Serie di Potenze

Introduciamo il concetto di convergenza puntuale ed uniforme per successioni di funzioni.

Definizione 1 *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Sia data al variare di $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n : I \to \mathbb{R}$. Diciamo che la successione di funzioni $\{f_n\}_n$ converge puntualmente alla funzione $f : I \to \mathbb{R}$ se*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad\qquad \forall x \in I$$

Esempio 1 Siano $f_n(x) = x^n$, queste funzioni sono definite per ogni $x \in \mathbb{R}$, vediamo se convergono. Si vede subito che

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se}\, x > 1 \\ 1 & \text{se}\, x = 1 \\ 0 & \text{se} -1 < x < 1 \\ \nexists & \text{se}\, x \le -1 \end{cases}$$

Quindi osserviamo che la convergenza puntuale si ha nell' intervallo $(-1, 1]$ e in questo caso la funzione limite è

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} -1 < x < 1 \\ 1 & \text{se}\, x = 1. \end{cases}$$

Nell' Esempio 1 si nota come una successione di funzioni molto regolari possono convergere puntualmente ad un limite discontinuo. Questo significa che, con la convergenza puntuale, al limite possiamo perdere alcune proprietà qualitative verificate dalle funzioni della successione di partenza. Tornando all' esempio precedente in modo euristico osserviamo che il grafico delle f_n per n grande non tende a “schiacciarsi” in modo uniforme sul grafico della funzione limite f. Se andiamo a considerare la quantità

$$\sup_{x\in(-1,1]} |f_n(x) - f(x)|$$

questa risulterà sempre uguale ad 1.

Introduciamo un nuovo concetto di convergenza per successioni di funzioni.

Definizione 2 *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Sia data al variare di $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n : I \to \mathbb{R}$. Diciamo che la successione di funzioni $\{f_n\}_n$ converge uniformemente alla funzione $f : I \to \mathbb{R}$ in I ($f_n \rightrightarrows f$ in I) se*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Evidentemente questo tipo di convergenza è più forte di quella puntuale, inoltre l'idea di convergenza uniforme è strettamente legata all' intervallo I che si considera, infatti nell' Esempio 1 possiamo osservare che in ogni intervallo del tipo $(-1+\epsilon, 1-\epsilon)$ si ha convergenza uniforme.

Nel seguito enunciamo tre risultati che ci fanno capire l'importanza della convergenza introdotta nella Definizione 2.

Proposizione 1 *Siano $f_n \in C(I)$, supponiamo che $f_n \rightrightarrows f$ in I, allora $f \in C(I)$.*

Omettiamo la dimostrazione di tale risultato in quanto è un po' delicata, comunque si può trovare nel Courant John vol 1 (pag.536).

Proposizione 2 *Siano $f_n \in C([a,b])$, supponiamo che $f_n \rightrightarrows f$ in I, allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dimostrazione Osserviamo che

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \le (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)|$$

da cui otteniamo la tesi.

Proposizione 3 *Sia I un intervallo aperto, siano $f_n \in C^1(I)$, supponiamo che le f_n convergano puntualmente ad f e che le f'_n convergano uniformemente ad una funzione g in I, allora $f \in C^1(I)$ ed $f' = g$.*

Dimostrazione Fissato $x_0 \in I$ si ha per ogni n

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f'_n(x)\,dx$$

Passando al limite in n in questa uguaglianza e utilizzando la Proposizione precedente si ottiene

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x g(x)\,dx$$

Dal teorema fondamentale del calcolo segue la tesi.

Esercizio 1 Siano $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme negli intervalli $[0,1]$ ed $\mathbb{R}$.

Esercizio 2 Siano $f_n(x) = e^{-xn}$. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme negli intervalli $[0, 1]$ ed $[1, +\infty)$.

Data una successione di funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$, possiamo considerare la serie di funzioni associata

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

questa convergerà puntualmente o uniformemente ad una funzione $S(x)$ se la successione di funzioni data dalle somme parziali

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n(x)$$

converge puntualmente o uniformemente ad $S(x)$.
Dal momento che operativamente è difficile dimostrare che una serie converge uniformemente risulta utile il seguente risultato (per una dimostrazione si può vedere il Courant John vol I pag. 535).

Proposizione 4 *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni definite in I, supponiamo che*

$$|f_n(x)| \leq a_n \, \forall x \in I \;\; e \;\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \tag{1}$$

allora la serie converge uniformemente in I.

