TEOREMI DI CONFRONTO

SIANO f, g, h DEFINITE IN $(x_0-c, x_0+c) \setminus \{x_0\}$ TALI CHE

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (x_0-c, x_0+c), \; x \neq x_0$$

SE $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

ALLORA $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$

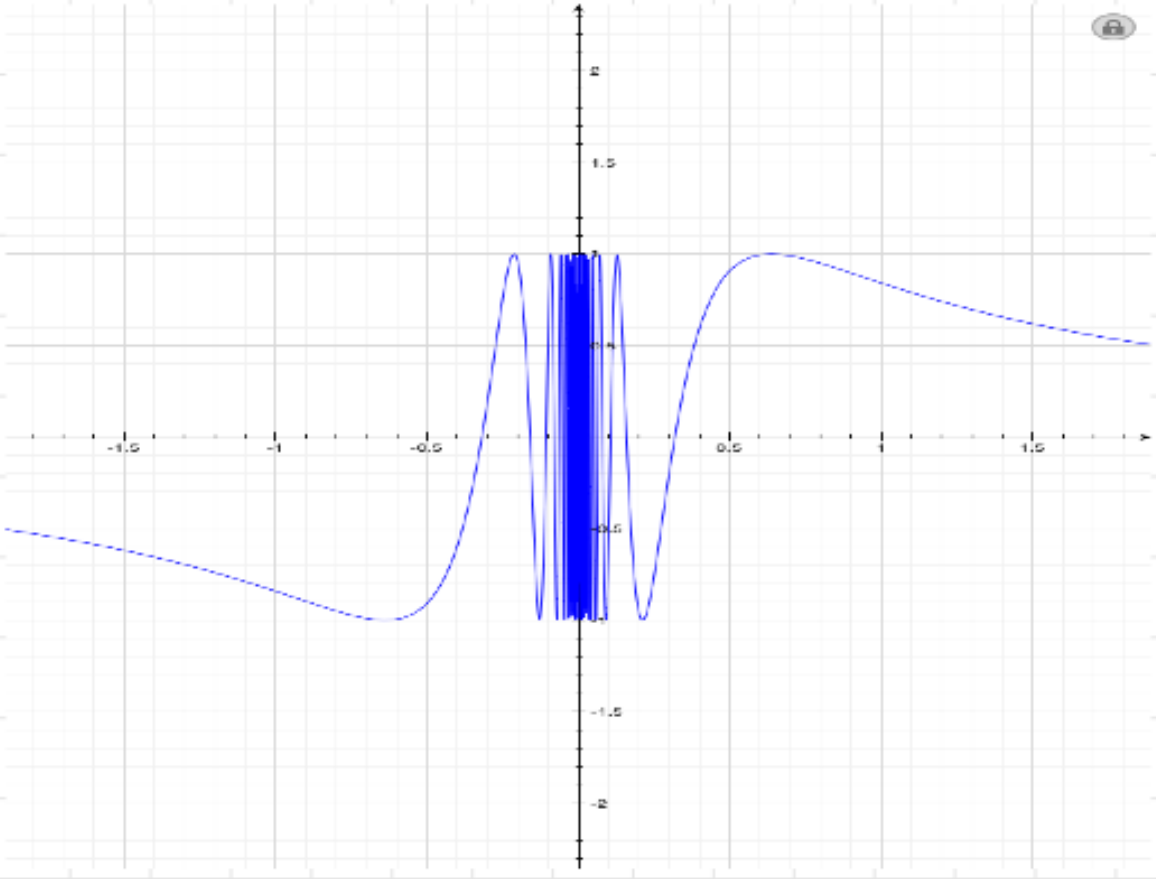
QUESTO VALE ANCHE SE $l = +\infty$
IN QUESTO CASO BASTA CHE $\exists$ $g(x)$, $g(x) \leq f(x)$ E $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$
E SI HA $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

STESSO DISCORSO SE $l = -\infty$ ED $\exists$ h TC.
$\lim_{x \to x_0} h(x) = -\infty$ E $f(x) \leq h(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

IL RISULTATO RIMANE VERO PER $x_0 = \pm\infty$ BASTA SOSTITUIRE L'INTERVALLO (x_0-c, x_0+c) CON INTERVALLI DEL TIPO $(-\infty, c)$ o $(c, +\infty)$

$$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) x \quad ?$$

$$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \nexists$$



$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

MA SE PRENDIAMO $g(x) = -|x|$ E $h(x) = |x|$ SI HA $-|x| \leq x\sin(x) \leq |x|$

INFATTI $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

POICHE' $\lim_{x \to 0} -|x| = \lim_{x \to 0} |x| = 0$ SI OTTIENE $\lim_{x \to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

