Teoremi della Divergenza e Stokes nello spazio

Abbiamo visto come si definisce l' area di una superficie S, partendo da questo possiamo definire l' integrale superficiale per una qualsiasi funzione f regolare definita sulla superficie. Se S è espessa tramite le coordinate parametriche $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ con $(u, v) \in K$ abbiamo

$$\int\int_S f\,d\sigma = \int\int_K f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

Le quantità E, F e G sono le quatità gaussiane fondamentali definite la volta scorsa. Vediamo una interpretazione fisica per un integrale definito come sopra. Se la funzione f è positiva, si può pensare a questa come una funzione densità, quindi se immaginiamo S come una lamina molto sottile avente densità non omogenea. Il calcolo dell' integrale ci darà la massa della lamina. Degli integrali del tipo

$$\frac{\int_S xf\,d\sigma}{\int_S f\,d\sigma}, \frac{\int_S yf\,d\sigma}{\int_S f\,d\sigma}, \frac{\int_S zf\,d\sigma}{\int_S f\,d\sigma},$$

ci forniscono le tre coordinate del centro di massa. Data una retta r nello spazio si può definire il momento d' inerzia della superficie S rispetto alle retta r tramite

$$\int_S d^2((x,y,z), r) f\,d\sigma,$$

con $d((x, y, z), r)$ indichiamo la distanza del punto (x, y, z) della superficie dalla retta r. Ad esempio se r è l' asse delle z abbiamo $d^2((x, y, z), r) = x^2 + y^2$.

Esercizio 1 Data la semisfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, assumendo che la densità di questa sia uniformemente uguale ad 1, trovare le coordinate del centro di massa e i momenti d' inerzia rispetto ai tre assi cartesiani.

Abbiamo fatto un altro passo avanti per poter dar senso ad un integrale del tipo

$$\int\int_S < F, \vec{n} > \,d\sigma, \tag{1}$$

infatti dato un qualsiasi campo F e fissato in ogni punto un versore normale $\vec{n}$, la quantità $< F, \vec{n} >$ rappresenterà una funzione su S, d'altra parte sappiamo che in ogni punto della superficie possiamo sempre fare una doppia scelta del versore normale e quindi c'è il rischio che con la nostra scelta arbitraria la funzione $< F, \vec{n} >$ non risulti continua e quindi potrebbe non essere integrabile. Inoltre con questa doppia scelta non è chiaro che senso dare all' integrale di sopra. Insomma come per le curve anche per le superfici sarà necessario dare un orientamento.

Definizione 1 *Sia S una superficie connessa parametrizzata come sopra, supponiamo di fissare un versore normale $\overline{\xi}$ alla superficie associato ad un particolare valore dei parametri (u_0, v_0). La superficie si dirà orientabile rispetto al versore $\overline{\xi}$ se posso definire su tutta la superficie una applicazione $\xi(u, v) : K \to \mathbb{R}^3$, tale che $\xi(u_0, v_0) = \overline{\xi}$, l' applicazione ξ risulti continua e per ogni (u, v) il vettore $\xi(u, v)$ coincida con un versore normale alla superficie.*

In parole povere questo significa che posso scegliere i versori normali con continuità. Questo ci assicura che la funzione $< F, \vec{n} >$ sia continua. Si noti che esistono superfici non orientabili, il classico esempio è dato dal nastro di möbius (vedi Courant John II/2 pag. 582).
Se una superficie è orientabile allora esistono due modi per orientarla, se invece di partire da $\overline{\xi}$ fossimo partiti da $-\overline{\xi}$ avremmo considerato l' altro orientamento. Data una superficie S orientabile, fissiamo per essa un orientamento, questa si dirà orientata positivamente rispetto ad una sua parametrizzazione $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ se il vettore $X_u \times X_v$ ha il verso di orientazione di S. Fissata una superficie orientata S ed una sua parametrizzazione che l' orienta positivamente come possiamo scrivere l' integrale (1)? Avremo che $\vec{n} = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}}$ e quindi

$$\int\int_S < F, \vec{n} > \, d\sigma = \int\int_K \frac{< F, X_u \times X_v >}{\sqrt{EG - F^2}} \sqrt{EG - F^2} \, dudv. \qquad (2)$$

Se la parametrizzazione scelta non orienta positivamente la superficie basterà cambiare segno al secondo membro della (2). Quando una superficie è la frontiera di un dominio di $\mathbb{R}^3$ allora è più semplice darle un orientazione, in questo caso possiamo orientarla decidendo che la normale punti all' interno oppure all' esterno del dominio in ogni punto. In questo modo possiamo orientare anche superfici che non sono connesse.