Se è verificata la (1) allora si dice che la serie converge totalmente.

Esercizio 3 Siano $f_n(x) = \frac{|x^n|}{n+x^2}$ definite in $\mathbb{R}$ per $n \geq 1$. Dimostrare che la serie converge puntualmente nell' intervallo $(-1, 1)$ ma non converge totalmente in questo intervallo.

Finalmente possiamo introdurre le serie di potenze che sono delle particolari serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

dove x_0 è un fissato valore in $\mathbb{R}$ e $\{a_n\}$ è una successione numerica data.

La motivazione per lo studio di tali serie viene dagli sviluppi di Taylor. Infatti sappiamo che una funzione che ha $n + 1$ di derivate nell' intorno

di un punto dato x_0 si puo' scrivere nell' intorno di x_0 come un polinomio di grado n (il polinomio di Taylor) più un resto (in forma di Lagrange o in forma integrale) che è una quantità che va a zero più velocemente di $(x-x_0)^n$ quando x tende ad x_0.
Ora supponiamo che la funzione data ammetta infinite derivate, allora ha senso considerare una serie di potenze del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

dove con $f^{(n)}(x_0)$ indichiamo la derivata n-esima di f in x_0 e chiedersi se questa serie coincida proprio con la funzione f almeno in un intorno piccolo di x_0. Questo è uno dei quesiti che ci chiederemo per le serie di potenze.

Una funzione per cui vale questo risultato è la funzione esponenziale e^x che spesso viene proprio definita a partire dalla serie

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Una ulteriore motivazione per lo studio delle serie di potenze è data dal fatto che attraverso queste è possibile risolvere equazioni differenziali attraverso la scrittura della soluzione in serie di potenze.

Esempio 2 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} f'(x) = 2f(x) \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

otteniamo subito dalla condizione iniziale che $a_0 = 1$. Derivando formalmente termine a termine possiamo aspettarci il seguente sviluppo per la derivata di f (in seguito si capirà perché questo è lecito)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Imponendo che sia soddisfatta l' equazione differenziale ed uguagliando i coefficienti dei monomi dello stesso grado, si ottiene per ogni n fissata, la relazione $(n+1)a_{n+1} = 2a_n$ da cui si dimostra facilmente per induzione che

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

perciò

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x}$$

risultato che potevamo ottenere utilizzando la teoria delle equazioni differenziali lineari.

Bisogna fare molta attenzione nell' usare il metodo di sopra. Tutto ha funzionato perché la serie ottenuta era effettivamente sommabile, se cosí non fosse stato tutto il conto avrebbe assunto solo un valore formale.

In effetti è possibile che una serie di potenze converga solo in un punto.

Esercizio 4 Osservare che la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$$

converge solo per $x = 0$.

Esercizio 5 Verificare che la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6 Verificare che la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n+1} x^n$$

converge se e solo se $x \in (-3, 3)$.

Vogliamo studiare in generale la convergenza di una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{2}$$

a meno di fare un cambio di variabile possiamo sempre ridurci al caso in cui $x_0 = 0$.

Negli esempi visti l'insieme di convergenza è venuto sempre un intervallo di centro x_0, questo poteva essere anche uguale a tutto $\mathbb{R}$ oppure essere ridotto al solo punto x_0. Il seguente risultato ci illumina su questo fatto.

Proposizione 5 *Supponiamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converga in un punto $y \neq 0$ allora*

i) essa converge assolutamente in tutto un intervallo del tipo $(-|y|, |y|)$;

ii) essa converge totalmente e quindi uniformemente (Proposizione 4) in ogni intervallo del tipo $[-|y| + \epsilon, |y| - \epsilon]$, $\forall \epsilon \in (0, |y|)$.

Dimostrazione Sia $x \in (-|y|, |y|)$. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ converge allora il termine $|a_n y^n|$ deve essere infinitesimo, in particolare esiste una costante positiva M tale che $|a_n y^n| \leq M$, allora vale la seguente stima

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n y^n| \left|\frac{x}{y}\right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{y}\right|^n .$$

La serie ottenuta ad ultimo membro delle precedenti disuguaglianze è una serie geometrica convergente dal momento che $|x| < |y|$, in particolare si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{y}\right|^n = \frac{1}{1 - \frac{|x|}{|y|}}$$

da cui segue la prima parte.
Per quanto riguarda la seconda parte osserviamo che per il termine generico della serie si ha

$$|a_n x^n| \leq M \left|\frac{|y| - \epsilon}{y}\right|^n \qquad \forall x \in [-|y| + \epsilon, |y| - \epsilon].$$

Dal momento che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{|y| - \epsilon}{y}\right|^n < \infty,$$

abbiamo la convergenza totale e quindi uniforme.

