Superfici (Lezioni vecchie)

Vogliamo estendere le formule di Gauss–Green nello spazio. In tal caso la frontiera del dominio sarà data da una superficie. Perciò prima di dimostrare queste formule dovremo dar senso ad un' espressione del tipo

$$\int \int_S < F, \vec{n} > \, d\sigma,$$

dove S è una superficie e $\vec{n}$ una sua normale. L' idea più naturale di superficie viene dal grafico di una funzione $f(x, y)$ con x e y variabili indipendenti che si trovano in un opportuno dominio del piano. I punti della superficie in questo caso saranno del tipo $(x, y, z = f(x, y))$. Il piano tangente in un punto della superficie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è dato dall'equazione cartesiana $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$. I versori normali alla superficie sono

$$\vec{n} = \pm \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Quando abbiamo parlato del teorema delle funzioni implicite abbiamo visto come un' equazione cartesiana $F(x, y, z) = 0$ può individuare almeno nell' intorno di una sua soluzione (x_0, y_0, z_0) una funzione $f(x, y)$ tale che in quell' intorno sia $z = f(x, y)$, affinché ciò avvenga è sufficiente che sia $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. In tal caso l' equazione cartesiana del piano tangente è data da

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Nel dare una definizione più generale di superficie non possiamo pensare di privilegiare una variabile rispetto all' altra. Allora in che modo definiamo una superficie? L' idea che abbiamo di superficie è di un qualcosa di bidimensionale che vive nello spazio, qualcosa di questo tipo sarà esprimibile tramite due parametri. Diamo la seguente definizione.

Definizione 1 *Sia $K \subset \mathbb{R}^2$, un insieme compatto. Allora una superficie S è un' applicazione da K in $\mathbb{R}^3$ di componenti $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, tale che*
i) l' applicazione è C^1;
ii) l' applicazione è iniettiva nei punti interni a K;
iii) la matrice

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \tag{1}$$

ha rango uguale a 2 nei punti interni di K.

L' unica condizione che vale la pena di giustificare è la iii). Dire che la matrice ha rango 2 significa che uno dei minori della matrice è non nullo. Supponiamo che sia $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$, questo significa che, almeno localmente, posso esplicitare le variabili u e v in funzione di x e y (vedi Courant John vol. II/1 pag 261) perciò esisterà una funzione f tale che la terza equazione si scriverà $z = f(x, y)$. Quindi ritroviamo l' idea iniziale di superficie. Analogamente se è diverso da 0 uno degli altri 2 minori potremo esplicitare una delle variabili rispetto alle rimanenti.
Per capire come è fatto il piano tangente alla superficie in un punto $(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$, consideriamo una qualsiasi curva regolare γ in K passante per il punto (u_0, v_0). Questa avrà equazioni parametriche

$$u = u(t),\ v = v(t),$$

inoltre esisterà un punto t_0 tale che $u(t_0) = u_0$ e $v(t_0) = v_0$. Associata a questa curva ce ne sarà un' altra $\tilde{\gamma}$, definita sulla superficie data (quindi una curva di $\mathbb{R}^3$) avente come equazioni parametriche

$$x(t) = x(u(t), v(t)),\ y(t) = y(u(t), v(t)),\ z(t) = z(u(t), v(t)).$$

Utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte ci possiamo calcolare la tangente alla curva in un punto t qualsiasi, in particolare in t_0 otteniamo

$$\begin{aligned} x'(t_0) &= x_u(u_0, v_0)u'(t_0) + x_v(u_0, v_0)v'(t_0) \\ y'(t_0) &= y_u(u_0, v_0)u'(t_0) + y_v(u_0, v_0)v'(t_0) \\ z'(t_0) &= z_u(u_0, v_0)u'(t_0) + z_v(u_0, v_0)v'(t_0). \end{aligned}$$

