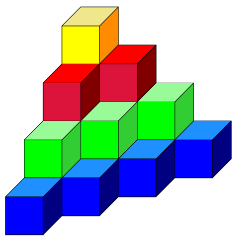


$$\mathbf{T^2(s)} = \{x=(x_1,x_2,x_3): \sum_{1}^{3} x_j = s;\ 0\le x_j;\ j=1,2,3\} = \sqrt{3}\,\frac{s^2}{2}$$

$$\mathbf{T^3(s)} = \{x=(x_1,x_2,x_3,x_4): \sum_{1}^{4} x_j = s;\ 0\le x_j;\ j=1,2,3,4\} = \sqrt{4}\,\frac{s^3}{3!}$$

Tet. **rettangoli** "a **cubetti**" $\mathbf{T^3(\le n)^* = T^3!(n)^* = T^3_n}$ (scusate i 2 simboli)



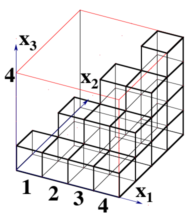


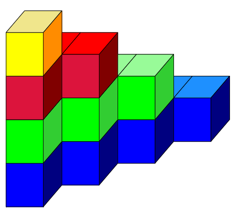
$$\mathbf{T^3(\le 4)^*} = \{x=(x_1,x_2,x_3): \sum_{1}^{3} x_j \le 4,\ x_j = \mathbf{1,2,}\ \ldots,\ j=1,2,3\} = \frac{4^{3\ge}}{3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{3!} = 20 = \mathbf{T^3_4}$$

Tetraedri **fattoriali** "a **cubetti**" $\mathbf{T^3!(4)^*} = T^3(4\ge)^*$ "$= \mathbf{T^3(\le 4)^*}$"$= \mathbf{T^3_n}$

$$\mathbf{T^3!(4)^*} = T^3(4\ge)^* = \{x=(x_1,x_2,x_3):\ \mathbf{4}\ge x_1\ge x_2\ge x_3\ge \mathbf{1},\ x_j=\mathbf{1,2,}\ \ldots,\ j=1,2,3\} =$$

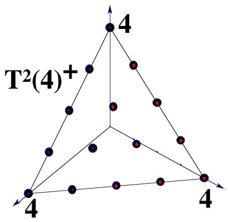
$$= \frac{4^{3\ge}}{3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{3!} = 20 = \mathbf{T^3_4} \text{ "} = \mathbf{T^3(\le 4)^*}\text{" (stesso n° di cubetti)}$$

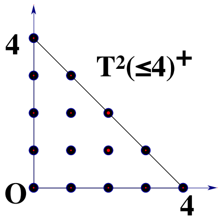




Tet. **rettangoli** $\mathbf{T^2(\le n)^+ = T^2_n}$ e tet. **regolari** $\mathbf{T^2(n)^+ = T^2_n}$ "nel **discreto**"

$\mathbf{T^2_5}$ "="





"=" $\mathbf{T^2_5}$

$$\mathbf{T^2(4)^+} = \{x=(x_1,x_2,x_3): \sum_1^3 x_j = 4;\ x_j=0,1,2,\dots,\ j=1,2,3\} = \frac{4^{2>}}{2} = \frac{(4+1)(4+2)}{2} = \mathbf{T^2_5} =$$

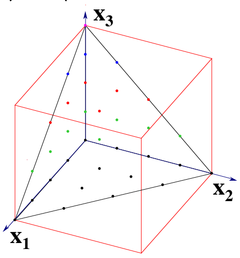
$$= \mathbf{T^2(\le 4)^+} = \{x=(x_1,x_2): \sum_1^2 x_j \le 4;\ x_j=0,1,2,\dots,j=1,2\} = \frac{5\cdot 6}{2} = \mathbf{T^2_5} = \frac{5^{2\ge}}{2}$$

$$\mathbf{T^3(n)^+} = \{x=(x_1,x_2,x_3,x_4): \sum_1^4 x_j = n;\ x_j=0,1,2,\dots,\ j=1,2,3,4\} = \frac{n^{3>}}{3!} = \mathbf{T^3_{n+1}}$$

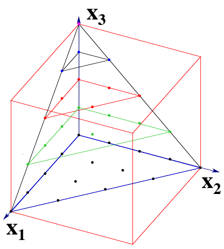
$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} = \mathbf{T^3(\le n)^+}$$

$$\mathbf{T^3(\le 4)^+} = \{x=(x_1,x_2,x_3): \sum_1^3 x_j \le 4,\ x_j=\mathbf{0,1,2},\dots,\ j=1,2,3\} = \frac{4^{3>}}{3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{3!} = \mathbf{35} = \mathbf{T^3_5}$$

$$= \binom{3+4}{3} = \binom{3+4}{4} = \mathbf{T^4(\le 3)^+} = \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \mathbf{35} = \mathbf{T^4_4}$$



$\mathbf{T^2(4)^+ = T^2_5}$



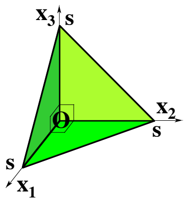
$\mathbf{T^3(\le 4)^+ = T^3_5}$

$$\mathbf{T^3(\le n)^+} = \{x=(x_1,x_2,x_3): \sum_1^3 x_j \le n,\ x_j=\mathbf{0,1,2},\dots,\ j=1,2,3\} = \mathbf{T^3_{n+1}} =$$

$$= \frac{n^{3>}}{3!} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{3!} = \binom{3+n}{3} =$$

$$= \binom{3+n}{n} = \mathbf{T^n(\le 3)^+} = \frac{4\cdot 5\cdot \dots\cdot(3+n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \dots (n-1)n} = \mathbf{T^n_4}$$

Tet. **rettangoli** in **d dimensioni** "nel **continuo**" $\mathbf{T^d(\leq s)}$

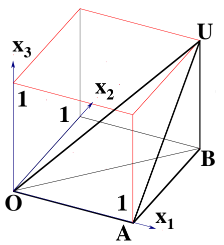


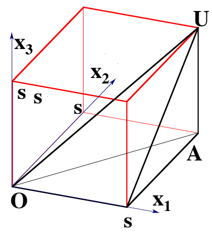
$\mathbf{T^3(\leq s)}$

$$\mathbf{T^d(\leq 1)}=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_d): \sum_1^d \mathbf{x_j} \leq 1,\ 0\leq x_j,\ j=1,2,\ldots,d\}= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{d!}}$$

$$\mathbf{T^d(\leq s)} =\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_d): \sum_1^d \mathbf{x_j} \leq s,\ 0\leq x_j,\ j=1,2,\ldots,d\}= \frac{\mathbf{s^d}}{\mathbf{d!}}$$

Tetraedri **fattoriali** in **d dimensioni** "nel **continuo**" $\mathbf{T^d(s\geq) = T^d!(s)}$

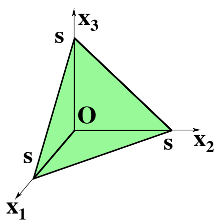




$$\mathbf{T^d!(1)}=T^d(1\geq)=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_d): \mathbf{1}\geq x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_d\geq 0\}= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{d!}}$$

$$\mathbf{T^d!(s)}=T^d(s\geq) =\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_d): \mathbf{s}\geq x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_d\geq 0\}= \frac{\mathbf{s^d}}{\mathbf{d!}}$$

Tetraedri **regolari** in **d dimensioni** "nel **continuo**" $\mathbf{T^d(s)}$



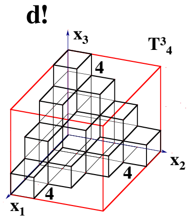
$\mathbf{T^2(s)}$

$$\mathbf{T^d(s)} = \{x=(x_1,\ldots,x_{d+1}): \sum_1^{d+1} \mathbf{x_j = s};\ 0\leq x_j;\ j=1,2,\ldots,d+1\}=\sqrt{\mathbf{d+1}}\,\frac{\mathbf{s^d}}{\mathbf{d!}}=\sqrt{\mathbf{d+1}}\,\mathbf{T^d(\leq s)}$$

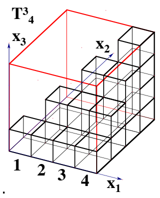
Tet. **rettangoli** "a **cubetti**" in **d dimensioni** $T^d(\leq n)^*$

$$T^d(\leq n)^* = \{x=(x_1,x_2,\dots,x_d): \sum_1^d x_j \leq n,\ x_j = 1,2,\ \dots,\ j=1,2,\dots,d\} = \frac{n^{d\geq}}{d!} =$$

$$= \frac{n\cdot(n+1)\cdots(n+d-1)}{d!} = T^d_n,\ n\in\mathbf{N}. \qquad \text{(v. oltre)}$$



T^3_4 .



Tetraedri **fattoriali** "a **cubetti**" in **d dimensioni** $T^d(n\geq)^*$

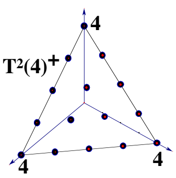
$$T^d!(n)^* = T^d(n\geq)^* = \{x=(x_1,\dots,x_d):\ n\geq x_1\geq\dots\geq x_d\geq 1,\ x_j = 1,2,\dots,\ j=1,2,\dots,d\} = \frac{n^{d\geq}}{d!} =$$

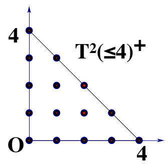
$$= \frac{n\cdot(n+1)\cdots(n+d-1)}{d!} = T^d_n,\ n\in\mathbf{N}.$$

Tetraedri **rettangoli** $T^d(\leq n)^+$ e **regolari** $T^d(n)^+$ "nel **discreto**" in **d dimen**.

(sono "i migliori" per determinare molte proprietà in tutti i tetraedri)

T^2_5 "="





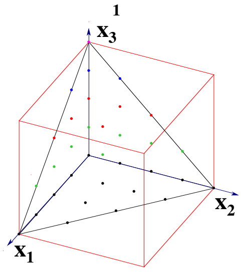
"=" T^2_5

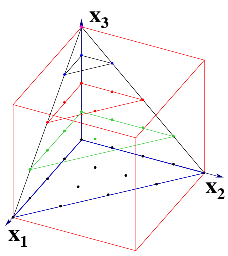
$$T^d(n)^+ = \{x=(x_1,x_2,\dots,x_{d+1}): \sum_1^{d+1} x_j = n,\ x_j = 0,1,2,\ \dots,\ j=1,2,\dots,d+1\} = \frac{n^{d>}}{d!} =$$

$$= \frac{(n+1)\cdots(n+d)}{d!} = T^d_{n+1} =$$

$$= T^d(\leq n)^+ = \{x=(x_1,x_2,\dots,x_d): \sum_1^d x_j \leq n,\ x_j = 0,1,2,\ \dots,\ j=1,2,\dots,d\} \quad \text{(v. oltre)}$$

$T^2(4)^+ = T^2_5$





$T^3(\leq 4)^+ = T^3_5$

Perché tanti tipi di tetraedri?

Per molte dimostrazioni conviene "scaricare" alcune difficoltà nei simboli, dove è più semplice "sopportare" tali difficoltà, che vengono così anticipate.

I tetraedri definiti "nel continuo" permettono di capire meglio alcune proprietà collegate alla forma e di avere una immagine della collocazione dei punti a coordinate intere che contengono, che definiscono i tetraedri "nel discreto". La determinazione del numero di tali punti (nodi) è molto semplice, perché (come vedremo in seguito), una volta definita la rappresentazione cartesiana dei tetraedri, viene sfruttata unicamente la definizione di coefficiente binomiale, e da questo numero si determina anche, e sempre molto facilmente, la misura dei poliedri definiti nel continuo che contengono tali nodi.

Il rapporto fra i due ambienti: discreto e continuo, è molto importante, perché permette di estendere a entrambi gli ambienti le proprietà determinate più semplicemente in uno dei due casi. Comunque la misura degli ipertetraedri definiti nel continuo è molto semplice da individuare, anche indipendentemente dal rapporto fra continuo e discreto. Tale misura, cioè il "volume" dei tetraedri, si calcola più semplicemente nel caso degli ipertetraedri fattoriali ed è semplicissimo capire che la stessa misura vale anche per i tetraedri rettangoli. I primi vengono definiti nel continuo principalmente per comprendere meglio i loro equivalenti nel discreto, decisamente utili per calcolare semplicemente e in più modi le somme delle potenze degli interi. Per ottenere tali somme è più semplice fare riferimento ai tetraedri "a cubetti" che possono rappresentare un caso intermedio fra i tetraedri definiti nel discreto e nel continuo, in quanto è possibile "contare" i cubetti unitari che contengono e perché il loro numero corrisponde al volume di tali tetraedri.

