SOLUZIONI TERZO ESONERO

1. Esercizio

i.) Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea

$$y''' - (1+\alpha)\, y'' + \alpha\, y' = 0$$

al variare del parametro $\alpha \in R$.
ii.) Determinare l'integrale generale dell'equazione completa

$$y''' - (1+\alpha)\, y'' + \alpha\, y' = x$$

per $\alpha = 0$ *e per* $\alpha = 2$.

1.1. **Soluzione.**

1.1.1. *Integrale generale dell'omogenea.*
Equazione caratteristica

$$\lambda^3 - (1+\alpha)\,\lambda^2 + \alpha\,\lambda = \lambda(\lambda-1)(\lambda-\alpha) = 0$$

- se $\lambda \neq 0, \neq 1 :\quad y(x) = A + B\, e^x + C\, e^{\alpha\, x}$
- se $\lambda = 0 :\quad y(x) = A + B\, e^x + C\, x$
- se $\lambda = 1 :\quad y(x) = A + B\, e^x + C\, x\, e^x$

1.1.2. *Il caso* $\alpha = 0$.

$$y''' - y'' = x$$

Cerchiamo la soluzione come polinomio di grado (almeno) 3:

$$y(x) = \gamma x^3 + \beta x^2, \quad \gamma = -\frac{1}{6},\ \beta = -\frac{1}{2}$$

essendo (ovviamente) inutile aggiungere i termini di grado piú basso.
L'integrale generale si ottiene servendosi dell'integrale generale dell'equazione omogenea precedentemente trovato per $\alpha = 0$

$$y(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + A + B\, e^x + C\, x$$

1.1.3. *Il caso* $\alpha = 2$.

$$y''' - 3\, y'' + 2\, y' = x$$

Cerchiamo la soluzione provando con un polinomio di grado (almeno) 2:

$$y(x) = \gamma x^2 + \beta\, x : \quad \gamma = \frac{1}{4},\ \beta = \frac{3}{4}$$

L'integrale generale si ottiene servendosi dell'integrale generale dell'equazione omogenea precedentemente trovato per $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}\, x + A + B\, e^x + C\, e^{2\, x}$$

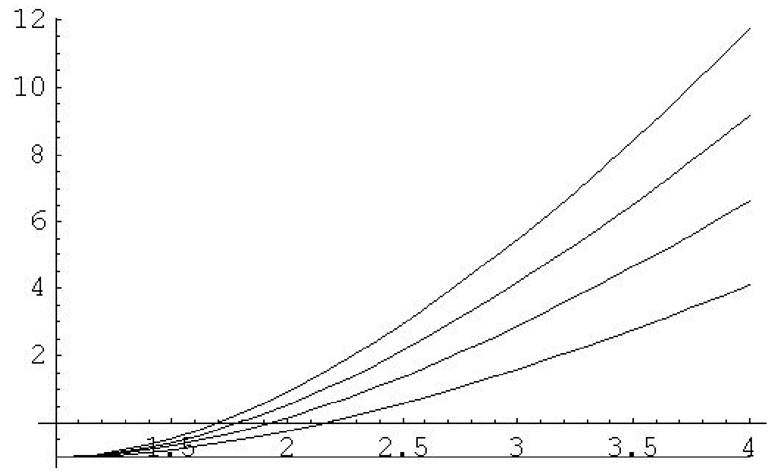

FIGURA 1. Esercizio 2, $y_\alpha(x)$ $\quad \alpha = 1,\, 2,\, 3,\, 4$

2. Esercizio

Assegnata l'equazione

$$y'' - \frac{1}{x\ln(x)}y' = 0, \quad x \in (1, +\infty)$$

- *Determinare l'integrale generale.*
- *Determinare la soluzione* $y_\alpha(x)$ *che soddisfa le condizioni iniziali* $y(e) = \alpha$ *e* $y'(e) = 1 + \alpha$ *al variare di* $\alpha \in R$.
- *Calcolare i limiti*

$$\lim_{x\to 1^+} y_\alpha(x) \qquad \lim_{x\to 1^+} y'_\alpha(x).$$

2.1. **Soluzione.**

2.1.1. *Integrale generale.*
Posto

$$y' = z : \quad \to \quad z' - \frac{1}{x\ln(x)}z = 0 \quad \to \quad z(x) = A\,\ln(x)$$

Integrando si ricava quindi:

$$y(x) = A\,x\,(\ln(x) - 1) + B$$

2.1.2. *Soluzione verificante le condizioni iniziali.*

$$y(e) = A\,e(\ln(e) - 1) + B = B$$

$$y'(x) = A\ln(x) \quad \to \quad y'(e) = A$$

La soluzione richiesta é pertanto

$$y_\alpha(x) = (1 + \alpha)\,x\,(\ln(x) - 1) + \alpha$$

2.1.3. *I limiti.*

$$\lim_{x\to 1^+} y_\alpha(x) = -1$$

$$y'_\alpha(x) = (1+\alpha)\,\ln(x): \quad \to \quad \lim_{x\to 1^+} y'_\alpha(x) = 0$$

(vedi Figura 1)

3. Esercizio

Assegnata l'equazione

$$y'' - 2\alpha y' + y = \cos(x),$$

i.) Determinare, per $\alpha \neq 0$, una soluzione periodica.
ii.) Trovare l'integrale generale dell'equazione nel caso $\alpha = 0$ e riconoscere che non esistono, per tale α, soluzioni periodiche.

