Integrale Improprio

In queste lezioni riprendiamo la teoria dell' integrazione in una variabile, l' idea è di estendere l' integrale definito anche in casi in cui la funzione integranda o l' intervallo di integrazione non siano limitati. Cominciamo con il caso di una variabile, sappiamo che se una funzione f è continua in un intevallo $[a, b]$ allora esiste l' integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$, inoltre il teorema fondamentale del calcolo ci permette anche di determinarlo una volta trovata una primitiva della funzione f. Cosa possiamo dire se f è continua in tutto l'intervallo escluso un estremo, ad esempio in $(a, b]$? In tal caso la funzione potrebbe non essere definita in a, l'idea più naturale è di passare al limite per x che tende ad a nella funzione f, se questa ammette limite finito allora possiamo estendere f in modo continuo e l'integrale risulta così ben definito. Se invece il limite non esiste oppure è infinito allora non è chiaro quale senso dare all' integrale. Un problema analogo si ha se si considera l'integrale di una funzione f continua su un intervallo illimitato, ad esempio del tipo $[a, \infty)$. Come possiamo trattare questi integrali? Si introduce il cosidetto integrale improprio.

Sia f una funzione continua in $(a, b] \subset \mathbb{R}$ allora questa si dice integrabile in senso improprio in (a, b) se esiste finito

$$\lim_{y \to a^+} \int_y^b f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx.$$

Osserviamo che questa definizione ha senso dal momento che per ogni y è ben definito l'integrale $\int_y^b f(x)\,dx$. Analogamente se f è continua in un intervallo del tipo $[a, b) \subset \mathbb{R}$ allora f si dice integrabile in senso improprio (a, b) se esiste finito

$$\lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx.$$

Se invece una funzione f è continua in un intervallo del tipo $[a, \infty)$ allora questa si dice integrabile in senso improprio in (a, ∞) se esiste finito

$$\lim_{y \to +\infty} \int_a^y f(x)\,dx =: \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Possiamo estendere questa definizione d'integrale a funzioni continue in intervalli del tipo (a, b), $((a, \infty))$, in tal caso diremo che la funzione f è integrabile in (a, b) $((a, +\infty))$ se esiste $c \in (a, b)$ $(c \in (a, +\infty))$ tale che esistono entrambi gli integrali impropri $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ $(\int_a^c f(x)\,dx$ e

$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$) in tal caso sarà

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$(\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx)$$

Infine questo concetto di integrale si può estendere al caso di una funzione continua definita in un insieme del tipo $[a,b] \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$, in tal caso la funzione f si dirà integrabile in modo improprio in (a,b) se sono definiti tutti gli integrali impropri,$\int_a^{x_1} f(x)\,dx$, $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, $\cdots$ $\int_{x_n}^{b} f(x)\,dx$. L' integrale sarà dato dalla somma di tutti questi integrali. Un analoga definizione si da' nel caso di una funzione continua in un intervallo del tipo $[a,+\infty) \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$.

Esempio 1 Vogliamo vedere se esiste l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$. In tal caso l'unico problema è dovuto al fatto che l'intervallo di integrazione è illimitato. Applichiamo la definizione e studiamo

$$\lim_{y\to+\infty} \int_0^y \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi l'integrale improprio esiste ed è proprio uguale a $\frac{\pi}{2}$.

Esempio 2 Vediamo per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste l'integrale improprio$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$. In questo caso l'unico punto dove possono esserci problemi è $x = 0$. Se $\alpha \leq 0$ la funzione $\frac{1}{x^\alpha}$ risulta essere continua anche in 0 perciò esiste l'integrale nel senso classico. Se $\alpha > 0$ abbiamo un vero integrale improprio in tal caso si ha quando $\alpha \neq 1$

$$\lim_{y\to0^+} \int_y^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{y\to0^+} \frac{1-y^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

Nel caso in cui $\alpha = 1$ abbiamo

$$\lim_{y\to0} \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{y\to+\infty} 1 - \log y = \infty.$$

Riassumendo l'integrale improprio esiste quando $\alpha < 1$.