Come conseguenza del risultato precedente abbiamo che se una serie non converge in un punto y, allora essa non converge per ogni $|x| > |y|$. Da queste considerazioni deduciamo che necessariamente la serie converge in un intervallo di centro 0 (in generale x_0).

Più precisamente esisterá un valore

$$\rho = \sup\{y \geq 0 \text{ tale che } \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n < \infty\}$$

per cui la serie converge in $(-\rho, \rho)$ non converge $(-\infty, -\rho) \cup (\rho, \infty)$, in tutti gli intervalli chiusi e limitati contenuti in $(-\rho, \rho)$ la convergenza sarà uniforme, quando ρ è un valore reale diverso da zero **in generale non si può dire nulla della convergenza per i due valori** $\pm\rho$.

Riepilogando vale il seguente risultato

Proposizione 6 *Data una serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

esiste $\rho \in [0, \infty]$*, detto raggio di convergenza, tale che la serie converge in valore assoluto in tutti i punti contenuti nell' intervallo aperto* $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ *e tale covergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso e limitato di* $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$*. La serie non converge se* $x \notin [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$*.*

Esercizio 7 Verificare che il raggio di convergenza delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

è uguale ad 1.

A questo punto è spontaneo chiedersi se c'è un modo per determinare il raggio di convergenza ρ.
Supponiamo che esista il $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in [0, \infty]$, ora applichiamo il metodo della radice per la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

quindi consideriamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = L|x|$$

allora abbiamo convergenza se $L|x| < 1$. Da questo deduciamo il seguente risultato

Proposizione 7 *Data una generica serie di potenze se esiste*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L,$$

allora il raggio di convergenza è dato da

$$\rho = \begin{cases} +\infty & se\, L = 0 \\ \frac{1}{L} & se\, L \in (0, \infty) \\ 0 & se\, L = \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Un risultato analogo si dimostra se esiste

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L.$$

In generale si può provare che L è dato da

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k>n} \sqrt[k]{|a_k|}$$

(vedi Giusti vol.2). Questa quantità coincide con il limite della successione $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_n$ quando questo esiste.

Abbiamo visto nell' Esempio 1 che formalmente la derivata di una serie di potenze (2) è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}. \tag{4}$$

Analogamente, in modo formale, una serie primitiva è data a meno di una costante da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}. \tag{5}$$

Consideriamo al solito per semplificare le notazioni il caso $x_0 = 0$. Ripetendo la dimostrazione della Proposizione 5 ed utilizzando l'Esercizio 1 otteniamo che se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge in un punto $y \neq 0$ allora le relative serie derivata e serie primitiva convergono in tutto l'intervallo $(-|y|, |y|)$. Da ciò deduciamo la seguente

Proposizione 8 *Le serie (2),(4),(5) hanno tutte lo stesso raggio di convergenza ρ e quindi tutte convergono uniformemente negli intervalli chiusi e limitati contenuti in $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.*

Supponiamo che $\rho \neq 0$ e indichiamo le tre serie nel seguente modo

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1},\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1},$$

allora si ha che $F'(x)=f(x)$ e $f'(x)=g(x)$. Infatti se $S_k(x)$ è la successione di funzioni data dalle somme parziali della $f(x)$, allora la successione $S_k'(x)$ corrisponderà alle somme parziali della funzione $g(x)$, poiché le due serie convergono uniformemente in tutti gli intervalli chiusi e limitati di $(-\rho,\rho)$, dalla Proposizione 3 segue l' uguaglianza $f'=g$. In modo del tutto analogo si mostra l'altra uguaglianza.
A questo punto è evidente che possiamo iterare il procedimento di derivazione fino all' ordine che vogliamo ottenendo per la generica derivata k-sima

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_{n-k}(x-x_0)^{n-k} \qquad (6)$$

questa avrà lo stesso raggio di convergenza ρ della serie di partenza (2). Dall' uguaglianza (6) otteniamo al variare di k

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad (7)$$

che fornisce il legame tra i coefficienti della serie di potenze e le derivate della somma della serie nel punto x_0.