3.1. **Soluzione.**

3.1.1. *Soluzione periodica.*
Considerata la forma del termine a secondo membro e il fatto che l'equazione é lineare a coefficienti costanti possiamo cercare una sua soluzione nella forma

$$A\cos(x) + B\sin(x)$$

sostituendo nell'equazione si ottiene

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{2\alpha}$$

La funzione

$$y(x) = -\frac{1}{2\alpha}\sin(x)$$

é (ovviamente) periodica e soddisfa l'equazione.

3.1.2. *Il caso $\alpha = 0$.*

$$y'' + y = \cos(x)$$

Tenuto conto che l'equazione omogenea possiede le soluzioni $\cos(x) \quad \sin(x)$ una soluzione dell'equazione completa dovrá essere cercata nella forma

$$x(A\cos(x) + B\sin(x))$$

Sostituendo si ottiene $A = 0, \quad B = 1/2$

$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \frac{1}{2}x\sin(x)$$

Tenuto conto che i primi due, dei tre addendi di cui sopra, sono periodici, se $y(x)$ fosse periodica risulterebbe, di conseguenza, periodico anche il terzo addendo che, invece, non é affatto periodico.

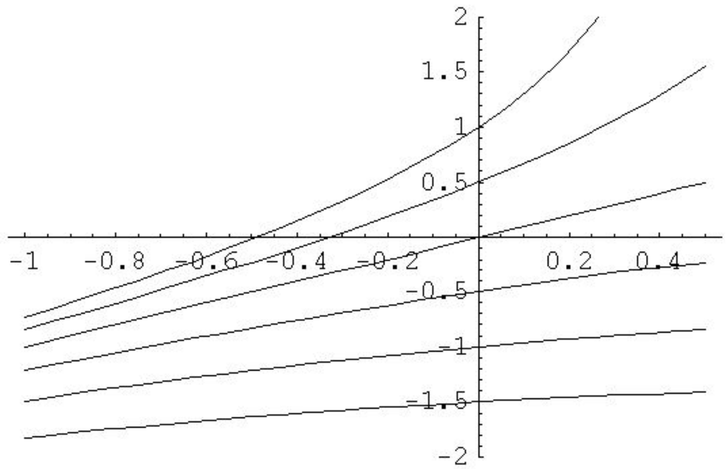

FIGURA 2. Esercizio 4: $y(x) = -\ln\left(e^{-x} - 1 + e^{-y_0}\right), y(0) = -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1$

4. Esercizio

Assegnata

$$y' = e^{y-x}$$

si riconosca, dall'equazione stessa, che

- *le soluzioni $y(x)$ della equazione non hanno né punti di minimo né di massimo;*
- *i grafici delle soluzioni possono presentare flessi solo in punti $P = (x, y)$ con $x = y$.*

Determinare la soluzione della equazione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 0$, e riconoscere che tutte le soluzioni dell'equazione proposta non hanno flessi.

4.1. **Soluzione.**

4.1.1. *Massimi e minimi.*
Le soluzioni $y' = e^{y-x}$, vedi Figura 2, hanno, evidentemente, $y'(x) > 0$, si tratta cioé di funzioni strettamente crescenti.

4.1.2. *I flessi.*
In un punto di flesso risulta $y''(x) = 0$, tenuto conto che $y(x)$ é soluzione dell'equazione riesce

$$y''(x) = (e^{y(x)-x})' = e^{y(x)-x}(y'(x) - 1) = e^{y(x)-x}(e^{y(x)-x} - 1)$$

Ne segue

$$y''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{y(x)-x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) - x = 0$$

4.1.3. *Soluzione con $y(0) = 0$.*
Si tratta di un'equazione a variabili separabili

$$\int_0^y e^{-y}\,dy = \int_0^x e^{-x}\,dx, \quad \Rightarrow \quad 1 - e^{-y} = 1 - e^{-x}, \quad \Rightarrow \quad y = x$$

Tenuto conto che

- $y(x) = x$ (quella appena trovata) é una soluzione dell'equazione,
- il teorema di unicitá implica che i grafici di soluzioni diverse non hanno punti comuni
- si deduce che nessuna soluzione (diversa dalla $y(x) = x$) puó passare per punti $P(x, y)$ con $x = y$ e, per quanto osservato sopra, nessuna soluzione (diversa dalla $y(x) = x$) puó presentare flessi
- ... neanche la $y(x) = x$ presenta flessi (il suo grafico é la retta bisettrice del I e III quadrante).

Appunti preparati 9 dicembre 2002