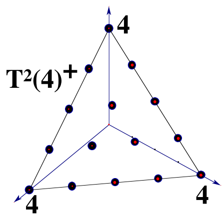
La rappresentazione cartesiana dei tetraedri, oltre a permettere una loro definizione molto semplice e a ritrovare molte delle proprietà determinate attraverso la loro definizione sintetica, permette di collegare semplicemente i tetraedri rettangoli con i tetraedri regolari e di determinare facilmente i volumi di questi ultimi. Queste misure sono utili per calcolare "banalmente" gli angoli diedri dei tetraedri regolari, che altrove (v. oltre: AMM)) vengono determinati con il calcolo matriciale, giudicando tale metodo come "il più semplice". I tetraedri rettangoli permettono anche di definire insiemisticamente gli ipercubi e questo collegamento è molto utile per definire la misura delle sezioni e delle porzioni degli ipercubi che corrispondono alle densità, alla funzione di ripartizione e alle probabilità, deteminate attraverso un unico teorema (v. oltre) che vale nello stesso tempo sia nel discreto che nel continuo.

Importanza della rappresentazione cartesiana ortogonale dei tetraedri

Soltanto poche parole per un discorso che verrà approfondito successivamente.

$$\mathbf{T^2(4)}^+=\{x=(x_1,x_2,x_3): \sum_{1}^{3}\mathbf{x_j} = 4,\ x_j = \mathbf{0,1,2,}\ ...,\ j=1,2,3\}$$

Dall'espressione cartesiana di $\mathbf{T^2(4)}^+$ si capisce che si tratta della *proiezione* da un punto di un $\mathbf{T^1(4)}^+$, ritrovando così la definizione di triangolo usata nella scheda di auto-apprendimento. Infatti $\sum_{1}^{3}\mathbf{x_j}=4$, uguagliando x_3 a: 0, 1, 2, 3, 4, fa ottenere rispettivamente $x_1+x_2=4$, $x_1+x_2=3$, $x_1+x_2=2$, $x_1+x_2=1$ e $x_1+x_2=0$. Quindi $\sum_{1}^{3}\mathbf{x_j}=4$, nelle condizioni indicate, rappresenta l'unione di $\mathbf{T^1(4)}^+$ con $\mathbf{T^1(3)}^+$, $\mathbf{T^1(2)}^+$, $\mathbf{T^1(1)}^+$ e $\mathbf{T^1(0)}^+$, rappresenta cioè la *proiezione* nel discreto dal punto (0,0,3) di un $\mathbf{T^1(4)}^+$ (posto alla base del disegno che segue).



$\mathbf{T^2(4)^+ = T^2_5}$

Ed è abbastanza chiaro che il discorso può essere adattato facilmente ad un tetraedro in dimensione qualsiasi, sia nel discreto, sia nel continuo.

Sempre dall'espressione cartesiana si capisce che $\mathbf{T^2(4)}^+$ ha 3 vertici: (3,0,0), (0,3,0) e (0,0,3) che si ottengono considerando valori nulli per due coordinate. Quando invece una sola coordinata è nulla si ottengono, sempre nelle condizioni indicate, i $\binom{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}$ lati: $x_1+x_2=4$, $x_1+x_3=4$, e $x_2+x_3=4$, e $\binom{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}=\binom{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ indica banalmente che una sola coordinata nulla su tre, corrisponde ad avere due coordinate su tre diverse da zero.

Infine si può capire che quanto detto si può adattare per affermare che in: $\mathbf{T^d(n)}^+=\{x=(x_1,x_2,...,x_{d+1}): \sum_{1}^{d+1}\mathbf{x_j}=n,\ x_j=\mathbf{0,1,2,}...,\ j=1,2,...,d+1\}$, il n° dei $\mathbf{T^h(n)}^+$ è $\binom{\mathbf{d+1}}{\mathbf{h+1}}$, tanti quanti sono i modi di considerare h+1 coordinate da sommare diverse da zero e le altre nulle, ritrovando così quanto già indicato con $\mathbf{T^{h;d}}$.

N° dei punti a coordinate intere contenuti in $T^d(n)^+$ e in $T^d(\leq n)^+$

Teorema 1): $\mathbf{T^d(n)^+}=\{x=(x_1,x_2,...,x_{d+1}): \sum_1^{d+1}\mathbf{x_j}=n,\ x_j=\mathbf{0,1,2,}\ ...,\ j=1,2,...,d+1\}=$

$$=\frac{\mathbf{n^{d>}}}{\mathbf{d!}}=\binom{\mathbf{n+d}}{\mathbf{d}}=\frac{\mathbf{(n+1)\cdots(n+d)}}{\mathbf{d!}}=\mathbf{T^d_{n+1}}$$

Iniziamo da un esempio. Sappiamo che gli anagrammi della parola "che è scritta" usando **3** puntini e **2** barrette: . . . | |, sono: $\binom{3+2}{2}=\binom{5}{2}=10$.

```
...| |   ..|.|   ..| |.   .|..|   .|.|.   .| |..   |...|   |..|.   |.|..   | |...
3+0+0=2+1+0=2+0+1=1+2+0=1+1+1=1+0+2=0+3+0=0+2+1=0+1+2=0+0+3
```

Interpretando il numero di puntini:

- prima della prima barretta, come il valore di x_1
- fra la prima e la seconda barretta, come il valore di x_2
- dopo la seconda barretta, come il valore di x_3

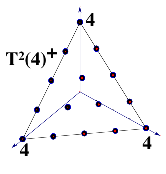
si ottengono tutti i modi per ottenere somma **3** con **3** addendi.

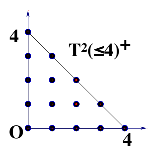
Quindi, il numero dei modi per ottenere, nelle condizioni poste: $\sum_1^{d+1}\mathbf{x_j}=n$, cioè somma n con d+1 addendi, è dato dagli anagrammi della parola "scritta" con **n puntini** e **d barrette** (queste individuano **d+1** spazi), che sono:

$$\binom{\mathbf{n+d}}{\mathbf{d}}=\frac{\mathbf{(n+1)\cdots(n+d)}}{\mathbf{d!}}=\frac{\mathbf{n^{d>}}}{\mathbf{d!}}=\mathbf{T^d_{n+1}} \qquad \textbf{c.d.d.}$$

Teorema 2): $\mathbf{T^d(n)^+}$ $=\{x=(x_1,x_2,...,x_{d+1}): \sum_1^{d+1}\mathbf{x_j}=n,\ x_j=\mathbf{0,1,2,}\ ...,\ j=1,2,...,d+1\}=$

$$=\mathbf{T^d_{n+}1}=\mathbf{T^d(\leq n)^+}=\{x=(x_1,x_2,...,x_d): \sum_1^{d}\mathbf{x_j}\leq n,\ x_j=\mathbf{0,1,2,}\ ...,\ j=1,2,...,d\}$$

$\mathbf{T^2_5}$ "=" 



"=" $\mathbf{T^2_5}$

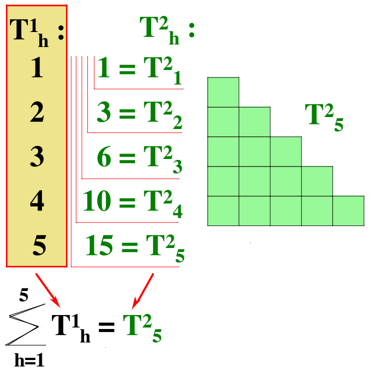
1) per somma **s** con **d** addendi occorrono **d-1** barrette,

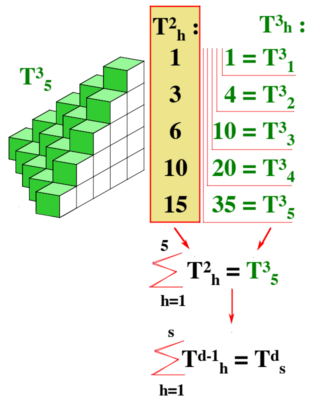
2) somma **≤s** con **d** addendi, si aggiunge una barretta per avere **dopo**, da **zero** ad **s** puntini, in modo da avere **prima,** in tutti i modi, un numero **≤s** di puntini e con essi una somma **≤s**. **c.d.d.**

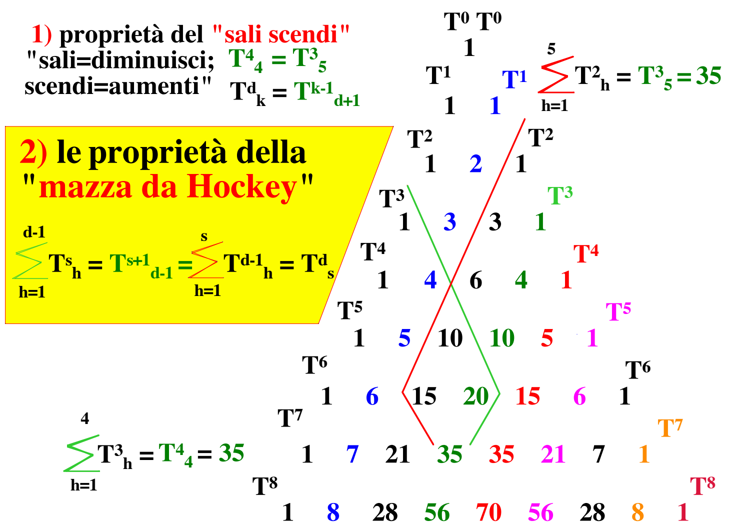
Formule per collegare sia le misure dei tetraedri definiti nel discreto, sia le loro proprietà con i valori dei coefficienti binomiali[11]

$$T^d(\le n)^+ = T^d(n)^+ = T^n(\le d)^+ = T^n(d)^+ = T^d_{n+1} = T^n_{d+1} = \binom{d+n}{d} = \binom{d+n}{n}$$

$$\binom{n}{h} = T^h(n-h)^+ = T^{n-h}(h)^+ = T^h_{n-h+1} = T^{n-h}_{h+1} = \binom{n}{n-h};\quad T^d_n = T^d(n-1)^+$$



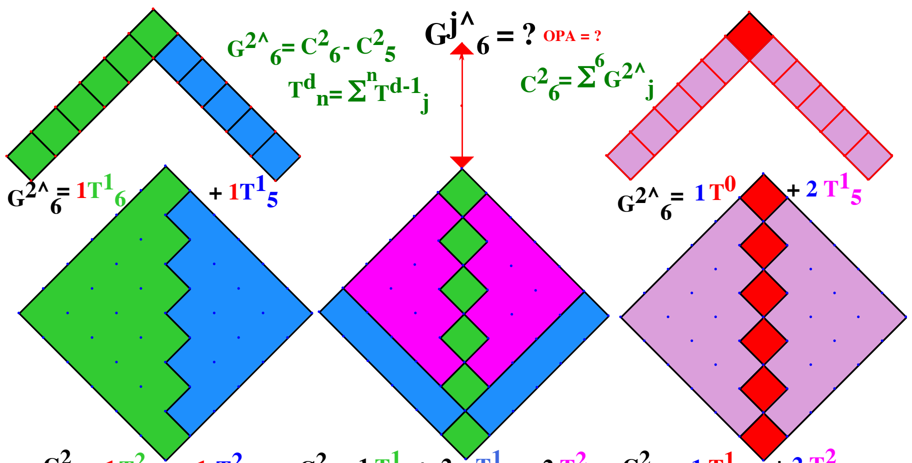




sommando i numeri su una diagonale, con una certa direzione, fino ad una certa riga si ottiene il numero "più in basso nella direzione opposta".

[11] Altre proprietà sono indicate negli altri 7 articoli dedicati ai tetraedri in "questa Alice".