Se ora introduciamo i vettori $X_u = (x_u, y_u, z_u)$ e $X_v = (x_v, y_v, z_v)$ definiti per ogni (u, v) interno a K osserviamo che il vettore tangente di sopra si può scrivere nel seguente modo compatto

$$\tilde{\gamma}'(t_0) = X_u(u_0, v_0)u'(t_0) + X_v(u_0, v_0)v'(t_0).$$

Questo significa che il vettore tangente alla curva nel punto t_0 si trova sul piano generato dai due vettori X_u e X_v. La condizione iii) della definizione precedente ci assicura che i due vettori X_u e X_v sono indipendenti e quindi generano un piano. A questo punto è chiaro che il piano generato da questi due vettori sarà proprio il piano tangente alla superficie, infatti una qualsiasi curva tangente alla superficie appartiene a questo piano. Come possiamo scrivere i vettori normali al piano? Se facciamo il prodotto vettoriale tra i due vettori X_u e X_v ottengo un vettore ortogonale ai due vettori dati e quindi ortogonale al piano da essi generato. Ricordiamo che il prodotto vettoriale è definito attraverso il determinante della matrice

$$X_u \times X_v = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix},$$

formale in quanto la prima riga è formata in realtà dai versori dei tre assi cartesiani, nell' ordine x, y e z. Possiamo scrivere l' equazione cartesiana del piano tangente imponendo l' ortogonalità con il vettore normale $X_u \times X_v$, otteniamo

$$< X_u \times X_v, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) >= 0.$$

Se dividiamo per la norma del vettore $X_u \times X_v$ otteniamo i due versori normali

$$\vec{n} = \pm \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}. \tag{2}$$

Il numeratore è un vettore che ha come componenti i minori della matrice (1) considerati con il segno opportuno. Vediamo di riscrivere meglio il denominatore. A tal proposito è utile ricordare l' identità

$$|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - | < a, b > |^2,$$

valida dati due qualsiasi vettori a e b dello spazio. Se applichiamo l' identità di sopra ai vettori X_u e X_v, possiamo scrivere

$$|X_u \times X_v| = \sqrt{EG - F^2},$$

dove E, F e G sono dette quantità gaussiane fondamentali e sono definite rispettivamente da

$$E =< X_u, X_u >,\ F =< X_u, X_v >,\ G =< X_v, X_v > .$$

Esempio 1 La sfera di centro l' origine e raggio R ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, questa si può riscrivere con le seguenti coordinate parametriche

$$\begin{aligned} x(u, v) &= R \cos(u) \sin(v) \\ y(u, v) &= R \sin(u) \sin(v) \\ z(u, v) &= R \cos(v), \end{aligned}$$

il parametro $v \in [0, \pi]$ mentre $u \in [0, 2\pi]$. Questi rappresentano rispettivamente l'angolo formato tra l' asse delle z e il vettore OP che congiunge il punto P della superficie con l'origine e l' angolo formato tra l' asse delle x e la proiezione di OP sul piano x, y. In questo caso le quantità gaussiane fondamentali sono rispettivamente $E = R^2 \sin(v)^2$, $F = 0$, $G = R^2$.

Ora torniamo al problema iniziale e cerchiamo di dar senso all' integrale

$$\int\int_S f\, d\sigma$$

dove f è una funzione data sulla superficie S. Il primo problema che ci poniamo è il caso $f \equiv 1$, in questo caso l'integrale che vogliamo definire dovrà coincidere con l' area di S. Se riusciamo a capire come si definisce l' area sarà semplice definire l' integrale per una qualsiasi funzione f. L' idea per definire l' area potrebbe essere simile a quella che si usava per definire la lunghezza di una curva. In tal caso si considerava una spezzata inscritta alla curva e si faceva poi tendere la spezzata alla curva considerando dei segmentini sempre più piccoli. Si potrebbe tentare la stessa strada anche con le superfici, in questo caso si considererebbe un poliedro inscritto alla superficie. Il problema è che pur mandando i diametri delle facce del poliedro a zero non è detto che queste approssimino il piano tangente in un punto. Questo problema non sussiste per le curve (grazie al teorema di Lagrange!). Ciò significa che questo metodo non funziona per le superfici (si veda Courant John Vol II/1 pag 540). L'idea è di approssimare non dall' interno bensì dall' esterno, ovvero tramiti poliedri tangenti alla superficie. D' altra parte anche nel caso delle curve si sarebbe potuti partire da spezzate che circoscrivevano la curva e si sarebbe arrivati alla stessa definizione di lunghezza.