Esempio 1 Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (F_1, F_2, F_3) = (2x, 1, z)$ attraverso la superficie T data dalle equazioni parametriche

$$x(u, v) = (2 + \cos(u)) \sin(v), \; y(u, v) = (2 + \cos(u)) \cos(v), \; z(u, v) = \sin(u),$$

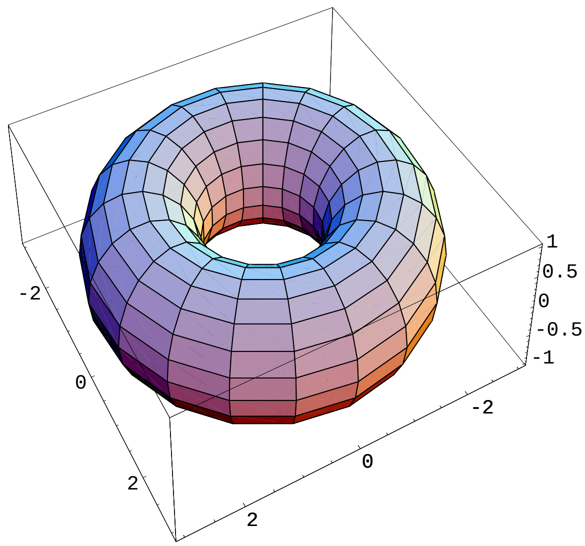

Figura 1:

dove $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [0, 2\pi]$, orientata attraverso la normale esterna.

Questa superficie si ottiene facendo ruotare una circonferenza di raggio 1 e centro $(2, 0)$ definita sul piano y, z intorno all' asse z. Questa sarà la frontiera di un dominio di $\mathbb{R}^3$ che assomiglia ad una ciambella. Tale superficie è comunemente chiamata "toro" (vedi Figura 1). Con un po' di conti otteniamo

$$X_u \times X_v = ((2+\cos(u))\cos(u)\sin(v), (2+\cos(u))\cos(u)\cos(v), (2+\cos(u))\sin(u)).$$

Per vedere che la paremetrizzazione orienta positivamente T basta verificarlo in un punto. Scegliamo ad esempio il punto $(0, 3, 0)$ corrispondente ai parametri $(u, v) = (0, 0)$, in questo caso $(X_u \times X_v)(0, 0) = (0, 3, 0)$, tale vettore punta proprio nella direzione della normale esterna alla superficie.

Per calcolare il flusso utilizziamo la (2)

$$\int\int_T < F, \vec{n} >= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{2(2+\cos(u))^2\cos(u)\sin^2(v) + (2+\cos(u))\cos(u)\cos(v) + (2+\cos(u))\sin^2(u)\right\} dudv = 2\pi\int_0^{2\pi} 2 + 3\cos(u) + 2\cos^2(u) = 12\pi^2.$$

Finalmente possiamo scrivere il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$, dato un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ ed un campo F regolare in esso, ci chiediamo se è verificata la seguente

$$\int\int\int_D \mathbf{d}ivF\,dxdydz = \int\int_{\partial D} < F, \vec{n} > \,d\sigma. \qquad (3)$$

dove l' integrale superficiale a secondo membro della (3) è fatto scegliendo come orientazione per ∂D quella relativa alla normale esterna di D. Anche in questo caso, come in $\mathbb{R}^2$, l' uguaglianza (3) sarà conseguenza delle formule di Gauss–Green che in questo caso sono

$$\int\int\int_D \partial_{x_i} F_i\,dxdydz = \int\int_{\partial D} F_i n_i\,d\sigma \quad i \in \{1,2,3\}, \qquad (4)$$

dove con n_i indichiamo la i-esima componente del versore normale ed abbiamo posto (solo per utilizzare una scrittura compatta) $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$. Una volta dimostrate queste la (3) si ottiene sommando le tre uguaglianze.

Osservazione 1 *Si osservi che le formule di Gauss–Green valide per un dominio D di $\mathbb{R}^2$ (vedi (3) Lez I) si possono riscrivere in modo analogo alle (4) infatti per ogni funzione f continua si ha $\int_{\partial D} f\,dy = \int_{\partial D} f n_1\,ds$ e $-\int_{\partial D} f\,dx = \int_{\partial D} f n_2\,ds$.*