***Yes you can*: costruisci varie formule per sommare i quadrati e i cubi degli interi. Per le potenze qualsiasi: molti modi nuovi e nuovi numeri**[12]



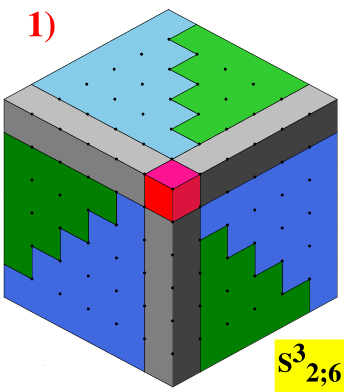
$C^2_6 = 1T^2_6 + 1T^2_5$ $C^2_6 = 1T^1_6 + 2T^1_5 + 2T^2_4$ $C^2_6 = 1T^1_6 + 2T^2_5$

$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$

$\Sigma^6 C^2_h = 1T^{2+1}_6 + 1T^{2+1}_5$ $= T^2_6 + 2T^2_5 + 2T^3_4$ $\Sigma^6 C^2_h = 1T_6^{1+1} + 2T^{2+1}_5$

$91 = 56 + 35$ $91 = 21 + 30 + 40$ $91 = 21 + 70$

1)



$G^{3\wedge}_6 = T^0 + 3T^1_5 + 3T^2_5 + 3T^2_4 = 91$

$C^3_6 = T^1_6 + 3T^2_5 + 3T^3_5 + 3T^3_4 = 216 = \Sigma^6 G^{3\wedge}_h =$

$= 6 + 45 + 105 + 60 = 216$

$\Sigma^6 C^3_h = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 441 = S^3_{1;6}$

$= T^{1+1}_6 + 3T^{2+1}_5 + 3T^{3+1}_5 + 3T^{3+1}_4 =$

$= 21 + 105 + 210 + 105 = 441$

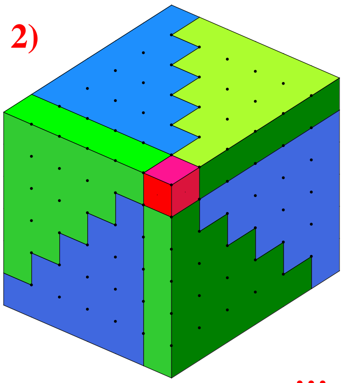
$S^3_{2;6} = \Sigma^6 S^3_{1;h} = T^{1+2}_6 + 3T^{2+2}_5 + 3T^{3+2}_5 + 3T^{3+2}_4 =$

$= 1 + 9 + 36 + 100 + 225 + 441 = 812 = 56 + 3\cdot 70 + 3\cdot 126 + 3\cdot 56$

!!! $S^3_{k;6} = \Sigma^6 S^3_{k-1;h} = T^{1+k}_6 + 3T^{2+k}_5 + 3T^{3+k}_5 + 3T^{3+k}_4$

[12] Barra M., 2009, ... Numeri Euleriani, Box-numbers, Numeri ... somme delle potenze degli interi..., *Progetto Alice,* N. 28, Vol. 10, Ed. Pagine, 65-115.

2)



$G^{3\wedge}_6 = T^0 + 6\,T^2_5 = 91$

$C^3_6 = T^1_6 + 6\,T^3_5 = 216 = \sum^{6} G^{3\wedge}_h =$

$= 6 + 6 \cdot 35$

$S^3_{1;6} = T^{1+1}_6 + 6\,T^{3+1}_5 =$

$= 21 + 420 = 441$

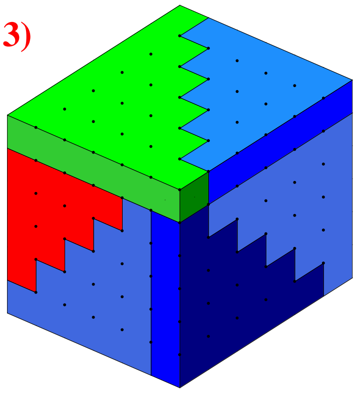
$S^3_{2;6} = T^{1+2}_6 + 6\,T^{3+2}_5$

!!!

$S^3_{k;6} = T^{1+k}_6 + 6\,T^{3+k}_5$

[13]

3)



$G^{3\wedge}_6 = 1T^2_6 + 4\,T^2_5 + 1\,T^2_4 = 91$

$C^3_6 = 1T^3_6 + 4\,T^3_5 + 1\,T^3_4 = \sum^{6} G^{3\wedge}_h =$

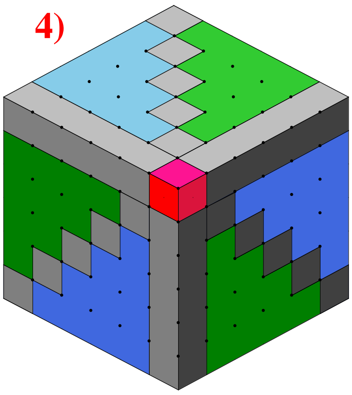
$= 56 + 140 + 20 = 216$

$S^3_{1;6} = \sum^{6} C^3_h = 1\,T^{3+1}_6 + 4\,T^{3+1}_5 + 1\,T^{3+1}_4 =$

$= 441 = 126 + 280 + 35$

$S^3_{k;6} = 1\,T^{3+k}_6 + 4\,T^{3+k}_5 + 1\,T^{3+k}_4$

4)



$G^{3\wedge}_6 = 1T^0 + 6\,T^1_5 + 6\,T^2_4 = 91$

$C^3_6 = 1T^1_6 + 6\,T^2_5 + 6\,T^3_4 = 216 = \sum^{6} G^{3\wedge}_h$

$= 6 + 90 + 120 = 216$

$\sum^{6} C^3_h = 1\,T^{1+1}_6 + 6\,T^{2+1}_5 + 6\,T^{3+1}_4 = 441 =$

$= 21 + 210 + 210 = 441$

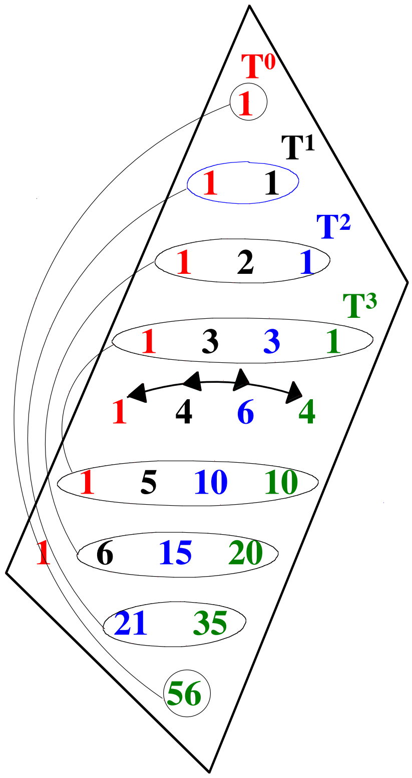
$S^3_{k;6} = 1\,T^{1+k}_6 + 6\,T^{2+k}_5 + 6\,T^{3+k}_4$

---

[13] I due esempi che seguono vengono approfonditi, "qui" in @32, in "tetraedri fattoriali..., n[i] Eulero e box-numbers".

Inventati con semplicità "nuove" formule e "nuovi" teoremi. Guarda gli esempi, formula ipotesi, verificale fino a credere "abbastanza" che siano valide, per avere una "spinta" per dimostrarle o generalizzarle

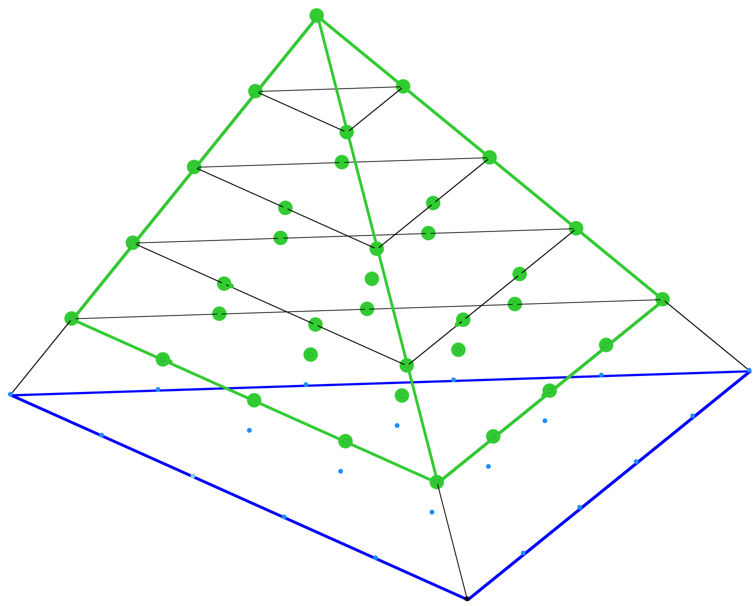
Proprietà (esiste?) delle "righe coniugate" in un TA (Triang. Aritmetico)



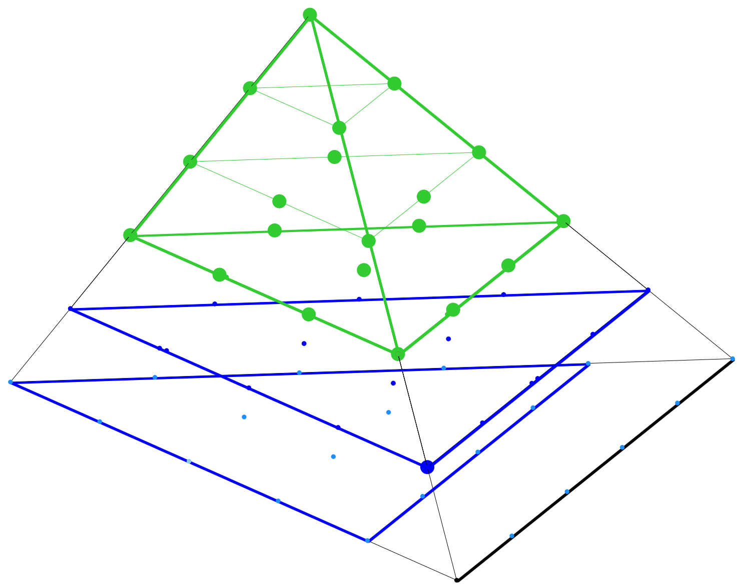
56 ottenuto in più modi

$$56 \cdot 1 = 1 \cdot 35 + 1 \cdot 21 = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 15 + 1 \cdot 6 = 1 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 1 =$$
$$= 1 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 1 =$$
$$= 6 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 20 \cdot 1 = 21 \cdot 1 + 35 \cdot 1 = 56 \cdot 1$$

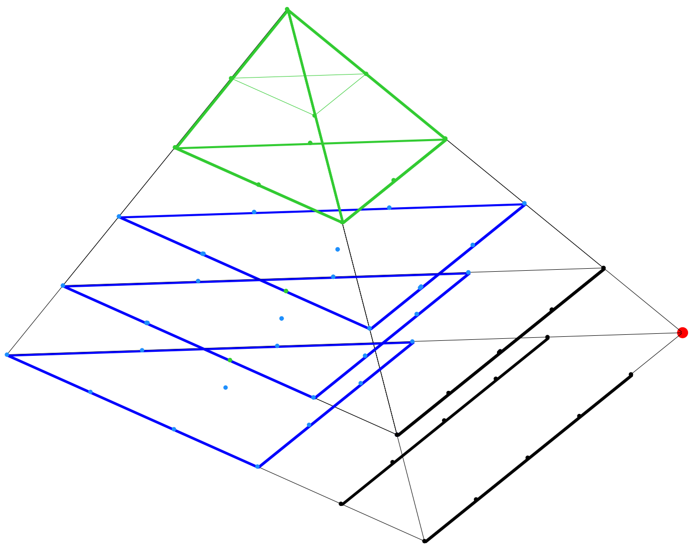
$$T^{3}_{6} = 1T^{3}_{5} + 1T^{2}_{6} = 1(T^{3}_{4} + T^{2}_{5}) + 1(T^{2}_{5} + T^{1}_{6}) = 1T^{3}_{4} + 2T^{2}_{5} + 1T^{1}_{6} = 1T^{3}_{3} + 3T^{2}_{4} + 3T^{1}_{5} + 1T^{0} =$$
$$= 1T^{3}_{2} + 4T^{2}_{3} + 6T^{1}_{4} + 4T^{0} = 1T^{3}_{1} + 5T^{2}_{2} + 10T^{1}_{3} + 10T^{0} = 1T^{3}_{1} + 5T^{2}_{2} + 10T^{1}_{3} + 10T^{0} =$$
$$= 6T^{2}_{1} + 15T^{1}_{2} + 20T^{0} = 21T^{1}_{1} + 35T^{0} = 56T^{0}$$