Esercizio 8 Studiare la convergenza delle seguenti serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{n^2+2}(x-2)^n,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2)^n(3n+2)!}{n^4+1}(x-1)^n.$$

Da quanto detto in precedenza segue che se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ converge in un intervallo (quindi $\rho\neq 0$)), allora possiamo definire in questo intervallo la funzione $f(x)$ che è la somma della serie, questa funzione è $C^\infty((x_0-\rho,x_0+\rho))$ ed esiste un legame tra i coefficienti della serie e le derivate della funzione nel punto x_0 dato dalla (7).

Dato un intervallo aperto I. Data una funzione $f\in C^\infty(I)$ e fissato $x_0\in I$. Possiamo sempre scrivere la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

questa viene detta serie di Taylor della funzione f di centro x_0.
Ci chiediamo se nell'intervallo di convergenza della serie la funzione f coincide con la sua serie di Taylor.
Se ciò accade si dice che la serie è sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0.
Da quanto osservato prima una funzione scritta come serie di potenze è automaticamente sviluppabile in serie di Taylor.

Il seguente esempio mostra che non tutte le funzioni sono sviluppabili in serie di Taylor (vedi anche Courant John vol I pag 462).

Esempio 3 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si può dimostrare che questa è una funzione derivabile infinite volte ed ha tutte le derivate nulle nell' origine, perciò non è sviluppabile in serie di Taylor di centro 0.

Il risultato che segue ci fornisce una condizione sufficiente per lo sviluppo in serie di Taylor.

Proposizione 9 *Data una funzione $f \in C^\infty(I)$ e fissato $x_0 \in I$. Supponiamo che esistano due costanti positive M ed N tali che*

$$|f^{(n)}(x)| \leq NM^n \qquad \forall x \in I, \ \forall n. \tag{8}$$

Allora f è sviluppabile in serie di Taylor (in I) di centro un qualsiasi punto interno ad I.

A lezione abbiamo tralasciato questa dimostrazione, qui la riportiamo per completezza ed anche perché è utile per ripassare il Teorema di Taylor (Courant John Vol. I pag 445).
Dimostrazione Dimostare l' uguaglianza

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

equivale a dimostrare che

$$\lim_{k\to\infty} |f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n| = 0.$$

Utilizzando la formula di Taylor con resto in forma di Lagrange, abbiamo che per ogni k ed ogni $x_0 \in I$ la funzione f si può scrivere come

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1},$$

dove ξ è un valore opportuno che si trova tra x ed x_0, dipendente da x. Utilizzando lo sviluppo precedente e l' ipotesi (8) abbiamo che

$$|f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n| \leq \frac{NM^{k+1}|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Perciò otteniamo la tesi passando al limite nel secondo membro della disuguaglianza precedente ed utilizzando il limite notevole $\lim_{k\to+\infty} \frac{l^k}{k!} = 0$ valido per ogni $l \in \mathbb{R}$.

Possiamo osservare che le funzioni trigonometriche $\sin(x)$ e $\cos(x)$ verificano in tutto $\mathbb{R}$ le ipotesi della proposizione precedente perciò sono sviluppabili. Se consideriamo $x_0 = 0$ si ha

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Esercizio 9 A partire da sviluppi noti scrivere la serie di Taylor delle seguenti funzioni

$$\frac{1}{1+x}, \frac{1}{1+x^2}, \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \log(1+x), \arctan(x), xe^{3x}, x\sin(x^2).$$

Esercizio 10 Data la funzione $f(x) = \log(1 + x)$ calcolare $f^{(8)}(0)$.

Ora vediamo come sotto l'ipotesi di uniforme convergenza di una serie di funzioni sia possibile scambiare l'operazione di serie con quella di integrale.