Dimostriamo, nel caso di un dominio normale rispetto a z, l' uguaglianza (4) con i=3. In tal caso esistono 2 funzioni φ_1 e φ_2 definite in un dominio K del piano x, y, tali che $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in K,\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}$. Allora utilizzando il teorema fondamentale del calcolo otteniamo

$$\int\int\int_D \partial z F_3\,dxdydz = \int\int_K \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \partial z F_3\,dxdydz =$$

$$\int\int_K F_3(\varphi_2(x,y)) - F_3(\varphi_1(x,y))\,dxdy.$$

Rimane da verificare che l'ultimo membro dell' uguaglianza precedente coincide con il secondo membro della (4). Indichiamo rispettivamente con S_2 ed S_1 le superfici di equazioni, $z = \varphi_2(x,y)$, $(x,y) \in K$ e $z = \varphi_1(x,y)$, $(x,y) \in K$. Allora abbiamo due possibilità; la prima è che la frontiera del dominio ∂D coincida con l' unione dei sostegni delle due superfici S_1 e S_2, la seconda è che la frontiera di D contenga oltre ai sostegni di S_1 ed S_2 anche delle parti cilindriche perpendicolari al piano x, y ($n_3 = 0$ su di esse). In entrambi i casi è facile osservare che

$$\int\int_{\partial D} F_3 n_3\,d\sigma = \int\int_K F_3(\varphi_2(x,y)) - F_3(\varphi_1(x,y))\,dxdy.$$

Ora se il dominio è normale rispetto a tutte le direzioni abbiamo che ognuna delle uguaglianze in (4) è verificata e quindi vale il teorema della divergenza (3). In realtà questo teorema vale per domini molto più generali, "unioni finite di domini normali", in tal caso bisogna lavorare un po' vedendo localmente varie parti del dominio D e della sua frontiera (in modo tale che ognuna di queste parti sia normale), si usa un metodo chiamato della partizione dell' unità (chi è interessato può vedere Courant John vol II/2 pag. 625–645).

Osserviamo che se un campo F è a divergenza costante non nulla l' uguaglianza (3) ci permette di calcolare il volume tramite un integrale superficiale (a volte può essere più semplice). Supponiamo che $\mathbf{d}ivF = c$, se scriviamo la (3) otteniamo

$$Vol(D) = \int\int\int_D dxdydz = \frac{1}{c}\int\int_\partial < F, \vec{n} > \, d\sigma.$$

Ad esempio utilizzando l' Esercizio 1 possiamo calcolarci il volume del solido che ha come frontiera il toro. In tal caso $\mathbf{d}ivF = 3$ e quindi il volume di tale solido vale $4\pi^2$. Il teorema della divergenza può essere utile anche quando è utilizzato nel verso opposto, spesso è più semplice calcolare un integrale triplo piuttosto che un integrale superficiale.

Esercizio 2 Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (xy, xy, z)$ attraverso la superficie del cubo $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ orientata nel verso della normale esterna

Per concludere il discorso in $\mathbb{R}^3$ vogliamo ottenere l' equivalente del teorema di Stokes. Ricordiamoci che in due dimensioni questo si scrive

$$\int\int_S (\mathbf{r}otF)_z \, dxdy = \int_{\partial S} < F, \vec{t} > \, ds, \tag{5}$$

dove S è un dominio di $\mathbb{R}^2$ e la frontiera di S si intende percorsa in verso antiorario. In realtà possiamo pensare S come una superficie di $\mathbb{R}^3$ che si trova sul piano x, y. L' integrando del primo membro della (5) si può indicare col prodotto scalare $< \mathbf{r}otF, \vec{n} >$, dove $\vec{n}$ rappresenta il versore normale alla superficie S che punta nella direzione dell' asse z, mentre il secondo membro si può tranquillamente pensare come il lavoro di un campo lungo una curva chiusa dello spazio, che però giace su un piano. A meno di cambiare le coordinate un risultato del genere vale per ogni superficie che si trova su un piano, a patto di specificare bene il verso di percorrenza per ∂S si ha

$$\int\int_S < \mathbf{r}otF, \vec{n} > , dxdy = \int_{\partial S} < F, \vec{t} > \, ds. \tag{6}$$

