Integrale Improprio (più dimensioni)

Vogliamo estendere ora il concetto di integrale improprio in più dimensioni, in tal caso la definizione che daremo sarà tale da implicare l'assoluta integrabilità.
Sia K un insieme di $\mathbb{R}^d$ limitato e misurabile secondo Peano Jordan sia f una funzione continua su K. Se K è chiuso non ci sono problemi esiste l'integrale nel senso di Riemann, se invece K non è chiuso può accadere che lungo la frontiera di K la funzione f non sia definita oppure diverga a $+\infty$ o a $-\infty$. In tal caso diciamo che la funzione è integrabile in senso improprio in K se valgono le seguenti cose

i) esiste una successione monotona di insiemi chiusi e misurabili K_n, tali che $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \cdots \subset K$;

ii) l' area dei K_n tende all' area di K quando n tende a $+\infty$;

iii) esiste una costante C tale che

$$\int_{K_n} |f|\, dx_1 \cdots dx_d \leq C.$$

In tal caso si può dimostrare (vedi Courant John Vol II/1 pag 411) che esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{K_n} f\, dx_1 \cdots dx_d \tag{1}$$

questo è per definizione l'integrale improprio di f su K. Inoltre, cosa fondamentale, questo valore non dipende dalla scelta degli insiemi K_n con cui approssimiamo l'integrale. In altre parole se avessimo scelto un'altra successione di insiemi C_n verificanti le tre proprietà i) ii) e iii) avremmo ottenuto nella (1) lo stesso valore.
Vale la pena di osservare che la condizione iii) è equivalente a dire che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{K_n} |f|\, dx_1 \cdots dx_d$$

è finito. Infatti tale limite esiste dal momento che la successione è crescente in quanto integriamo una funzione positiva su insiemi incapsulati uno dentro l'altro.

Se vogliamo definire l'integrale per una funzione f definita e continua su un insieme non limitato, ad esempio tutto lo spazio $\mathbb{R}^d$, dobbiamo introdurre, anche in questo caso, il concetto di integrale improprio. Diremo che la funzione f è integrabile in K se

i) esiste una successione monotona di insiemi chiusi e misurabili K_n, tali che $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \cdots \subset K$;

ii) dato un qualsiasi compatto M contenuto in K esiste un insieme K_n che lo contiene;

iii) esiste una costante C tale che

$$\int_{K_n} |f| \, dx_1 \cdots dx_d \leq C.$$

Anche in questo caso si può dimostrare che esiste

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{K_n} f \, dx_1 \cdots dx_d, \tag{2}$$

questo è per definizione l'integrale improprio di f su K. Inoltre l'integrale non dipende dalla scelta degli insiemi K_n.
Analogamente al caso precedente la la condizione iii) è equivalente a dire che è finito

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{K_n} |f| \, dx_1 \cdots dx_d.$$

Potevamo dare una definizione di integrale improprio richiedendo nei due casi precedenti le due condizioni i), ii) più l'esistenza del limite (1).**Il problema è che se non vale la iii) il limite in (1) può dipendere dalla scelta dei K_n e quindi la definizione sarebbe mal posta**.

La differenza importante con il caso di in una variabile è che in tale contesto avendo una direzione privilegiata, su $\mathbb{R}$ c'è un ordinamento, si sceglie di definire l'integrale improprio utilizzando proprio questo ordinamento quindi non si approssima in modo discreto (utilizzando una particolare successione di compatti) ma in modo continuo.

Esempio 1 Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ il cerchio di centro l'origine e raggio 1 privato dell'origine. Consideriamo al variare di $\alpha > 0$ la funzione $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}}$ questa è continua in K ma tende a $+\infty$ quando facciamo il limite in $(0, 0)$, perciò se vogliamo studiare l'integrale di f su K dobbiamo vedere se esiste nel senso che abbiamo definito sopra. Scegliamo

$$K_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \frac{1}{n} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\},$$

queste sono corone circolari che verificano i), ii). Dal momento che f è già positiva dobbiamo semplicemente calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{K_n} f\,dxdy$$

e vedere quando è finito. Utilizzando le coordinate polari abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\rho}{\rho^\alpha}\,d\rho d\theta$$

questo come abbiamo già visto è un finito se e solo se $\alpha-1<1$ e quindi quando $\alpha<2$.