Esempio 3 Vediamo per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste l'integrale improprio$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$. Si ha se $\alpha \neq 1$

$$\lim_{y\to+\infty}\int_1^y \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Se $\alpha = 1$ abbiamo

$$\lim_{y\to+\infty}\int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{y\to+\infty}\log y - 1 = \infty.$$

In questo caso l'integrale improprio esiste se $\alpha > 1$.

Da quanto visto nei due esercizi precedenti deduciamo che la funzione $\frac{1}{x^\alpha}$ non è integrabile in $(0, \infty)$ per nessun valore di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1 Dire se la funzione $\tan(x)$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$.

In tutti gli esempi precedenti nel verificare che una funzione fosse integrabile in senso improprio abbiamo applicato la definizione e quindi calcolato il limite, in tal modo nei casi in cui esisteva l'integrale improprio lo abbiamo contemporaneamente calcolato. In molti casi non è possibile dire esattamente quanto fa l'integrale improprio però si può dire se questo esiste. Una idea simile si ha nella teoria delle serie numeriche. Anche in quel caso è difficile calcolare la somma della serie ma ci sono molti strumenti che ci permettono di dire se la serie è non è convergente. Molti di quei criteri valgono per serie a termini positivi, anche in questo caso le cose si semplificano se la funzione f assume segno costante. Supponiamo che la funzione f sia non negativa. In questo caso possiamo osservare che le funzioni $h_1(y) = \int_y^b f(x), dx$, $h_2(y) = \int_a^y f(x), dx$ sono monotone. Perciò ammettono sempre limite, l'unico problema è dire se il limite è finito oppure infinito. Queste considerazioni portano al seguente risultato di confronto

Proposizione 1 *Siano f e g due funzioni continue e non negative in un intervallo $(a, b]$ ($[a, \infty)$, $[a, b)$...) supponiamo che esista una costante $A > 0$ tale che $f(x) \leq Ag(x)$ nell' intervallo $(a, b]$ ($[a, \infty)$, $[a, b)$...), allora*

g integrabile in senso improprio $\Longrightarrow f$ integrabile in senso improprio.

e quindi ovviamente

f non integrabile in senso improprio $\Longrightarrow g$ non integrabile in senso improprio.

Per dimostrare questo risultato basta utilizzare le considerazioni fatte precedentemente ed osservare che

$$\lim_{y\to a^+}\int_y^b f(x)\,dx \le A \lim_{y\to a^+}\int_y^b g(x)\,dx.$$

Utilizzando i risultati dell' Esempio 3 e la proposizione precedente possiamo agevolmente risolvere il seguente esercizio.

Esercizio 2 Dire se la funzione $\frac{1}{1+x^3}$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(1,+\infty)$.

I risultati della Proposizione 1 si possono indebolire, infatti come ci aspettiamo il fatto che una funzione sia integrabile o meno dipenderà esclusivamente dal comportamento di questa vicino al punto singolare o all' infinito. Infatti vale la seguente

Proposizione 2 *Siano f e g due funzioni continue e non negative in un intervallo $(a,b]$ ($[a,\infty)$, $[a,b)$...) supponiamo che esista*

$$\lim_{y\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L \qquad (\lim_{y\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = L,\ \lim_{y\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L, ...)$$

Allora se $L = 0$ abbiamo

g *integrabile in senso improprio* $\Longrightarrow f$ *integrabile in senso improprio,*

se $L = \infty$

g *non integrabile in senso improprio* $\Longrightarrow f$ *non integrabile in senso improprio*

infine se $L \in (0,\infty)$

g *integrabile in senso improprio* $\Longleftrightarrow f$ *integrabile in senso improprio.*

Il caso più interessante è il terzo se il limite L è finito e non nullo possiamo spostare il problema dell'integrabilità di f a quello di una funzione g che magari sappiamo trattare più agevolmente. Se il limite è zero o infinito abbiamo comunque delle informazioni in una direzione.
Dimostriamo questo risultato nel caso $L \in (0,\infty)$, i casi limite $L = 0$ e $L = +\infty$ li lasciamo come esercizio. Se il limite vale L possiamo dire che esiste sicuramente un valore $\delta > 0$ tale che $\frac{L}{2} \le \frac{f(x)}{g(x)} \le \frac{3L}{2}$ per ogni $x \in (a, a+\delta)$, quindi

$$\frac{L}{2}g(x) \le f(x) \le \frac{3L}{2}g(x) \text{ per ogni } x \in (a, a+\delta),$$

dalla Proposizione 1 deduciamo che f è integrabile in $(a, a+\delta)$ se e solo se g è integrabile in $(a, a+\delta)$. Dal momento che l'integrabilità in un intervallo del tipo $(a+\delta, b)$ è assicurata dal fatto che le funzioni f e g sono per ipotesi continue fino agli estremi $a+\delta$ e b abbiamo la tesi.