L' uguaglianza (6) pensata per una qualsiasi superficie avente bordo ∂S è proprio il teorema di Stokes nello spazio, il verso di percorrenza corretto per ∂S è dato nel seguente modo. S è una superficie orientata. Si fissa un punto su ∂S, si considera un vettore $\vec{\eta}$ sul piano tangente alla superficie in quel punto che non sia tangente alla curva ∂S e che punti nella direzione opposta ad S, allora ∂S è orientata in modo tale che dato $\vec{t}$ il vettore tangente a ∂S nel punto, il prodotto vettoriale $\vec{\eta} \times \vec{t}$ è orientato come la superficie S. Si noti che se la superficie si trova sul piano x, y ed è orientata nel verso dell' asse z questa definizione coincide con quella data nel caso bidimensionale. Si osservi che il Teorema di Stokes ci dice in particolare che data una curva chiusa nello spazio, allora per una qualsiasi superficie che abbia come bordo la curva data, l' integrale del flusso del rotore è costante. Ci dice inoltre che possiamo calcolarci il lavoro di un campo lungo una curva chiusa attraverso il flusso del rotore lungo una qualsiasi superficie tridimensionale che abbia come bordo la curva. L' idea euristica della dimostrazione del teorema consiste nell' approssimare la superficie data attraverso una superficie poliedrica, siccome su ognuna delle facce del poliedro il teorema di Stokes è verificato (siamo su un piano) e siccome i lati comuni del poliedro danno contributi per la circuitazione che si elidono, l' unico bordo che rimane è quello di S (in realtà è anch' esso approssimato). Questo solo per dare l' idea. Vediamo un esempio concreto.

Esempio 2 Consideriamo la superficie $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ orientata in modo tale che il versore normale nel punto della superficie $(0, 0, 1)$ sia proprio $(0, 0, 1)$ e il campo $F = (y, z, x)$, verifichiamo il teorema di Stokes. In questo caso il bordo della superficie è dato dalla circonferenza sul piano x, y di centro l' origine e raggio 1. Secondo la definizione che abbiamo dato la circonferenza vista dall' asse z dovrà essere percorsa in verso antiorario, quindi come equazioni parametriche scegliamo $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$, $z(t) = 0$. La circuitazione del campo lungo questa curva sarà data da

$$\int_{\partial S} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \int_0^{2\pi} - \sin^2(t)\, dt = -\pi.$$

Calcoliamo ora il flusso del rotore sulla superficie, osserviamo che $\mathbf{r}otF = (-1, -1, -1)$ e che la superficie si parametrizza facilmente proprio tramite le variabili x ed y che varieranno in $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$, un cerchio. Dopo aver calcolato il vettore normale alla superficie ed essere passati alle coordinate polari otteniamo

$$\int\int_S < \mathbf{r}otF, \vec{n} > \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho(2\rho\cos(t) + 2\rho\sin(t) - 1)\, dt = -\pi.$$

Come abbiamo fatto nel caso bidimensionale vediamo un' interpretazione dei risultati ottenuti nella meccanica dei fluidi.

Indichiamo con $\rho(x, y, z, t)$ la densità del liquido nello spazio e consideriamo il campo di velocità $v = (v_1(x, y, z, t), v_2(x, y, z, t), v_3(x, y, z, t))$. Dato un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ si può scrivere la seguente equazione di conservazione della massa

$$-\int\int\int_D \rho_t \, dxdydz = \int\int_{\partial D} < \rho v, \vec{n} > \, d\sigma, \tag{7}$$

il termine a secondo membro rappresenta la quantità di liquido che esce dalla superficie ∂D nell' unità di tempo, mentre il termine a primo membro rappresenta la variazione di massa sempre nell' unità di tempo. L' uguaglianza è dovuto al fatto che si assume che la massa si conservi. Anche in questo caso tramite il teorema della divergenza possiamo riscrivere il secondo membro della (7) ed otteniamo quindi

$$-\int\int\int_D \rho_t \, dxdydz = \int\int\int_D \mathbf{d}iv(\rho v) \, dxdydz.$$

Siccome tale uguaglianza deve valere in ogni dominio D si ottiene la seguente legge di conservazione

$$\rho_t + \mathbf{d}iv(\rho v) = 0.$$

Se il liquido è omogeneo ed incomprimibile la densità è costante e l'equazione precedente diventa $\mathbf{d}iv(v) = 0$.

Questo significa che dato un qualsiasi dominio D la quantità di fluido che passa attraverso la sua frontiera nell' unità di tempo è nulla. Entra tanto fluido quanto ne esce. Se dividiamo D in due parti in modo tale che la sua superficie sia divisa in due superfici S_1 ed S_2 aventi lo stesso bordo C, abbiamo per quanto appena detto che la quantità di fluido che attraversa S_1 sarà uguale alla quantità che attraversa S_2. È possibile esprimere questa quantità comune tramite una circuitazione sul bordo comune C? La risposta è affermativa, infatti se un campo è a divergenza nulla in un dominio opportuno (vedi Courant John Vol II/1 pag 315) allora si può dimostrare che questo è il rotore di un campo A. Allora possiamo scrivere i flussi attraverso le superfici S_i tramite il teorema di Stokes nel seguente modo

$$\int\int_{S_i} < v, \vec{n} > \, d\sigma = \int\int_{S_i} < \mathbf{r}otA, \vec{n} > \, d\sigma = \int_C < A, \vec{t} > \, ds.$$