SOLUZIONI ESONERO 2

1. Esercizio

Calcolare flusso uscente e circuitazione del campo vettoriale $\overrightarrow{F} = \{x, y\}$ *lungo il bordo della regione*

$$A = \{x \geq 0,\ \ x^2 + y^2 \leq 2,\ \ 0 \leq y \leq x^2\}$$

percorso nel verso antiorario.

1.1. Soluzione. :

FLUSSO USCENTE

$$\int_{\partial A} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, ds = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\, d\theta + \int_0^1 (t(-2t) + t^2(1))dt = \pi\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3}$$

PRIMA OSSERVAZIONE

Il campo assegnato é il gradiente della funzione

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

quindi si tratta di un campo conservativo.
Quindi la circuitazione richiesta vale 0.

CALCOLO ESPLICITO

Indichiamo con $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ le tre porzioni di curva regolare che compongono il bordo assegnato

$$\begin{cases} \boxed{1} & x = t, y = 0, 0 \leq t \leq \sqrt{2} \\ \boxed{2} & x = \cos(t), y = \sin(t), 0 \leq t \leq \pi/4 \\ \boxed{3} & x = 1 - t, y = (1-t)^2, 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

L'integrale lungo l'arco di circonferenza, $\boxed{2}$, vale 0 perché $\overrightarrow{F}$ é radiale, e quindi ortogonale alla tangente alla curva in ogni punto.
Gli altri due integrali valgono:

$$\int_{\boxed{1}} : \int_0^{\sqrt{2}} t\, dt = 1, \qquad \int_{\boxed{3}} : \int_0^1 \left(-(1-t) - 2(1-t)^3\right) dt = -1$$

IL TEOREMA DI STOKES

La circuitazione richiesta corrisponde a

$$\iint_\Omega rot_z(\overrightarrow{F})dxdy$$

Si calcola facilmente $rot(\overrightarrow{F})$ e si riconosce che $rot(\overrightarrow{F}) = 0$

2. Esercizio

i) Calcolare l'area della porzione di superficie sferica $x^2+y^2+z^2=1$ al di sopra del piano $z=h, \quad 0 \le h \le 1$.
ii) Determinare per ogni valore reale di h l'area della porzione della superficie sferica precedente che si trova al di sopra del piano $z=h$.

2.1. **Soluzioni.** :

i) Sia $0 \le h \le 1$ la superficie richiesta é la superficie cartesiana:

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}, \quad x^2+y^2 \le 1-h^2.$$

La sua area é data dall'integrale doppio:

$$\iint_{x^2+y^2 \le 1-h^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy = 2\pi \int_0^{\sqrt{1-h^2}} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = 2\pi(1-h).$$

ii) I casi di altri valori di h:

- $h \ge 1: \quad \text{Area}(h)=0$
- $h \le -1: \quad \text{Area}(h)=4\pi$
- $-1 \le h \le 0: \quad \text{Area}(h)=4\pi - \text{calotta} = 2\pi(1-h)$

3. Esercizio

Sia

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{\sqrt{x+y+z}} \; \{x,y,z\}$$

i) calcolare la circuitazione di $\overrightarrow{F}$ lungo la poligonale triangolare determinata dai punti $A=(1,0,0), \quad B=(0,1,0), \quad C=(0,0,1)$, orientata nel verso ABC.
ii) calcolare il flusso di $\overrightarrow{F}$ e di $rot\overrightarrow{F}$ traverso la superficie triangolare determinata dai punti ABC precedenti, orientata in modo che la terza componente del versore normale sia positiva.

3.1. **Soluzione.** :

Si noti che sulla poligonale riesce $x+y+z=1$
La circuitazione:

$$\begin{cases} AB: & x=1-t, y=t, 0 \le t \le 1 \\ BC: & y=1-t, z=t, 0 \le t \le 1 \\ CA: & x=t, z=1-t, 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\int_{ABC} F \times tds = \int_{ABC} F \times tds + \int_{BC} F \times tds + \int_{CA} F \times tds =$$
$$= \int_0^1 [((1-t)-t]dt + \int_0^1 [-(1-t)+t]dt + \int_0^1 [t-(1-t)]dt = 0$$

Si noti che i tre integrali sono uguali e naturalmente tutti e tre uguali a 0.

ii) flusso di F
Il versore normale alla superficie $S(ABC)$ é

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$$

$$\iint_{S(ABC)} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint (x+y+z) d\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} Area[S(ABC)] = \frac{1}{2}$$

iii) flusso del rotore:
dalla formula di Stokes, avendo giá calcolato la circuitazione sul bordo:

$$\iint_{\partial S} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \iint_S rot(\overrightarrow{F}) \times \overrightarrow{n}\, d\sigma = 0$$

Calcolo esplicito:

$$rot(F) = z\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{x+y+z}} - y\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{x+y+z}},$$

$$x\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{x+y+z}} - z\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x+y+z}},$$

$$y\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x+y+z}} - x\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{x+y+z}}$$

Tenuto presente che sulla superficie $S(ABC)$ tutti termini quali il seguente

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{x+y+z}} = \frac{1}{2}$$

valgono lo stesso valore si ottiene

$$\iint rot(\overrightarrow{F}) \times \overrightarrow{n} d\sigma = \frac{1}{2} \iint (z - y + x - z + y - x) d\sigma = 0$$

4. Esercizio

i) Determinare per quali $\alpha \geq 0$ converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha + x^3)}{x^2} dx.$$

ii) Dire se convergono gli integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\cos(x)} dx, \qquad \int_1^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}\cos(x)} dx.$$

4.1. **Soluzione.**

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$$

Tenuto conto che

$$|\sin(t)| \leq |t|$$

ne segue

$$\left|\frac{\sin(x^\alpha + x^3)}{x^2}\right| \leq \frac{|x^\alpha + x^3|}{x^2}$$

e quindi la condizione sufficiente per la convergenza dell'integrale improprio su $[0,1]$ é soddisfatta se $\alpha > 1$

Il secondo integrale improprio é sicuramente convergente, qualunque sia α perché

$$\left|\frac{\sin(x^\alpha + x^3)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

Quindi l'integrale improprio proposto é convergente per $\alpha > 1$
ii)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\cos(x)}dx$$

é convergente perché l'unica singolaritá, $x = 0$ presenta come ordine di infinito quello di $\sqrt{x}$ che é appunto sufficientemente basso.

$$\int_1^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}\cos(x)}dx$$

non é convergente perché nel punto $x = \pi/2$ la funzione integranda diverge con ordine di infinito 1.

Si puó del resto riconoscere che

$$\cos(x) = \cos(\pi/2) + (x - \pi/2)\sin(\xi) = -(\pi/2 - x)\sin(\xi) \geq (\pi/2 - x)\sin(1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}\cos(x)} \geq \frac{1}{\sin(1)}\frac{1}{\pi/2 - x}$$

ed é facile riconoscere che l'integrale

$$\int_1^{\pi/2} \frac{1}{\pi/2 - x}dx = \infty$$