$T^3_6 = 1T^3_5 + 1T^2_6$

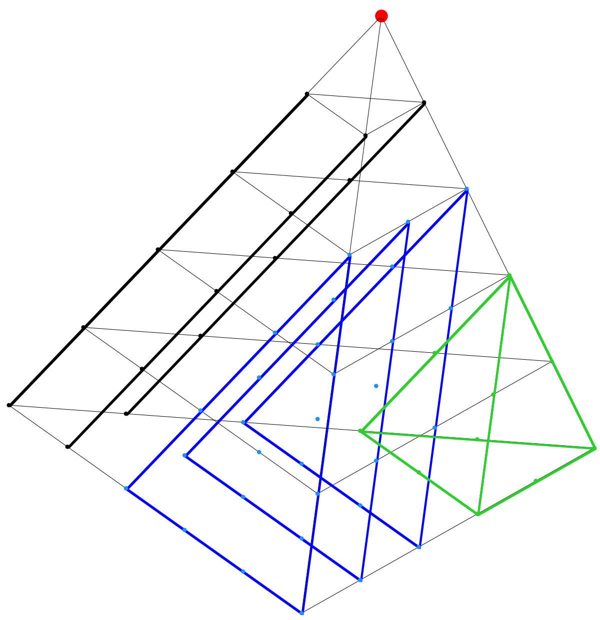


$T^3_6 = 1T^3_4 + 2T^2_5 + 1T^1_6$



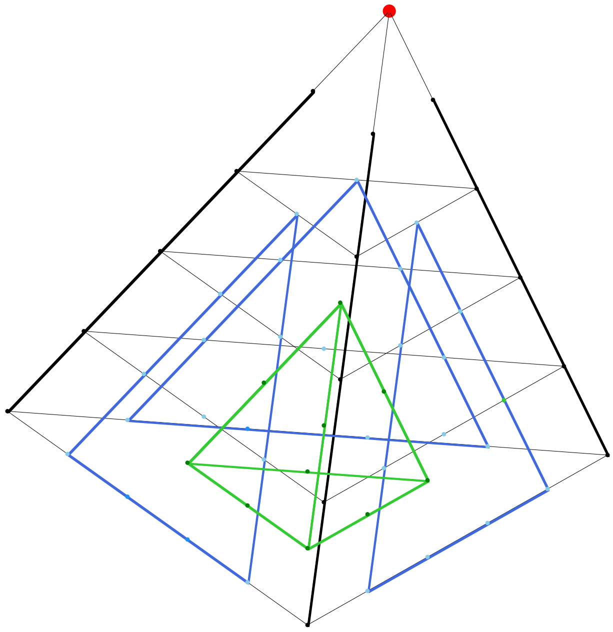
$T^3_6=1T^3_3+3T^2_4+3T^1_5+1T^0$

(lo stesso se il tetraedro viene girato)

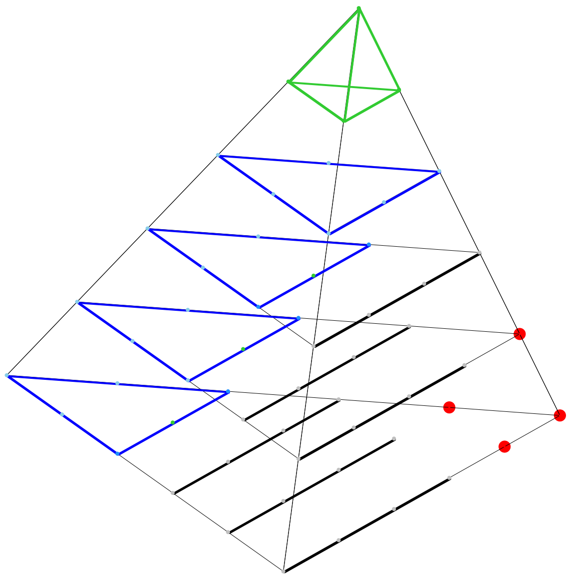


$T^3_6=1T^0+3T^1_5+3T^2_4+1T^3_3$

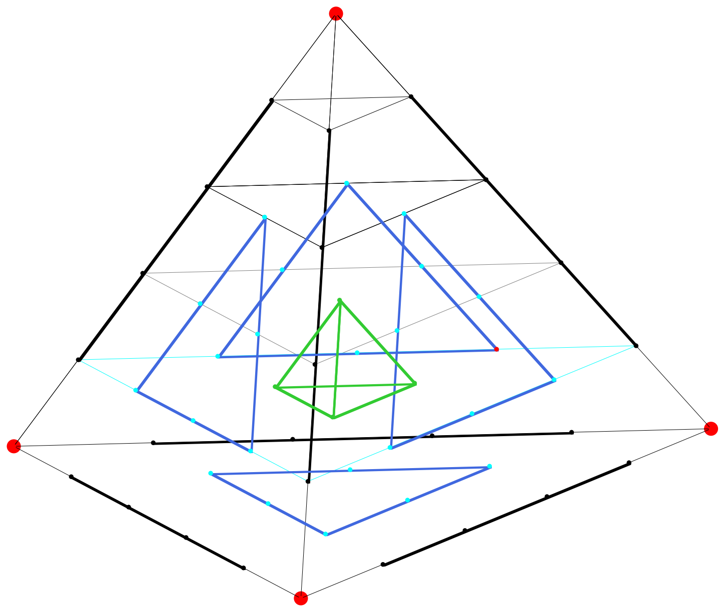
e, in altro modo:



$$T^3_6=1T^0+3T^1_5+3T^2_4+1T^3_3$$

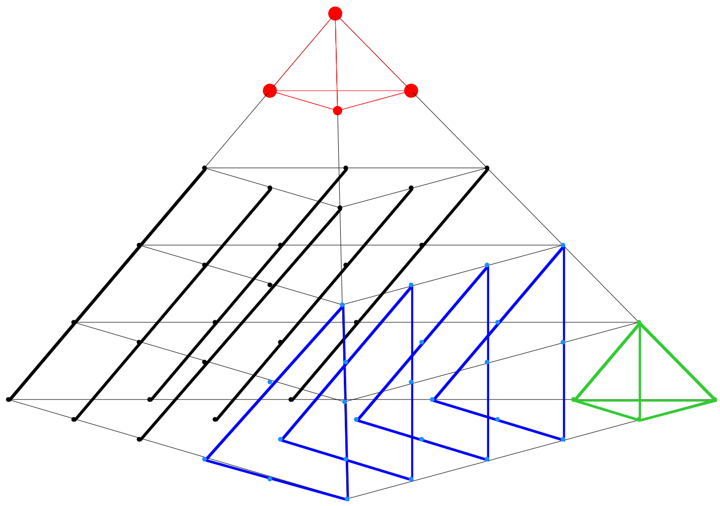


$$T^3_6=1T^3_2+4T^2_3+6T^1_4+4T^0$$

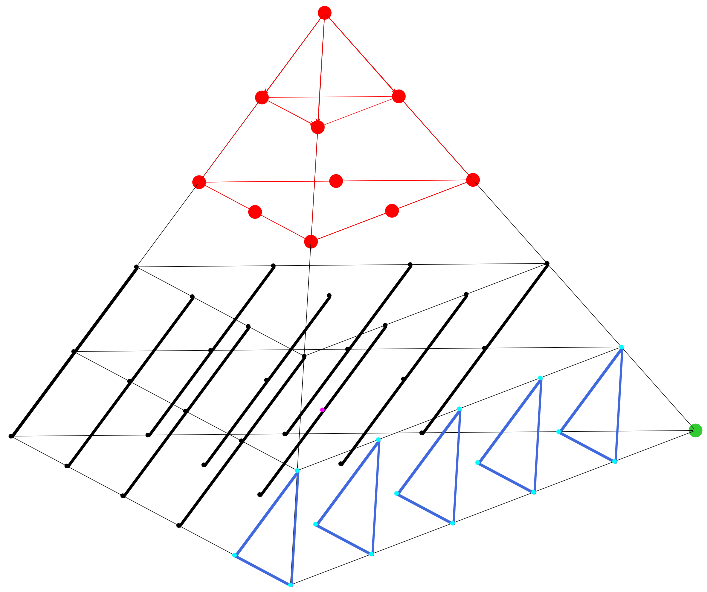


$$T^3_6=4T^0+6T^1_4+4T^2_3+1T^3_2$$

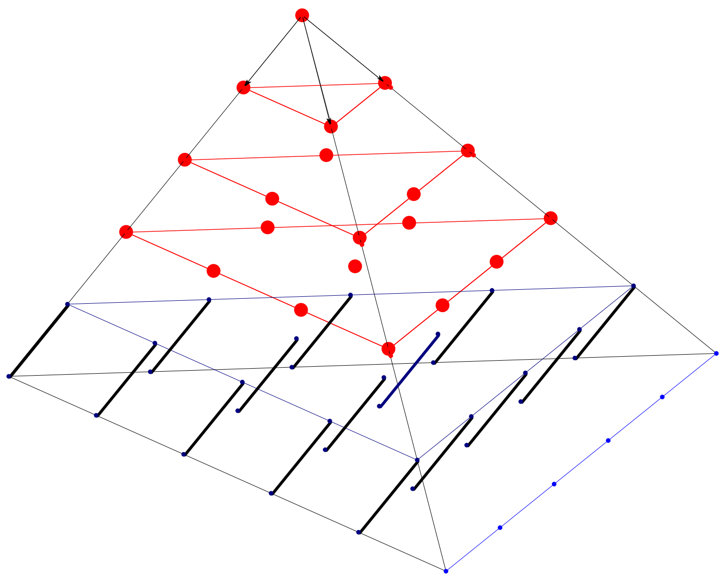
e in un altro modo:



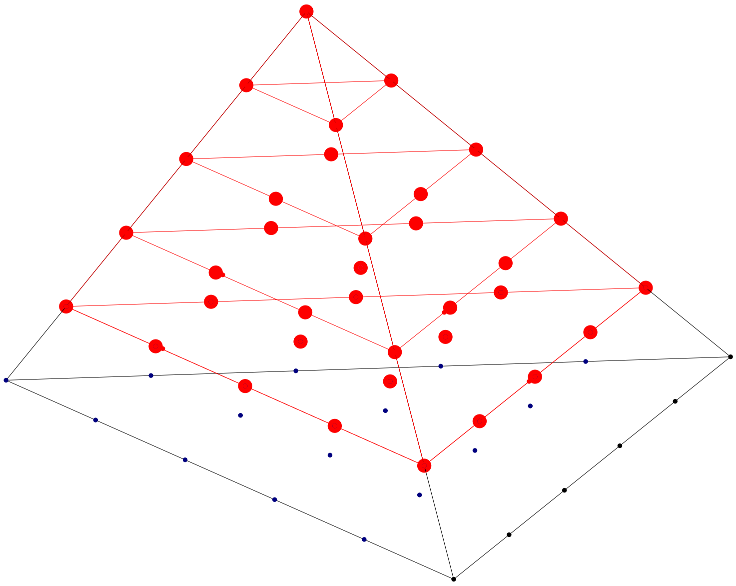
$$T^3_6=4T^0+6T^1_4+4T^2_3+1T^3_2$$



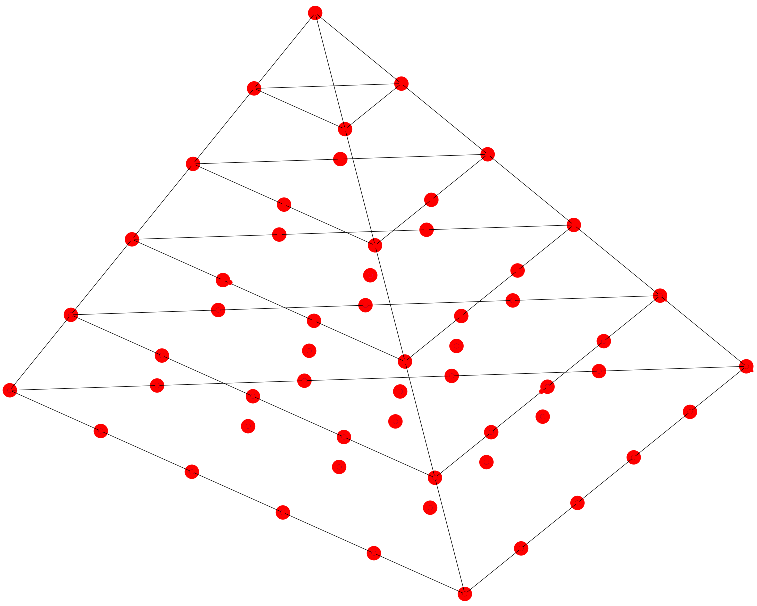
$$T^3_6=10T^0+10T^1_3+6T^2_2+1T^3_1$$



$$T^3_6=20T^0+15T^1_2+6T^2_1+(1T^3_0)$$



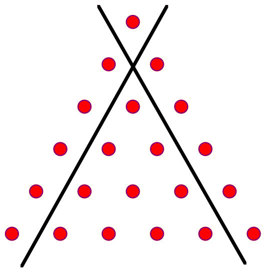
$T^3_6=35T^0+21T^1_1$



$T^3_6=56T^0$ [14]

[14] Altri modi si possono ottenere sommando e sottraendo gli altri coefficienti.