Esempio 2 Sia $K=\mathbb{R}^2\setminus B(0,1)$. Con $B(0,r)$ indichiamo il cerchio di centro l'origine e raggio r. Studiamo al variare di $\alpha>0$ l'integrabilità della funzione $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}}$ in K. Questa è continua in K che è illimitato. In questo caso scegliamo le corone circolari

$$K_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,1\le\sqrt{x^2+y^2}\le n\},$$

queste verificano i), ii). Abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{K_n} f\,dxdy=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}\int_1^{n}\frac{\rho}{\rho^\alpha}\,d\rho d\theta$$

questo è un finito se e solo se $\alpha-1>1$ e quindi quando $\alpha>2$.

Ovviamente come nel caso di una variabile varrà un risultato di confronto del tipo

Proposizione 1 *Dato $K\subset\mathbb{R}^d$. Date le funzioni f, g continue su K tali che $|f(\cdot)|\le|g(\cdot)|$ in K, allora*

$$g \text{ integrabile in } K \implies f \text{ integrabile in } K$$

e quindi

$$f \text{ non integrabile in } K \implies g \text{ non integrabile in } K.$$

In particolare possiamo usare i risultati degli esempi precedenti. Se vogliamo studiare l'integrablità in un insieme $K\subset\mathbb{R}^2$ chiuso limitato e misurabile contenente l'origine di una funzione f continua in $K\setminus\{(0,0)\}$, allora se esiste una costante $C>0$ tale che

$$|f(x,y)|\le\frac{C}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}}\qquad\text{in } K\setminus\{(0,0)\},$$

con $\alpha < 2$ avremo che f sarà integrabile in K, mentre se

$$|f(x,y)| \geq \frac{C}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}} \qquad \text{in } K \setminus \{(0,0)\},$$

con $\alpha \geq 2$ allora f non sarà integrabile in K.

Analogamente se studiamo l'integrabilità di una funzione f continua su un insieme K chiuso e illimitato allora avremo che se

$$|f(x,y)| \leq \frac{C}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}} \qquad \text{in } K \setminus B(0,1),$$

con $\alpha > 2$ allora f sarà integrabile in K, mentre se

$$|f(x,y)| \geq \frac{C}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}} \qquad \text{in } K \setminus B(0,1),$$

con $\alpha \leq 2$ allora f non sarà integrabile in K.

Esempio 3 Vogliamo dimostrare che la funzione $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ è integrabile in $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$. Possiamo stimarla in questo modo

$$|f(x,y)| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \leq \frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

da cui deduciamo l'integrabilità essendo in questo caso $\alpha = 1$.

Esercizio 1 Si dimostri che la funzione $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}}$ è integrabile in $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 < x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ se e solo se $\alpha > 3$, mentre è integrabile in $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \geq 1\}$ se e solo se $\alpha < 3$.

Esercizio 2 Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y^\alpha}$ è integrabile in $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1,\, x \geq 0,\, y > 0\}$. Suggerimento si considerino gli insiemi $K_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{1}{n} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 1,\, x \geq 0,\, y \geq \tan(\frac{1}{n})x\}$ si passi poi alle coordinate polari.

Esercizio 3 Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^\alpha}$ è integrabile in $B(0,1)$. Per gli α in cui è integrabile si calcoli l'integrale.

Esercizio 4 Dopo aver verificato che la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ è integrabile in $\mathbb{R}$ si calcoli l'integrale improprio. Suggerimento si consideri la funzione $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ si calcoli il suo integrale in $\mathbb{R}^2$ prima considerando gli insiemi $K_n = B(0,n)$ e poi gli insiemi $K_n = [-n,n] \times [-n,n]$. Si veda anche Courant John Vol II/1 pag 415.