PRIMO ESONERO

1. Esercizio

1.1. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{y^n}{2^n}$$

si determina con il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)|y|^{(n+1)}}{2^{(n+1)}}\frac{2^n}{(n+1)|y|^n}=\frac{1}{2}|y|\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{2}|y|$$

Ne segue che la serie converge se

$$\frac{1}{2}|y|<1$$

ovvero il raggio é $R=2$

1.2. Tenuto conto che

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

e che, poiché per $|x|<1$ si puó derivare termine a termine, riesce anche

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}$$

si riconosce che, per $|y|<2$ riesce

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{y}{2}\right)^n=\frac{1}{(1-y/2)^2}=\frac{4}{(2-y)^2}$$

1.3. La serie $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{y^n}{2^n}$ converge uniformemente per $|y|\leq\rho<2$ quindi

- tenuto conto che per $x\in[0,\pi/4]$ riesce $\tan(x)\in[0,1]$
- riesce

$$\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2(x)}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{\tan^n(x)}{2^n}dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}\int_0^{\pi/4}\tan^n(x)\frac{1}{\cos^2(x)}dx$$

- eseguendo la sostituzione $\tan(x)=t$ si ha
-

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}\int_0^1 t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2$$

1.4. Analogo risultato per l'integrale si sarebbe ottenuto servendosi dell'espressione esplicita della somma ricavata precedentemente

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{\tan^n(x)}{2^n} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)} \frac{4}{(2-\tan(x))^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{4}{(2-t)^2} dt = 2$$

2. Esercizio

2.1. Il punto $(0,0)$ assegnato soddisfa le equazioni che definiscono il vincolo qualsiasi sia a.
La condizione sufficiente espressa dal teorema di Dini per esplicitare dall'equazione $f(x,y) = 0$ $y = \varphi(x)$ in un intorno dell'origine é

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x=0,y=0)} \neq 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^{xy} - \sin(x+y) + a$$

quindi per soddisfare la 2.1 occorre $a \neq 0$.
Indichiamo con $y = \varphi(x)$ tale funzione implicita.
Riesce

- $\varphi \in C^1$
- $\varphi(0) = 0$
- $$\varphi'(0) = -\left.\frac{f_x}{f_y}\right|_{x=0,y=0} = -\left.\frac{ye^{xy} + \sin(x+y) - 1 - a}{xe^{xy} - \sin(x+y) + a}\right|_{x=0,y=0} = \frac{1+a}{a}$$

2.2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) + x}{\sin(x)}$$

Si tratta del quoziente di due funzioni di classe C^1 infinitesime per $x \to 0$.
Servendosi della formula di Taylor o del teorema di Hopital si puó quindi cercare il limite del quoziente delle derivate

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi'(x) + 1}{\cos(x)} = \frac{\frac{1+a}{a} + 1}{1}$$

Ne segue che per avere limite 0 deve essere

$$a = -\frac{1}{2}$$

3. Esercizio

3.1.
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)dx = \frac{1}{\pi}$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(kx)dx$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\sin(kx)dx$$

Tenuto conto delle primitive seguenti:
$$\int \sin(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((k-1)\ x)}{k-1} - \frac{\sin((1+k)\ x)}{1+k}\right), \quad k>1$$
$$\int \sin(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos((k-1)\ x)}{k-1} - \frac{\cos((1+k)\ x)}{1+k}\right), \quad k>1$$

Si ricava:
$$a_k = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos((k+1)\pi)-1}{k+1} - \frac{\cos((k-1)\pi)-1}{k-1}\right) = \frac{(-1)^{k+1}-1}{\pi}\frac{1}{k^2-1}$$

i soli a_{2h} di indice pari sono diversi da 0 e valgono
$$a_{2h} = 2\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-4h^2}$$

Per quanto concerne i coefficienti b_k riesce:
$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(x)dx = \frac{1}{2}$$
$$b_k = 0 \quad \forall k>1$$

La serie di Fourier é pertanto la seguente
$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{2}{\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\cos(2hx)}{1-4h^2}$$

Nella seguente Figura 1 sono disegnati i polinomi di Fourier (somme parziali della serie) seguenti:

- in blu
$$\frac{1}{\pi} + \frac{\sin(x)}{2} - \frac{2\ \cos(2\,x)}{3\,\pi}$$
- in rosso
$$\frac{1}{\pi} + \frac{\sin(x)}{2} + \frac{2}{\pi}, \left(\frac{-\cos(2\,x)}{3} - \frac{\cos(4\,x)}{15} - \frac{\cos(6\,x)}{35} - \frac{\cos(8\,x)}{63}\right)$$

Notate la rapiditá della convergenza: il secondo polinomio, quello in rosso, considera solo 6 addendi eppure la sua somma é giá vicinissima alla funzione, tutt'altro che regolare, $f(x)$ assegnata.