Dalle immagini, alle ipotesi, alle argomentazioni e alle dimostrazioni



$T^2{}_6 = T^0 + 2T^1{}_5 + T^2{}_4$

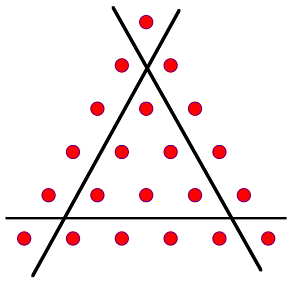
La seguente formula è giusta?

$$\mathbf{T^d{}_n = T^0 + \binom{d}{1} T^1{}_{n-1} + \binom{d}{2} T^2{}_{n-2} + \binom{d}{3} T^3{}_{n-3} + \ldots + \binom{d}{d} T^d{}_{n-d}}$$

dove ovviamente $T^h{}_m = 0$ per $m \leq 0$.

Traduci la formula esprimendola unicamente attraverso i simboli dei tetraedri e successivamente, traducila di nuovo servendoti unicamente dei simboli dei coefficienti binomiali.

Argomenta o dimostra l'eventuale validità della formula.



$T^2{}_6 = T^0 + 2T^1{}_4 + T^2{}_3$

La seguente formula è giusta?

$$\mathbf{T^d{}_n = \binom{d+1}{1} T^0 + \binom{d+1}{2} T^1{}_{n-2} + \binom{d+1}{3} T^2{}_{n-3} + \binom{d+1}{4} T^3{}_{n-4} + \ldots + \binom{d+1}{d+1} T^d{}_{n-(d+1)}}$$

dove ovviamente vale sempre che $T^h{}_m = 0$ per $m \leq 0$.

Traduci la formula esprimendola unicamente attraverso i simboli dei tetraedri e successivamente, traducila di nuovo servendoti unicamente dei simboli dei coefficienti binomiali.

Argomenta o dimostra l'eventuale validità della formula.

Triangoli aritmetici generalizzati (TAG_f): forniscono il **n° dei modi** per ottenere somma **s** con **d** dadi con **f** facce, che hanno i valori: **0**,**1**,**2,** ... ,**e=f-1**

$$\binom{d}{s}_2 = \binom{d}{s},\ \binom{d}{s}_3,\ \dots,\ \binom{d}{s}_6,\ \dots,\ \binom{d}{s}_f,\ \dots$$

TAG_2= TA <u>**f = 2, EVENTI, facce: 0 1.**</u> $\binom{d}{s}_2 = \binom{d}{s}$:

Somme: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

0 **1** 0 . . . . . .
0 **1** **1** 0 . . . . .
0 **1** **2** **1** 0 . . . .
0 **1** **3** **3** **1** 0 . . .
0 **1** **4** **6** **4** **1** 0 . .

TAG_3 <u>**f = 3, facce: 0 1 2.**</u> $\binom{d}{s}_3$:

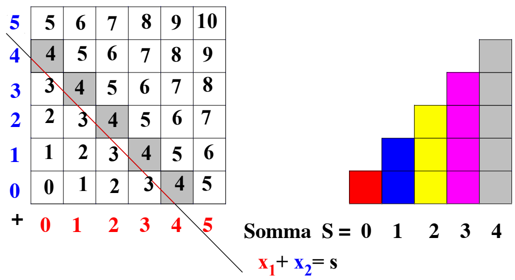
Somme: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

… 0 0 **1** 0 0 …
… 0 0 **1** **1** **1** 0 0 ...
… 0 0 **1** **2** **3** **2** **1** 0 0 ...
… 0 0 **1** **3** **6** **7** **6** **3** **1** 0 0 …
… 0 0 **1** **4** **10** **16** **19** **16** **10** **4** **1** 0 0 …

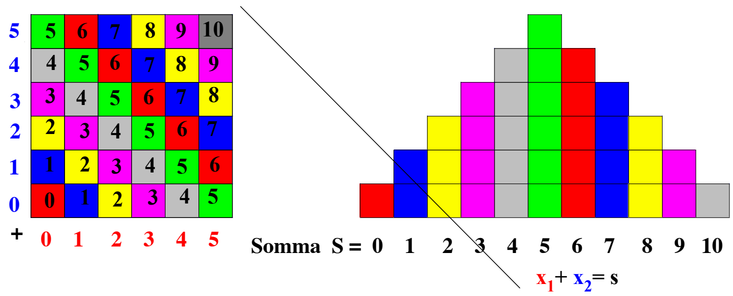
… DADI CLASSICI TAG_6 <u>**f = 6, facce: 0 1 2 3 4 5.**</u> $\binom{d}{s}_6$:

Somme: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

… 0 0 **1** 0 0 …
… 0 0 **1** **1** **1** **1** **1** **1** 0 0 …
… 0 0 **1** **2** <u>**3 4 5 6 5 4**</u> **3** **2** **1** 0 0 …
… 0 0 **1** **3** **6** **10** **15** **21** **25** <u>**27**</u> **27** **25** **21** **15** **10** **…**
… 0 0 **1** **4** **10** **20** **35** **56** **80** **104** **125** **140** **146** **140** **125** **…**



Per due dadi:

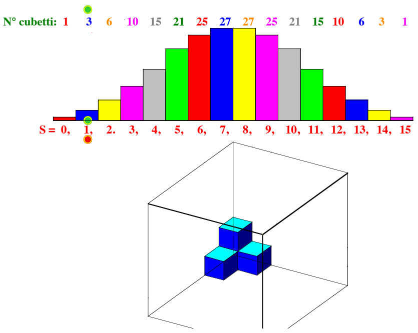


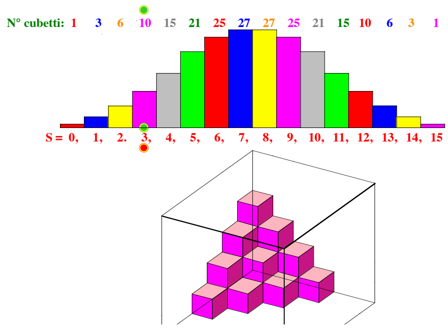
Più in generale ogni coefficiente dei triangoli aritmetici generalizzati (**TAG**) è la somma di **f** numeri della riga precedente. Es.: **27 = 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4**. Il motivo è semplice: il numero di modi per ottenere somma 7 con 3 dadi, $\binom{3}{7}_6$, che assumono i 6 valori: 0, 1, 2, 3, 4, 5 si ottiene sse, con 2 dadi fissati, si ottengono le somme: 7-0, 7-1, 7-2, 7-3, 7-4, 7-5, e poi e in un sol modo, con il terzo dado si ottiene quello che manca per avere somma 7, cioè rispettivamente: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Quindi il numero di modi per ottenere somma **7** con **3** dadi si ottiene sommando il numero di modi per ottenere con **2** dadi le somme 7, 6, 5, 4, 3, 2: $\binom{3}{7}_6 = \binom{2}{7}_6 + \binom{2}{6}_6 + \binom{2}{5}_6 + \binom{2}{4}_6 + \binom{2}{3}_6 + \binom{3}{2}_6 = 27.$

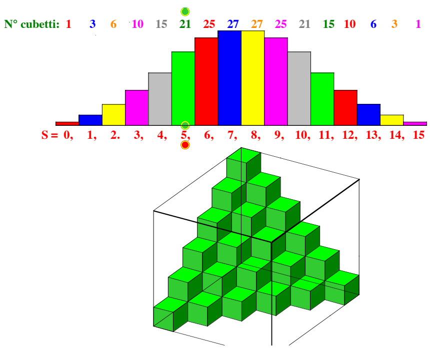
Gli stessi valori $\binom{3}{s}_6$ si ritrovano per lo stesso motivo in: $(x^0+x^1+\ldots x^5)^3=$

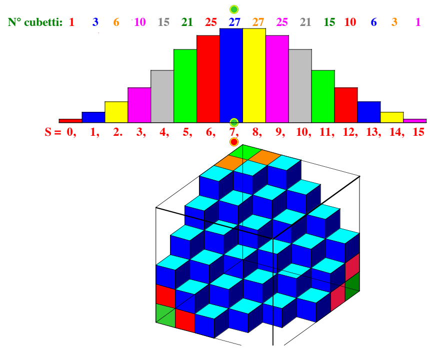
$=x^0+3x^1+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+25x^6+27x^7+27x^8+25x^9+21x^{10}+15x^{11}+10x^{12}+6x^{13}+3x^{14}+x^{15}$

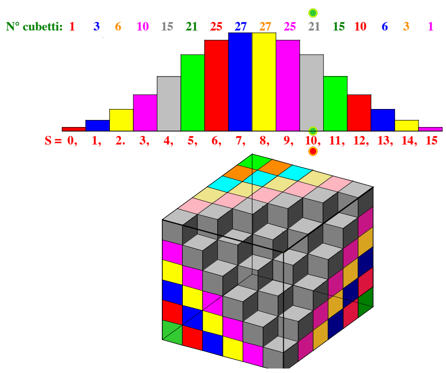
In generale: $(\sum_0^{e} x^j)^d = \sum_0^{de} \binom{d}{s}_f x^s$. Dividendo per 6^3, si ottiene la distribuzione di probabilità della somma **s** di **3** dadi con **6** facce che possono assumere i valori 0, 1, 2, 3, 4, 5: $\mathbf{p_{3;6}(s)}=\binom{3}{s}_6 / 6^3$, che traduce i disegni seguenti:

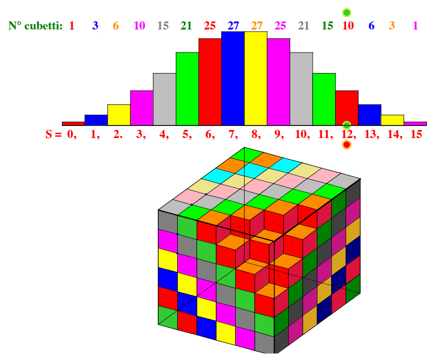








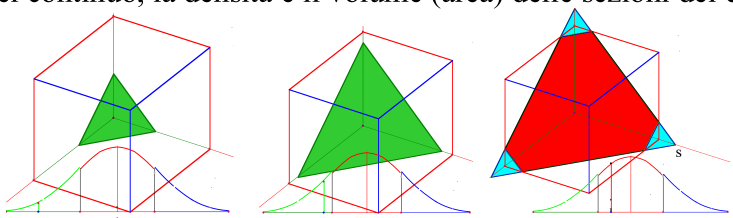


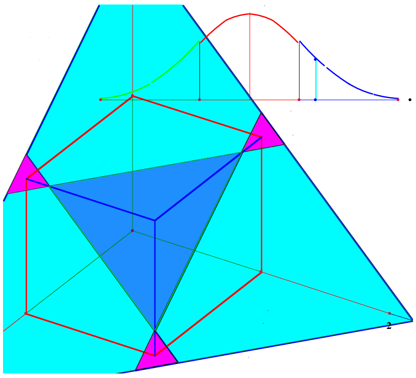


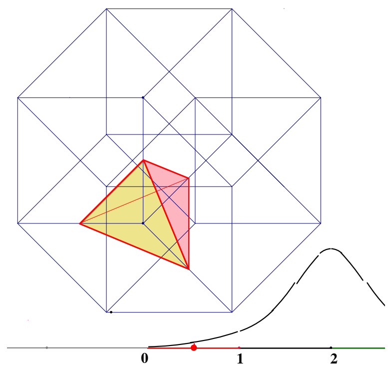
In generale: somma **s** con **d** dadi con **f** facce, che assumono i valori: **0**, **1**, **2**,…, **e**=**f-1**, si ottiene sse con **d-1** dadi si ottiene uno dei valori: **s-0**, **s-1**, **s-2**, .., **s-e** e poi (in un sol modo) se l'ultimo dado mostra il valore: **0**, **1**, **2**,…, **e**, mancante per ottenere somma **s**. Dunque, il numero dei modi per ottenere con **d** dadi con **f** facce somma **s**, $\binom{\mathbf{d}}{\mathbf{s}}_{\mathbf{f}}$, è dato dalla somma del numero di modi per ottenere gli **f** valori: **s-0**, **s-1**, **s-2**, .., **s-e**, con **d-1** dadi: $\binom{\mathbf{d}}{\mathbf{s}}_{\mathbf{f}} = \sum_{0}^{e} \binom{\mathbf{d-1}}{\mathbf{s-j}}_{\mathbf{f}}$.