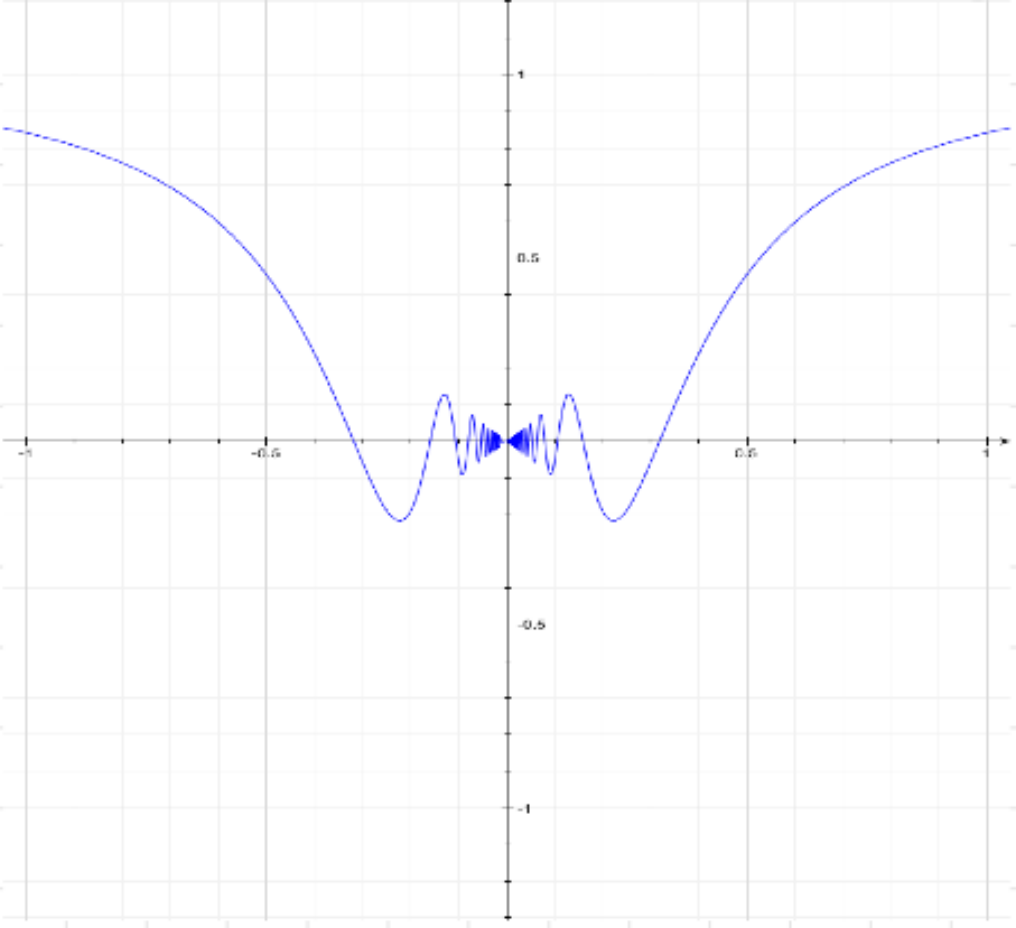
IN GENERALE SE $m(x)$ E' UNA FUNZIONE LIMITATA, OVVERO $\exists$ UNA COSTANTE K t.c. $|m(x)| \leq K$, E f E' UNA FUNZIONE t.c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

SI HA CHE $\exists \lim_{x \to 0} f(x)m(x) = 0$

INFATTI $-K|f(x)| \leq |f(x)g(x)| \leq K|f(x)|$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$



$x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(x)\frac{x^2+3}{x^3+7} = \ ?$$

$|\sin(x)| \leq 1$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x^3+7} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \sin(x)\frac{x^2+3}{x^3+7} = 0$$

POICHE' ABBIAMO DETTO CHE

PER $l \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff$

$\lim_{x \to x_0} |f(x) - l| = 0$

DAL MOMENTO CHE $|f(x) - l| \geq 0 \ \forall x$

CI BASTA TROVARE $h(x)$ t.c.

$\lim_{x \to x_0} h(x) = 0$ E $|f(x) - l| \leq h(x)$

IN UN INTORNO DI x_0

$\lim_{x \to 0} \sin(x) = ?$

SE $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ABBIAMO $\sin(x) \leq x$

MENTRE IN $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ E'

EVIDENTE CHE $|\sin(x)| \leq |x|$

POICHE' $\lim_{x \to 0} |x| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} |\sin(x)| = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$$

DALLE FORMULE SULLA SOMMA E DIFFERENZA DI ANGOLI SI OTTENGONO LE FORMULE:

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

QUINDI $|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq 2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|\left|\cos\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|$

$$\leq 2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leq 2\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|$$