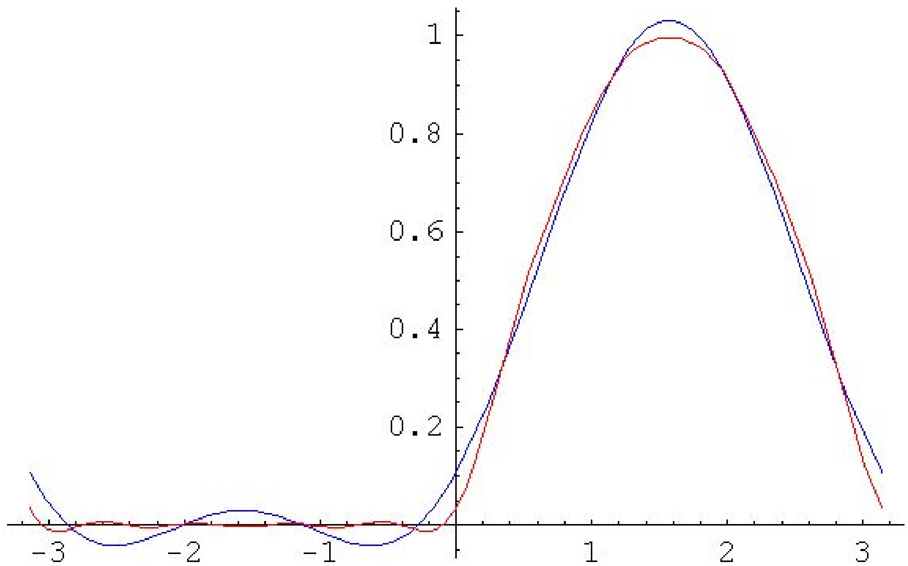

Figura 1. Due polinomi di Fourier per la $f(x)$

3.2. La serie ottenuta converge uniformemente in tutto R : infatti i suoi termini sono maggiorati, qualunque sia $x \in R$, da

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{1-4h^2}$$

serie a termini positivi costanti convergente.

4. Esercizio

Il vincolo rappresenta un'ellisse con gli assi ruotati a 45 rispetto agli assi cartesiani: la funzione da rendere massima é l'ascissa dei punti, vedi Figura 2.
In altri termini si chide quale siano la massima e la minima ascissa dell'ellisse $13(x^2+y^2) - 10xy - 16 = 0$

I punti di estremo della funzione $f(x,y) = x$ sul vincolo determinato dall'equazione $13(x^2+y^2) - 10xy - 16 = 0$ si deducono dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1 + \lambda(26x - 10y) & = 0 \\ \lambda(26y - 10x) & = 0 \\ 13(x^2+y^2) - 10xy - 16 & = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione

$$\lambda(26y - 10x) = 0$$

offre $\lambda = 0$ oppure $26y - 10x = 0$: la prima scelta, $\lambda = 0$ non soddisfa la prima equazione, quindi l'unica scelta legittima é la seconda

$$y = \frac{5}{13} x \tag{4.1}$$

É inutile risolvere la prima equazione, dalla quale ricaveremmo solo λ in funzione di x, y.
Sostituendo la 4.1 nella terza equazione del sistema si ottiene

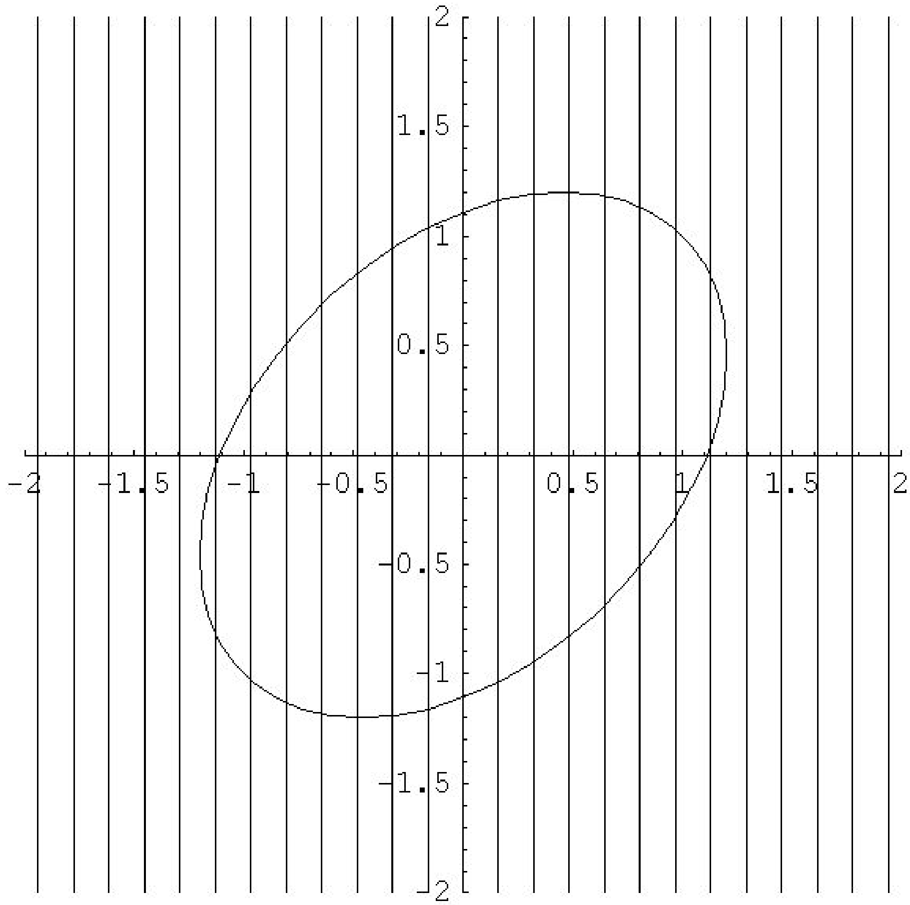

FIGURA 2. L'ellisse e le linee di livello della funzione $f(x,y) = x$

$$13(x^2 + \frac{5^2}{13^2}x^2) - 10x\frac{5}{13}x = 16 \quad \Rightarrow \frac{144}{13}x^2 = 16$$

da cui

$$x = \pm\frac{\sqrt{13}}{3}, \;\; y = \pm\frac{5}{3\sqrt{13}}$$

Il minimo richiesto é

$$-\frac{\sqrt{13}}{3},$$

il massimo é

$$\frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Appunti preparati il 30 ottobre 2002