"Lo stesso" nel continuo, la densità è il volume (area) delle sezioni dei cubi con:

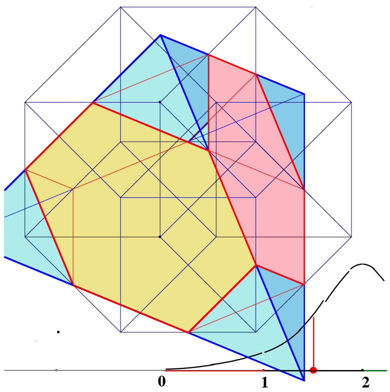
$x_1+x_2+x_3=s$

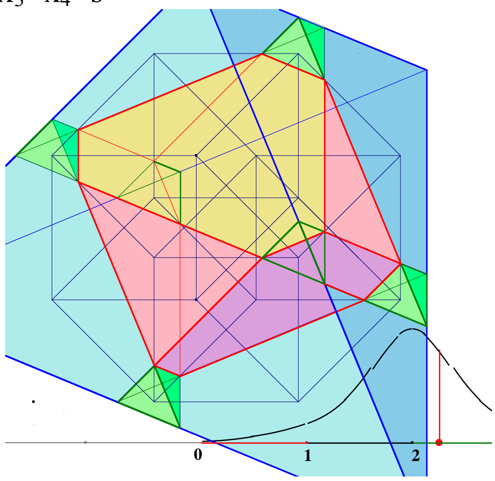






$x_1+x_2+x_3+x_4=s$





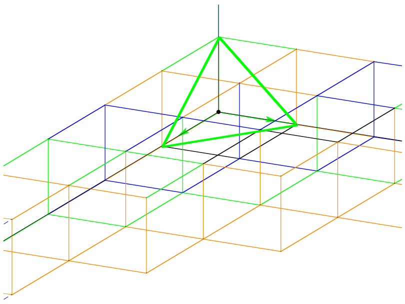
Nel continuo si vede "meglio" che ogni sezione è un tetraedro tronco che si può ottenere sommando e sottraendo dei T^d. Lo stesso vale in qualsiasi dimensione e per i n^i dei cubetti, già determinati in modo ricorsivo nei TAG, con un teorema unico valido nel discreto (probabilità) e nel continuo (densità).[15]

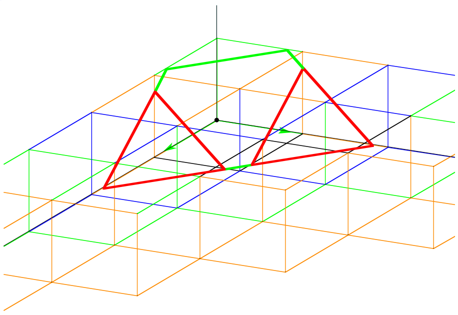
[15] Barra M., 2008, Matematica e software di geometria dinamica seguendo le indicazioni scientifiche e didattiche di B. de Finetti, @ 26, Vol. 9, Ed. Pagine, pp. 191 – 230.

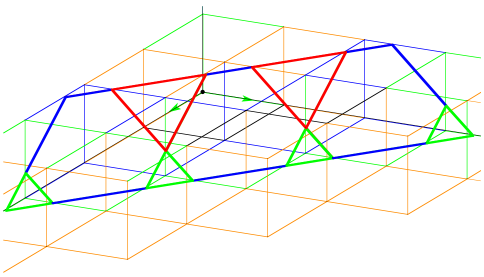
Proprietà e collegamento fra i Triangoli Aritmetici Generalizzati TAG_f. Si possono ritrovare le proprietà già individuate nei casi particolari

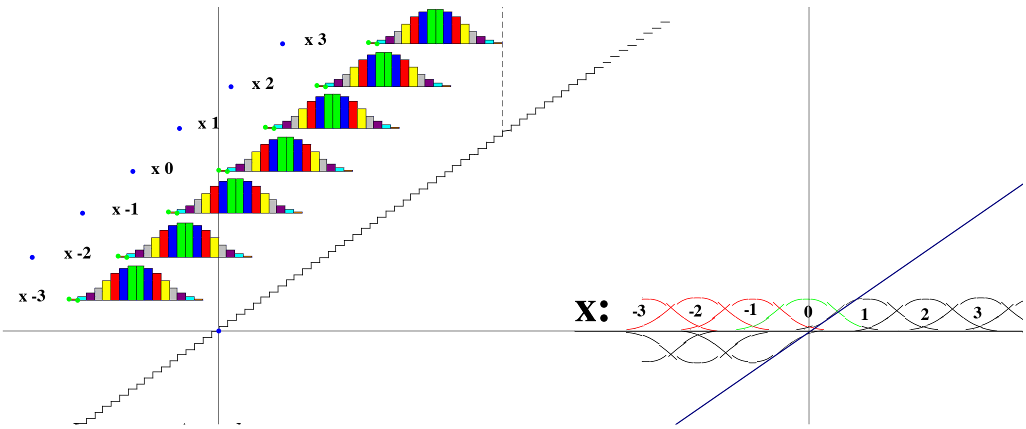
Le numerosissime proprietà indicate, valide nei TAG_2 = TA, e le innumerevoli ulteriori proprietà di cui godono, che spesso sono dimostrabili facilmente, possono servire da guida per ricercare per **analogia** alcune proprietà valide nei tringoli aritmetici generalizzati TAG_f che sono generati da una proprietà più generale: ogni elemento invece di essere la somma di **2** elementi, come nei TAG_2, ora è la somma di **f** elementi sempre appartenenti alla riga precedente.

Ci sono inoltre molte proprietà che derivano dall'aver potuto osservare l'immagine geometrica che ha accompagnato la loro determinazione. Così sapendo che cosa sono le sezioni dei cubi, nel discreto e nel continuo, si capisce abbastanza facilmente che cosa si ottiene sommando le sezioni analoghe che si ottengono mettendo insieme i cubi:









Ad esempio nel discreto: moltiplicando $\binom{3}{s}_6$ per gli interi consecutivi e "traslando di uno spigolo" si ottengono i punti della successione: n=6m+3, con n e m interi relativi, che varia linearmente, che corrisponde a una retta nel continuo:

-3(... 21 15 10 6 3 1) 0 0 ...

-2(....15 21 25 27 27 25 21 15 10 6 3 1) 0 0 ...

-1(1 3 6 10 15 21 25 27 27 25 21 15 10 6 3 1) 0 0 ...

-0( )

1(1 3 6 10 15 21 25 27 27 25 21 15 10 6 3 1)

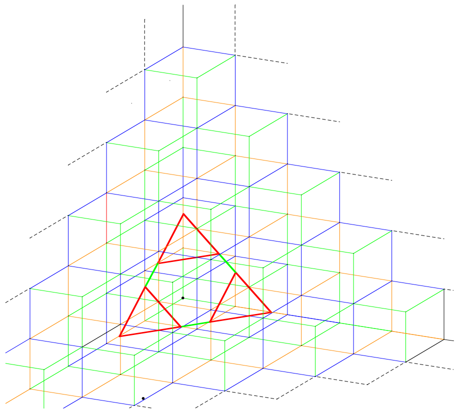
2(1 3 6 10 15 21 25 27 27 25 21 15 10 6

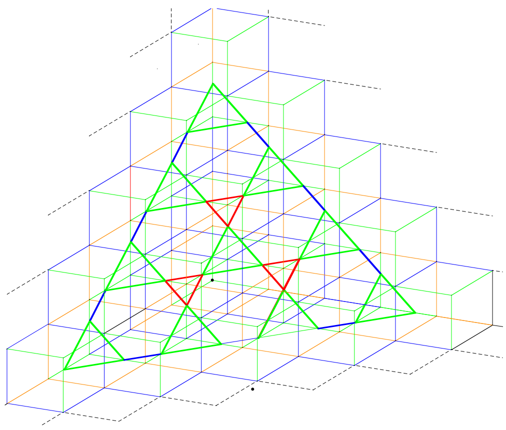
3(1 3 6 10 15 21 25 27

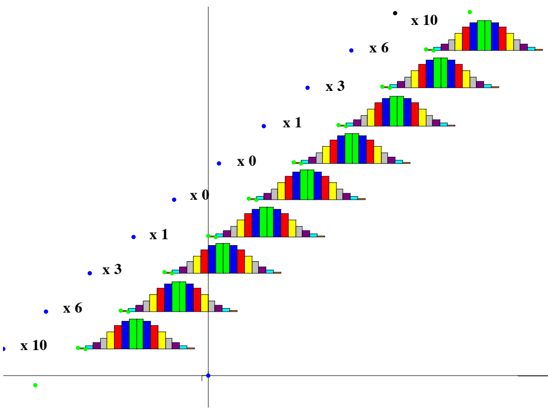
4(1 3...

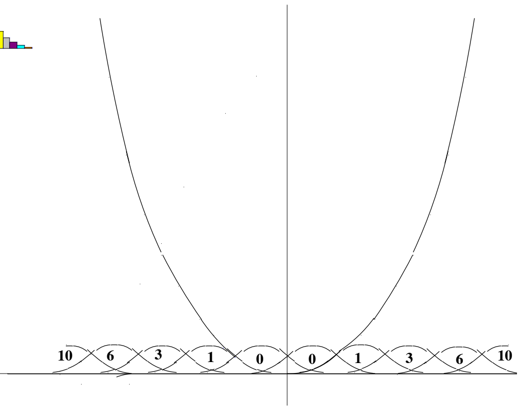
-93-87-81-75-69-63-57-51-45-39-33-27-21-15-9-3 3 9 15 21 27 33 39 45 51 57 63 69 75 81 87 93 99 105

- E in modo analogo, moltiplicando le quantità precedenti, continue o discrete, per i <u>numeri triangolari</u> si ottengono, nei due casi, nel continuo, una parabola, e di nuovo i numeri triangolari nel discreto, semplicemente perchè rappresentano l'andamento dell'area di un triangolo equilatero con lato crescente e il numero di nodi che contiene, che rappresenta il suo equivalente nel discreto. Le proprietà divengono visibili e quasi non c'è bisogno di parole per esprimerle e l'immagine suggerisce la loro traduzione algebrica.






x 10
x 6
x 3
x 1
x 0
x 0
x 1
x 3
x 6
x 10


10
6
3
1
0
0
1
3
6
10

6(… 21 15 10 6 3 1) 0 0 …
3(….15 21 25 27 27 25 21 15 10 6 3 1) 0 0 …
1(1 3 6 10 15 21 25 27 27 25 21 15 10 6 3 1) 0 0 …
0( )
0( )
1(1 3 6 10 15 21 25 27 27 25 21 15 10
3(1 3 6 10 15 21 25
6(1

…171 153 136 120 105 91 78 66 55 45 36 28 21 15 10 6 3 1 0 0 1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 66 78 91…

Si può capire anche che le proprietà si generalizzano sia a un numero **f** qualsiasi di facce, sia in dimensione qualsiasi attraverso i numeri tetraedrici e i triangoli aritmetici generalizzati, $TAF_{\mathbf{f}}$.

Così analogamente può venire in mente che il cubo 6x6x6, cioè C_6^3, può essere considerato come un cubo delle stesse dimensioni diviso in 2x2x2=8 cubi di dimensioni 3x3x3, C_3^3. Cioè: $C_6^3 \mathbf{=2^3} C_3^3$.

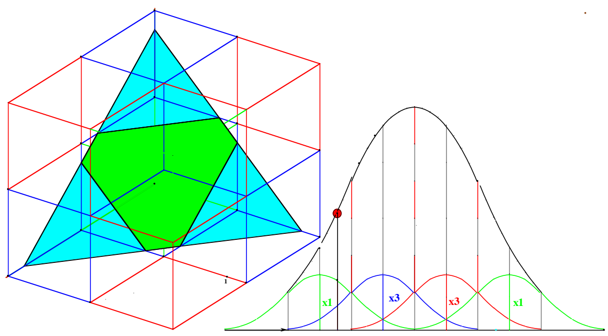
Numericamente le sezioni di C_6^3 con $\boldsymbol{\pi(s)}$: x+y+z=s determinano la distribuzione a campana, che ora possiamo ottenere in modo nuovo considerando quanti C_3^3 incontra $\boldsymbol{\pi(s)}$ (prima ne incontra 1, poi 3, poi 3, poi 1 (1, 3, 3, 1 è la distribuzione della somma di 3 eventi : $\binom{3}{s}_{\mathbf{2}} = \binom{3}{s}$)), **nei quali**, a loro volta e come abbiamo visto, $\boldsymbol{\pi(s)}$ incontra: 1, 3, 6, 7, 6, 3, 1 = $= \binom{3}{s}_{\mathbf{3}}$ cubetti di spigolo unitario, C_1^3.