Proposizione 10 *Siano $f_n \in C([a, b])$. Supponiamo che la serie $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sia convergente uniformemente in $[a, b]$, allora si ha*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{9}$$

Dimostrazione. Questo si prova semplicemente applicando la Proposizione 2 alla successione di funzioni data dalle somme parziali

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n(x).$$

Queste per ipotesi convergono uniformemente alla somma della serie che abbiamo indicato con $S(x)$. Quindi

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b S_k(x)\,dx$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_a^b f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Come applicazione del precedente risultato consideriamo il seguente

Esempio 4 Vogliamo calcolare

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx.$$

In questo caso non possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo perchè non conosciamo una primitiva della funzione e^{x^2}.
Utilizzando lo sviluppo in serie della funzione esponenziale abbiamo

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

questo sviluppo è valido in tutto $\mathbb{R}$, in questo caso il raggio di convergenza della serie è ∞. In particolare abbiamo convvergenza uniforme nell' intervallo $[0,1]$ e quindi possiamo calcolare l' integrale come

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)}$$

Non siamo riusciti a calcolare esplicitamente l' integrale ma comunque l'abbiamo riscritto come serie numerica e questo ci permette di approssimare il risultato.

Concludiamo l'esempio osservando che la funzione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

ci fornisce in forma di serie di potenze una primitiva della funzione e^{x^2}.

Utilizzando la teoria valida per le serie di potenze possiamo trattare alcune serie di funzioni riconducibili a serie di potenze.

Esempio 5 Vogliamo studiare la covergenza della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{-n}(n+2)}{n^2+1} \log^n(x).$$

Osserviamo che questa ha senso per $x > 0$, inoltre ponendo $y = \log(x)$ possiamo ricondurci a studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{-n}(n+2)}{n^2+1} y^n. \tag{10}$$

Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{n^2+1}} = 1.$$

Perciò il raggio di convergenza della serie (10) è uguale ad 1. Quindi utilizzando la Proposizione 5 abbiamo che la serie converge assolutamente nell' intervallo $(-1, 1)$ e uniformemente negli intervalli chiusi di $(-1, 1)$. Vediamo cosa succede agli estermi. Per $y = -1$ otteniamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1}$$

che è una serie a termini positivi che si comporta come la serie armonica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ ed è quindi divergente. Per $y = 1$ abbiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{-n}(n+2)}{n^2+1}$$

questa è una serie a segni alterni, utilizzando il criterio di Leibnitz (Courant John vol I pag 514) otteniamo che è convergente. Ora torniamo alla serie di funzioni iniziale, avremo che questa risulterà essere convergente quando $-1 < \log(x) \leq 1$, ovvero nell' intervallo $(e^{-1}, e]$ e sarà uniformemente convergente in tutti gli intervalli chiusi contenuti in (e^{-1}, e).

Esercizio 11 Dopo aver studiato la convergenza della seguente serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx},$$

si calcoli

$$\int_1^2 f(x)\,dx.$$

Esercizio 12 Si determini esplicitamente la funzione $f(x)$ data dalla serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{2n}$.

Esercizio 13 Si determini sotto forma di serie di potenze la soluzione del problema di Cauchy $y'' - x^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Prima si proceda in modo formale e poi si provi che la serie ottenuta converge in tutto $\mathbb{R}$.

Ultima osservazione il concetto di serie di potenze si può estendere ad oggetti che non sono necessariamente numeri reali. Dati a_n numeri reali (o complessi), la quantità $\sum_{n=0}^{k} a_n x^n$ può essere definita ogni qualvolta abbiamo a che fare con oggetti $x \in X$, su cui è definito il concetto di somma e di prodotto con un reale (o complesso), ad esempio gli spazi vettoriali, ma non basta deve essere definito anche il prodotto tra elementi di X, in particolare deve aver senso $x^k = x \cdot x \cdots x$. Ad esempio si può scegliere $X = \mathbb{C}$ lo spazio dei numeri complessi e quindi considerare serie in campo complesso. Si può scegliere X anche come lo spazio delle matrici $n \times n$ in cui è definita la somma il prodotto con un reale e il prodotto tra matrici. In questo caso data la matrice A si può considerare

$$\sum_{n=0}^{k} a_n A^n,$$

se questa quantità converge per k che tende a $+\infty$ (serve una metrica su X!) allora scriviamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n,$$

che sarà una nuova matrice dipendente dalla matrice A iniziale. Un esempio interessante si ha per i coefficienti $a_n = \frac{1}{n!}$, in tal caso viene spontaneo scrivere

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

certo va sempre provato che la serie converge e quindi il senso da dare a tale convergenza.

L'esponenziale di matrice ha notevoli applicazioni nella risoluzione di sistemi lineari di equazioni differenziali (vedi ad esempio appunti Lamberti equazioni differenziali seconda parte pag 27).