STESSA COSA PER

$$|\cos(x) - \cos(x_0)| \leq |x-x_0|$$

QUINDI $\lim_{x \to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$

QUINDI SE $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

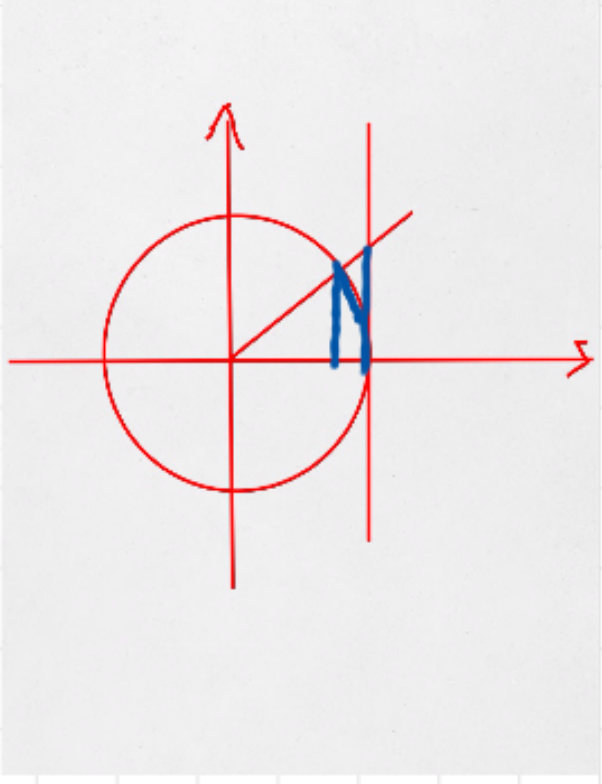
$$\lim_{x \to x_0} tg(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(x_0)}{\cos(x_0)} = tg(x_0)$$

ANALOGAMENTE $x_0 \neq k\pi$

$$\lim_{x \to x_0} ctg(x) = ctg(x_0)$$

ALTRO LIMITE IMPORTANTE

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{FORMA } \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$



$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(x) \leq x \leq tg(x)$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

POICHE' $\frac{x}{\sin(x)}$ E $\frac{1}{\cos(x)}$

SONO FUNZIONI PARI

SI OTTIENE

$$1 \le \frac{x}{\sin(x)} \le \frac{1}{\cos(x)} \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

QUINDI

$$\cos(x) \le \frac{\sin(x)}{x} \le 1$$

$$\cos(x) \xrightarrow{x \to 0} 1 \qquad \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \to 0} 1 \qquad 1 \xrightarrow{x \to 0} 1$$

QUINDI $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2} \frac{1}{1+\cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \frac{1}{1+\cos(x)}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = ?$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} \qquad \frac{0}{0}$$

$$\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{4(\sqrt{4}+2)}$$

$$= \frac{1}{16}$$

LIMITI SINISTRI E DESTRI

SIA f DEFINITA IN UN INSIEME (x_0, c)

ALLORA HA SENSO DEFINIRE

IL LIMITE DA DESTRA OVVERO

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ SE $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ t.c. $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$(x_0 < x < x_0 + \delta)$ SI HA $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

ANALOGAMENTE SE f E' DEFINITA

IN UN INTERVALLO $(x_0 - c, x_0)$ DEFINIAMO

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ SE $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$

t.c. $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0 - \delta < x < x_0)$ SI

HA $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

DALLA DEFINIZIONE SEGUE CHE SE f È DEFINITA IN UN INTORNO CENTRATO IN x_0, ESCLUSO AL PIÙ x_0, ALLORA

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \exists_{\mathbb{N}_0} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

IN PARTICOLARE AFFINCHÉ ESISTA $\lim_{x \to x_0} f(x)$ DEVONO ESISTERE I LIMITI DA SINISTRA E DA DESTRA E COINCIDERE.

IN ALCUNI CASI È PIÙ COMODO FARE I LIMITI DA SINISTRA E DA DESTRA PIUTTOSTO CHE $\lim_{x \to x_0} f(x)$

ES $f(x) = sg(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \Rightarrow \nexists$$

IL LIMITE

ES FUNZIONE DEFINITA A TRATTI

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x>0 \\ x^2+x & x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sin(x) = \sin(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2+x = 0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

ANALOGAMENTE POSSIAMO DEFINIRE

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \ (-\infty)$$ SE f È

DEFINITA IN UN INTERVALLO (x_0, x_0+c)

IN TAL CASO AVREMO

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \ (-\infty)$$ SE $\forall c$

$\exists \delta = \delta(c)$ t.c. SE $x_0 < x < x_0 + \delta$

SI HA $f(x) > c$ $(f(x) < c)$

ANALOGAMENTE DEFINIREMO

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \ (-\infty)$$

ES $f(x) = \frac{1}{x}$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = ?$ "$\frac{1}{0}$" MA

IN UN INTORNO DESTRO LA FUNZ. RIMANE

POSITIVA $\Rightarrow \exists \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ IN QUANTO A SINISTRA

f È NEGATIVA

QUINDI $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{1}{x^2} \longrightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \Longrightarrow \exists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

CALCOLARE, SE ESISTONO,

$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x^2-4}$ $\quad \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$, $\lim_{x \to 3} \frac{1}{|x-3|}$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sin(x)}$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\cos(x)}$, $\lim_{x \to 1} \frac{1}{1-x^2}$