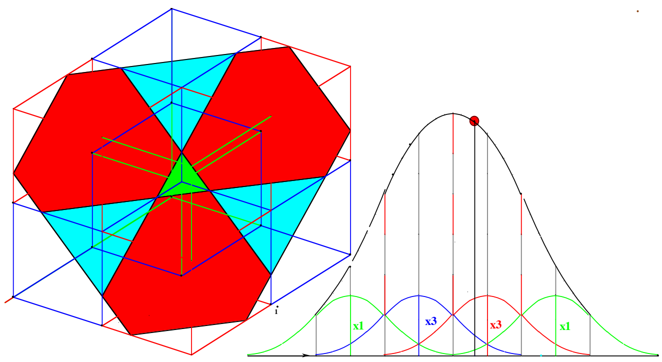
```
1 3 6 7 6 3 1               x 1 =  1  3  6  7  6  3  1
    1 3 6 7 6 3 1           x 3 =        3  9 18 21 18  9  3
        1 3 6 7 6 3 1       x 3 =              3  9 18 21 18  9  3
            1 3 6 7 6 3 1   x 1 =                    1  3  6  7  6  3  1
                                  ________________________________________
                                   1  3  6 10 15 21 25 27 27 25 21 15 10  6  3  1
```

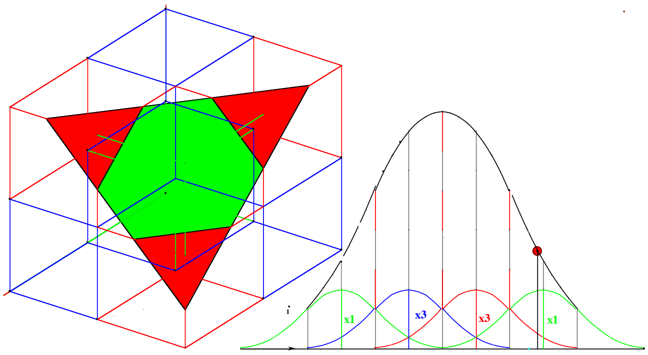
Oppure: $C^{3}_{6}\mathbf{=3^3}C^{3}_{2}$:

```
1 3 3 1                     x 1  = 1  3 3  1
   1 3 3 1                  x 3  =    3  9 9 3
      1 3 3 1               x 6  =        6 18 18  6
         1 3 3 1            x 7  =              7 21 21 7
            1 3 3 1         x 6  =                    6 18 18 6
               1 3 3 1x 3 =                                 3 9 9 3
                  1 3 3 1x 1=                                  1 3 3 1
    ___________________________________
                        1 3 6 10 15 21 25 27 27 25 21 15 10 6 3 1
```

Così facilmente si può pensare che le sezioni, $\mathbf{C^{3\backslash}(2;s)}$, di un un cubo 2x2x2 con x+y+z=s, sono anche la combinazione lineare delle sezioni dei cubi $\mathbf{C^{3\backslash}(1;s)}$, che lo possono tassellare, considerando che i numeri di $\mathbf{C^{3\backslash}(1;s)}$ incontrati nell'ordine, sono dati da: $\binom{3}{s}$= 1 3 3 1. Risulta così:

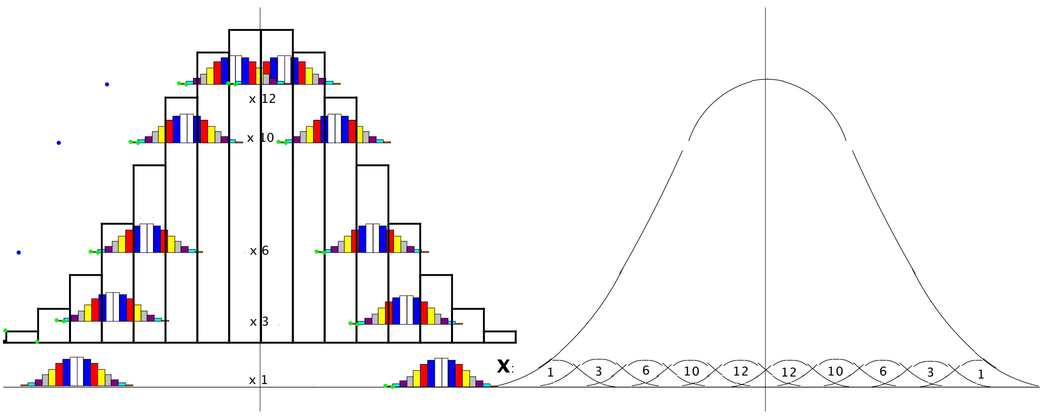






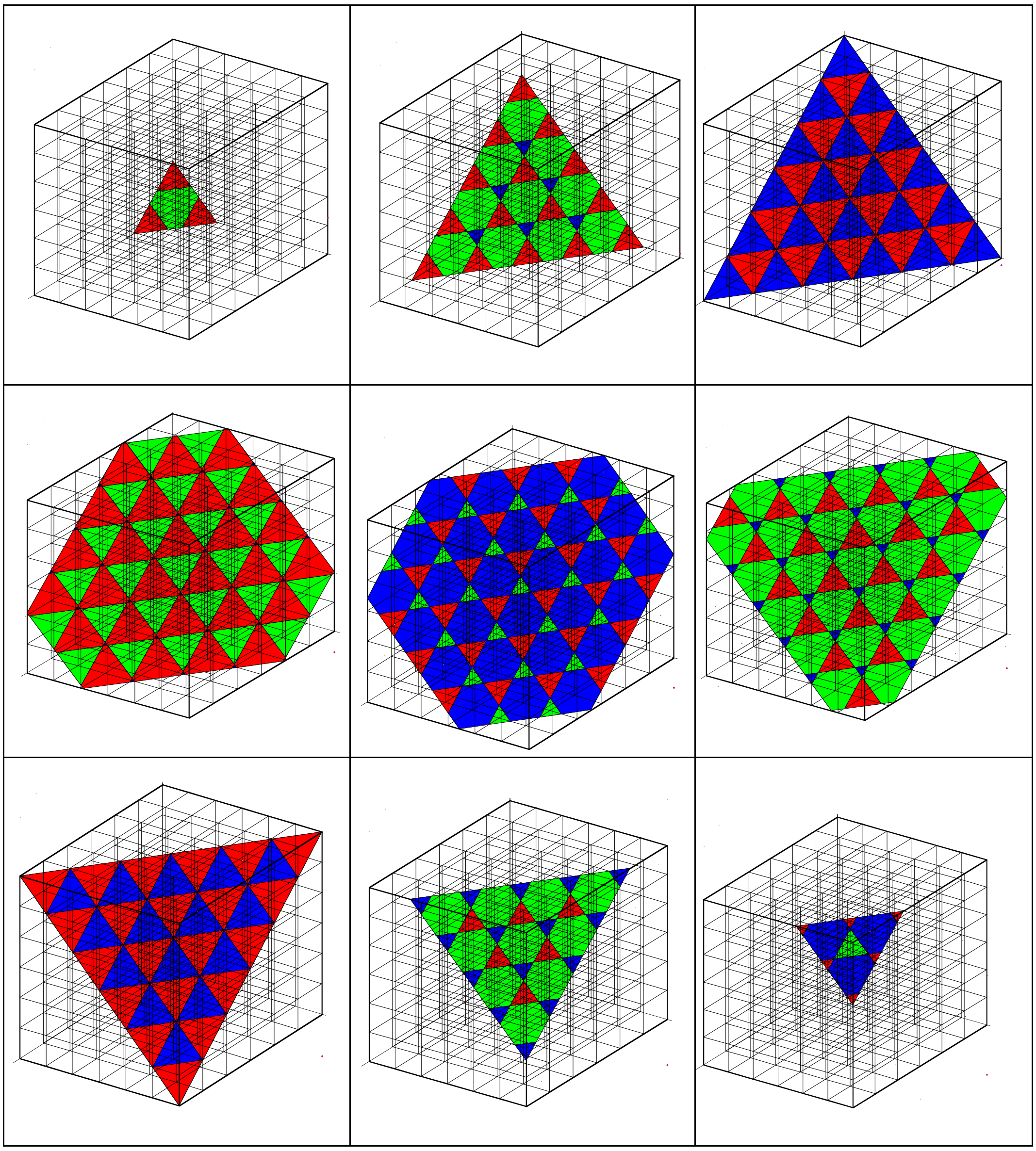
$$\mathbf{C^{3\backslash}(2;s) = \sum_{0}^{3}\binom{3}{j}C^{3\backslash}(1;s\text{-}j)}$$

Lo stesso per un cubo "grande" riempito da 4^3 cubi, ove ciascuno di questi è tassellato da 6^3 cubetti, oppure sezionato nel continuo ...: si può visualizzare e dimostrare facilmente attraverso i coefficienti $\binom{3}{s}_4$ quanto è mostrato o dimostrato dalle immagini:



Forse è chiaro che le sezioni del cubo $\mathbf{C^{3\backslash}(6;s)}$, tassellato da 6^3 cubetti di spigolo unitario, debbono risultare dalla somma delle aree delle sezioni $\mathbf{C^{3\backslash}(1;s)}$ moltiplicate per i coefficienti forniti dalla distribuzione della somma di 3 dadi, cioè da $\binom{3}{s}_6$. Risulta così:

$$\mathbf{C^{3\backslash}(6;s) = \sum_{0}^{15}\binom{3}{j}_6 \; C^{3\backslash}(1;s\text{-}j)}.$$



A colori è uno spettacolo!

Per chi le scopre le proprietà risultano nuove. Alcune sono veramente nuove.

Infine, pensando ai cubi si può passare da $C^3{}_4=4^3$ a $C^3{}_5=5^3$ utilizzando le immagini mentali: su 3 quadrati di $C^3{}_4$ che hanno in comune un vertice U si possono aggiungere altri 3 quadrati $C^2{}_4$, così si crea uno scalino sui 3 spigoli in U di $C^3{}_4$ che va riempito con 3 spigoli $C^1{}_4$. Infine per completare tutto $C^3{}_5$ occorre aggiungere un $C^3{}_1$ in U.

Si può capire come passare da un TAG_n a un TAG_{n+1}:

1									
1	1	1	1						
1	2	3	4	3	2	1			
1	3	6	10	12	12	10	6	3	1

1	3	6	10	12	12	10	6	3	1			
				+3(1	2	3	4	3	2	1)		
								+3(1	1	1	1)	
												+1(1)
1	3	6	10	15	18	19	18	15	10	6	3	1

1	3	6	10	15	18	19	18	15	10	6	3	1			
					+3(1	2	3	4	5	4	3	2	1)		
										+3(1	1	1	1	1)	
															+1(1)
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Oppure anche:

1	3	6	10	15	18	19	18	15	10	6	3	1			
					+3(1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1)
										-3(1	1	1	1	1	1)
															+1(1)
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Ci sono moltissime possibilità per chi vuole scoprire qualche proprietà.

Tutto questo a che serve? La domanda non è nuova.

Potrebbe servire per migliorare il proprio atteggiamento nei riguardi della matematica, potrebbe migliorare le capacità di osservazione, di essere in grado di formulare ipotesi, di trovare dimostrazioni e di credere in se stessi.

Qualche considerazione, alcune ipotesi e qualche "prima" conclusione

La matematica può essere importante per gli sviluppi positivi della scienza e della società.
Probabilmente, per gli stessi obiettivi e per la matematica stessa, è più importante che gli individui credano in se stessi in modo motivato ed abbiano la coscienza motivata di poter "fare matematica".

Comunque a che serve ripetere a memoria frustrando la propria intelligenza e quindi dimenticare al più presto?
La gioia della scoperta ha un valore impareggiabile, per se stessi e per la società.