Capiamo quindi come il piano tangente giochi un ruolo fondamentale. Per semplificare le cose cominciamo a considerare una superficie di equazione $z = f(x, y)$. Procediamo nel seguente modo. Le variabili indipendenti (x, y) si trovano in un dominio K di $\mathbb{R}^2$, suddividiamo K in tanti rettangolini R_i e consideriamo in ognuno di questi rettangolini un punto (x_i, y_i) possiamo considerare il piano τ_i tangente alla superficie nel punto $(x_i, y_i, z_i = f(x_i, y_i))$. Indichiamo con S_i la parte del piano tangente corrispondente a R_i. Per essere più precisi S_i è dato dall' intersezione tra il cilindro retto di base R_i econ il piano τ_i. Siccome vogliamo approssimare la superficie di S dall' esterno calcoliamo una sua approssimazione tramite la somma delle aree ΔS_i. Che legame esiste tra le aree ΔR_i e ΔS_i? Se indichiamo con γ_i l' angolo formato tra il piano tangente ed il piano x, y, otteniamo la relazione

$$\Delta R_i = |\cos(\gamma_i)| \Delta S_i.$$

Dal momento che γ_i corrisponderà anche con l' angolo formato tra la normale alla superficie e l' asse delle z, avremo che $|\cos(\gamma_i)|$ sarà uguale al modulo della terza componente del versore normale al piano tangente, ovvero nel caso specifico questo sarà $\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x_i,y_i)+f_y^2(x_i,y_i)}}$.

Ora sommiamo sull' indice i

$$A(S) \approx \sum_i \Delta S_i = \sum_i \sqrt{1 + f_x^2(x_i, y_i) + f_y^2(x_i, y_i)}\Delta R_i,$$

successivamente mandiamo i diametri dei rettangoli R_i a zero e otteniamo

$$A(S) = \int\int_S d\sigma = \int\int_K \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\, dxdy.$$

Vediamo cosa fare se la superficie è data tramite equazioni parametriche. Sappiamo che una delle componenti del vettore $X_u \times X_v$ deve essere diversa da zero supponiamo che sia l' ultima, ovvero $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$. In tal caso abbiamo detto che localmente possiamo esplicitare le variabili u e v in funzione di x e y e quindi pensare la superficie espressa con un equazione del tipo $z = f(x, y)$. Qui bariamo un po' e supponiamo di poter invertire in tutto K. Se le variabili u e v variano in un insieme K le variabili x e y varieranno in un insieme K', ragioniamo come sopra, in tal caso

$$\cos(\gamma_i) = \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

e quindi

$$A(S) = \int\int_{K'} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{|x_u y_v - x_v y_u|}\, dxdy.$$

Operando un cambio di coordinate nell' integrale e quindi tornando alle variabili u e v otteniamo

$$A(S) = \int\int_K \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Si può dimostrare che l' integrale di sopra non dipende dalla parametrizzazione prescelta.

Esercizio 1 Utilizzando la formula di sopra si calcoli la superficie della sfera.

Esercizio 2 Si calcoli la superficie del parabolide di equazione cartesiana $z = x^2 + y^2$ contenuto nel cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

Data una funzione positiva f nel piano y, z, consideriamo in questo piano una curva definita tramite $y = f(z)$, $z \in [a, b]$. Possiamo definire la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare la curva intorno all' asse delle z. Questa avrà equazioni parametriche del tipo

$$x(\theta, z) = f(z)\cos(\theta),\ y(\theta, z) = f(z)\sin(\theta),\ z(\theta, z) = z.$$

L' angolo θ è quello formato tra l' asse delle x e la proiezione del vettore OP (P è il generico punto sulla superficie) sul piano x, y. Questo varierà tra in $[0, 2\pi]$ mentre $z \in [a, b]$. In questo caso $E = f^2(z)$, $F = 0$, $G = f'(z)^2 + 1$ e quindi l' area di una tale superficie è data da

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_a^b f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2}\, dz = 2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2}\, dz.$$

Esercizio 3 Si ricalcoli l'area del superficie definita nell' esercizio (2) tramite la formula di sopra.