Una delle ipotesi più importanti che mi guida è che l'*astrazione*, anche in dimensione qualsiasi, deve essere considerata una *estrazione* da esempi concreti, collegabili ad esperienze reali o mentali, come dice la grande Emma Castelnuovo. Emma può dirlo perché tiene conto delle esigenze reali della scuola senza distorcerle per adattarle a quelle della ricerca matematica che molto spesso vengono trasferite forzatamente nella scuola. L'individuo può compiere queste *estrazioni* personalmente o in un piccolo gruppo.

Un'altro aspetto importante che mi guida è l'ipotesi che buona parte della creatività proceda per *analogia*. Penso che buona parte dell'intelligenza consista nel *legare insieme*. Il legame viene cementato dall'emozione della scoperta, e l'emozione lascia un'impronta nella memoria. La filosofia che meglio supporta tale ipotesi è quella del *fusionismo* di Felix Klein e di Bruno de Finetti, che consiste proprio nel *legare insieme* i diversi settori della scienza, il ragionamento induttivo e quello deduttivo, gli argomenti diversi, l'impostazione sintetica ed analitica, i ragionamenti *statico* e *dinamico*, il *discreto* e il *continuo*, le diverse dimensioni dello spazio e un oggetto con un altro dal quale può provenire o che lo contiene, applicando l'ormai indiscussa validità della strategia culinaria dell'OCA, che afferma l'*opportunità di un contorno adeguato*. Così è importante per i tetraedri considerare i *parallelepipedi associati* ove sono inscritti e ritrovare le sezioni di un cubo "per eliminazione delle *punte*" che escono fuori dalla sua superficie quando un tetraedro, che nasce al suo interno, diventa sempre più grande. Così nell'argomento appena esposto l'aver riconosciuto che le sezioni dei cubi sono tetraedri tronchi, porta a ricercare la stessa proprietà nei coefficienti dei TAG e in questi le proprietà dei coefficienti binomiali che fanno parte del più semplice dei TAG, e nel ritrovare che gli stessi coefficienti binomiali, finora visti come tetraedri, scomponibili in tetraedri di tutte le dimensioni, possono essere visti come tetraedri tronchi in un numero infinito di modi...

Così il collegamento fra introduzioni diverse dello stesso "oggetto": ad es. come poliedro geometrico definito nella geometria sintetica, come insieme di punti soddisfacenti alla sua rappresentazione cartesiana o come coefficiente binomiale o plurinominale, permette di estendere le proprietà più facilmente individuabili in uno dei modi in cui è stato considerato.

In questo modo è anche possibile ritrovare più velocemente quanto è stato già determinato precedentemente con qualche difficoltà.

Così, la considerazione che il volume degli ipertetraedri tende a zero al crescere della dimensione dello spazio, che può essere fatta banalmente in modo analitico considerando l'incredibile velocità di crescita del fattoriale, (d!), fonisce una chiave interpretativa iprevedibile per comprendere le trasformazioni che avvengono alle densità della somma di numeri aleatori che portano al limite alla distribuzione normale nel teorema del limite centrale.

Gli ipertetraedri forniscono un numero molto notevole di applicazioni e la difficoltà di comprendere le proprietà di cui godono è relativamente bassa.

Per questo, sebbene la scheda di auto-apprendimento di alcune proprietà degli ipertetraedri comprenda 26 domande contro le 25 della scheda analoga sugli ipercubi, tali domande sui tetraedri ottengono una risposta notevolmente più veloce rispetto a quanto avviene nel caso degli ipercubi.

Gli studenti cominciano ad essere coscienti di *potercela fare* e accrescono tale sensazione rispondendo alle domande sui coefficienti binomiali, perché già li conoscono e perché comprendono meglio il significato delle parole contenute nelle domande che li riguardano, che spesso sono già state utilizzate precedentemente nella prima scheda.

Anche l'ultima domanda, che consiste nel dover riscontrare una regolarità nella tavola riassuntiva delle componenti dei tetraedri, viene individuata più facilente e da un numero maggiore di studenti rispetto a quanto di solito accade in relazione alla analoga domanda sulla tabella corrispondente sugli ipercubi. Egualmente gli studenti forniscono delle argomentazioni e anche delle dimostrazioni in modo più agevole sui motivi di tale regolarità degli ipertetraedri con maggiore soddisfazione e con una minore necessità di sollecitazioni rispetto alla scheda sugli ipercubi.

Sia nel caso in cui le schede vengano proposte singolarmente, sia nel caso in cui si possa rispondere a coppie, gli studenti accompagnano con i movimenti delle mani, in modo molto espressivo, la generazione di un cubo o di un tetraedro, che avviene dinamicamente sulla base del cubo o del tetraedro di dimensione immediatamente inferiore. In generale, come già detto, risulta divertente e piacevole servirsi di quanto si vede per capire ciò che è invisibile.

Bruno de Finetti diceva che nei Dipartimenti di Matematica molto spesso gli studenti si laureano in *passaggistica e in teoremologia*. Questo favorisce la possibilità di dimenticare in poco tempo quanto è stato *inteso*.
La *passaggistica e la teoremologia* è un rischio che si corre quando i ragionamenti e gli strumenti che vengono utilizzati sono distanti dalle capacità che si è riusciti a sviluppare per comprenderli. E' importante che gli studenti possano sperimentare una matematica dove c'è spazio per non "limitarsi a ripetere", ove è possibile comprendere i motivi per i quali si compiono i vari passaggi in funzione degli obiettivi da raggiungere, dove alcune proprietà possono essere scoperte personalmente e c'è spazio per inventarsi alcune formule e poi perfino dimostrarle, dove poter sperimentare che un ragionamento utilizzato costituisce un arricchimento delle proprie capacità logiche e che molte dimostrazioni costituiscono degli strumenti che possono essere utilizzati di nuovo in situazioni diverse.

Probabilmente l'attivazione di queste potenzialità viene favorita da una introduzione graduale delle modalità di ragionamento che risultano diverse da quelle usuali, che ponga estrema attenzione al rischio che lo studente "perda contatto" con gli strumenti, i simboli, i ragionamenti e gli obiettivi da raggiungere e cominci, di fatto, a umiliare le proprie capacità assumendo una posizione passiva, limitandosi a prendere appunti. Dalle dinamiche dell'apprendimento si passa alle esigenze del "dettato", dello scrivere velocemente cercando di tralasciare soltanto quello che "a occhio" sembra meno importante. "Schiacciato" nella posizione assunta di "emanuenze" l'individuo introietta le limitazioni che si è auto-imposto, cercando soddisfazione nel tipo di appunti che riesce a prendere anche senza capire, tanto che spesso non riesce neppure a trovare un "titolo" a quanto ha ascoltato. Assumendo una posizione che squalifica le sue potenzialità, l'*emanuenze* difficilmente riesce a cogliere il discorso generale nel quale inserire i particolari dando a questi la relativa importanza; spesso anzi crede di non essere in grado di farlo: può un *emanuenze* svolgere un compito così impegnativo?

Così può limitarsi a osservare i particolari preoccupandosi di collegare un passaggio con il successivo e di ricordare tale collegamento senza capire bene quale funzione assuma all'interno del teorema. Più o meno questa per me è la *passaggistica e la teoremologia*. E' facilitata da una limitata autostima che può servire ad esempio a superare i rischi di quella *perdita di contatto* di cui sopra.

L'auto-apprendimento può permettere di superare le disattenzioni, comuni a tutti, con la possibilità di scegliere i tempi di sviluppo del proprio impegno, con una *astrazione che è estrazione*, una ripetizione delle parole e degli schemi dimostrativi già usati, una scelta accurata dei simboli, ..., e uno spazio per esercitare e sviluppare la propria creatività, cercano di affrontare i problemi indicati.

Infine una considerazione che solo apparentemente è particolare: la presenza di numerosi esercizi sullo stesso argomento non deve essere finalizzata allo sviluppo di capacità ripetitive, al contrario deve considerare che per essere creativi è molto importante conoscere gli strumenti che devono essere utilizzati. Quindi è utile che gli esercizi stessi prevedano uno spazio per la creatività.

Bibliografia

Atiyah M F., 2007, *Siamo tutti matematici*, Di Renzo.

Barra M., 2001, Ipersolidi e altri argomenti, *Progetto Alice,* N. 5, Vol. 2, Ed. Pagine, pp. 191-246.

Barra M., 2008, Matematica e software di geometria dinamica seguendo le indicazioni scientifiche e didattiche di Bruno de Finetti, *Progetto Alice,* N. 26, Vol. 9, Ed. Pagine, pp. 191-230.

Barra M. Giammei F., Laganà G. A., Spagnulo D, 2008, Cartesio Eulero, …, Cauchy e la formula V-S+F=2. Gli studenti con l'aiuto della storia costruiscono una dimostrazione semplice, fantasiosa e applicabile agli ipersolidi, *Progetto Alice,* N. 27, Vol. 9, Ed. Pagine, pp. 419-457.

Barra M., 2009, Problem-solving, fusionismo e traduzioni fra linguaggi diversi. Varie formule autocostruibili per sommare i quadrati o i cubi degli interi. Generalizzazioni originali per sommare le potenze degli interi attraverso i Numeri Euleriani e i "Box-Numbers", *Progetto Alice,* N. 28, Vol. 10, Ed. Pagine, pp. 65-96.

Barra M., 2009, Numeri Euleriani, Box-numbers, Numeri di Stirling di seconda specie e Triangolo Aritmetico di Pascal per ottenere le somme delle potenze degli interi. Approfondimenti e collegamenti, *Progetto Alice,* N. 28, Vol. 10, Ed. Pagine, pp. 97-115.

Barra M., 2010, Rivoluzioni in atto: problemi e ricerca di soluzioni. Sviluppo della creatività. Importanza sociale e aspetti didattici dei Dynamic Geometry Software. Il pensiero di alcuni grandi maestri. *Fusionismo olistico*, in *Seminari di geometria dinamica*, a cura di Accascina G. e Rogora E., Ed. Nuova Cultura, Roma, pp. 63-98.

Barra M., 2010, Volume della piramide in dimensione qualsiasi e in partico lare in tre dimensioni; un po' di storia e nuove soluzioni ottenute con i metodi del *fusionismo* e considerando lo sviluppo della creatività, *Progetto Alice,* N. 31, Vol. 11, Ed. Pagine, pp. 35-70.

Barra M., 2009, Manipulation of virtual objects for the development of connections between geometry and probability as well as between the various dimensions of space. *Proceedings of Gordon's Bay Delta '09*, 7th Southern Right Delta Conference On The Teaching and Learning of Undergraduate Mathematics and Statistics, Mathematics in a dynamic environment, 30 Nov. – 4 December 2009, pp. 10-25.

Coxeter H. S. M., 1969 (1961), *Introduction to Geometry*, Wiley & Sons.

Coxeter H. S. M., 1973, *Regular Polytopes*, Dover.

de Finetti B., 1959, *Matematica logico intuitiva*, Cremonese.

de Finetti B., 1967, *Il saper vedere in matematica*, Loescher, Torino.

de Finetti B., 1970, *Teoria delle probabilità*, Einaudi.

de Finetti B., 1974, Contro la "Matematica per deficienti", *Periodico di Matematiche*, vol. 50, n. 1-2, Maggio 1974.

de Finetti B., 1975, Parole di apertura al Congresso in Sila, *Periodico di Matematiche*, vol. 51.

de Laplace P. S., 1819, *Essai de philosophie*. *Saggio filosofico sulle probabilità*, Laterza, 1951.

Dewey J., 1929, *The Quest for Certainty*, Minton, Balch and Company, N. Y.

Dewey J.,1938 *Logic, the Theory of Inquiry*, Henry Holt, New York.

Hadamard J., 1949, *An essay on the psychology of invention in the mathematical field,* Princeton University Press, Princeton.

Kendall M. G., 1961, *A course in the Geometry of n dimensions*, Charles Griffin & Company Limited, London.

Johnson-Laird P. N. , 1983, *Mental models: Towards a cognitive science of language*, *inference, and consciousness*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

Manning H.P., 1914, *Geometry of four dimension*, Dover.

Newton I., 1704, *Tractatus de quadratura curvarum,* Londra.

Polya G.,1945, *How To Solve It,* Princeton University Press.

Polya G.,1954, *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton University Press.

Polya G.,1954, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University Press.

Polya G., 1980, *Mathematical Discovery*, Wiley, New York.

Sommerville D.M.Y., 1929, *An introduction to the geometry of n dimensions*, Dover.

Steiner M., 1975, *Mathematical Knowledge*, Cornell University Press, Ithaca.

Veronese G., 1891, *Fondamenti di geometria a più dimensioni*, Padova.

Mario Barra