Una volta dimostrato questo risultato possiamo risolvere gli esercizi sull' integrabilità facendo uso di funzioni campione g di cui già sappiamo l'integrabilità. Le funzioni $\frac{1}{x^\alpha}$, studiate negli Esempi 2 e 3, sono molto utili per studiare il comportamento vicino a 0 e vicino all'infinito. In generale per studiare il comportamento vicino ad un estremo sinistro a o un estremo destro b possiamo usare rispettivamente le funzioni $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$ e $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$, queste sono integrabili se e solo se $\alpha < 1$.

Esempio 4 Dire se la funzione $\frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(0,1)$. Osserviamo che questa funzione è continua nell'intervallo $(0,1)$ vicino agli estremi diventa infinita, per vedere se esiste questo integrale improprio scegliamo $c \in (0,1)$ ad esempio $c = \frac{1}{2}$ e studiamo l'integrabilità negli intervalli $(0, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}, 1)$, se la funzione è integrabile in entrambi gli intervalli allora è integrabile in $(0,1)$. Nel primo caso scegliamo come funzione campione $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ questa è una funzione integrabile nell'intervallo $(0, \frac{1}{2})$ ed inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x^2)}} = 1,$$

quindi per la Proposizione 2 anche la f è integrabile. Per quanto riguarda l'intervallo $(\frac{1}{2}, 1)$ scegliamo come funzione campione $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ che è integrabile, abbiamo

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

perciò la f è integrabile in $(\frac{1}{2}, 1)$.

Esercizio 3 Dire se la funzione $\frac{\sin(x)}{x^2}$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(0,1)$.

Esercizio 4 Dire se la funzione $\frac{x^2+3x+2}{x^4+1}$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(0,+\infty)$.

Esercizio 5 Dire se la funzione $\frac{1}{\cos(x)}$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Esercizio 6 Dire per quali $\beta > 0$ è integrabile in senso improprio la funzione $\frac{1}{x \log^\beta x}$ nell'intervallo $(2, +\infty)$. In questi caso si applichi la definizione calcolando quando possibile anche l'integrale improprio.

Abbiamo visto che per le funzioni di segno costante il criterio del confronto è molto efficace per studiare l'esistenza dell'integrale improprio. Per le funzioni di segno variabile si può utilizzare il seguente risultato.

Proposizione 3 *Sia $f \in C((a,b])$ ($[a,b)$, $[a,\infty)$,...) allora se $|f|$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(a,b]$ ($[a,b)$, $[a,\infty)$,...) allora anche f è integrabile in senso improprio nello stesso intervallo.*

Dimostrazione Usando la definizione si vede subito che se una funzione è somma di due funzioni integrabili allora è integrabile e l'integrale è dato dalla somma dei due integrali. Più in generale si vede come la proprietà di linearità dell'integrale viene mantenuta anche per le funzioni integrabili in senso improprio. Questo segue dalle proprietà di linearità del limite. Per dimostrare questa proposizione, consideriamo la funzione $g(x) = |f(x)| - f(x)$, questa funzione è positiva ed inoltre si vede subito che $g(x) \leq 2|f(x)|$. Usando l'ipotesi che la funzione $|f|$ sia integrabile e i risultati di confronto validi per le funzioni di segno positivo otteniamo che anche la funzione g risulterà essere integrabile così come $-g(x)$ e quindi anche $f(x) = |f(x)| - g(x)$.

Esempio 5 Vogliamo dimostrare che la funzione $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$ è integrabile in $[0,\infty)$. Utilizziamo la proposizione precedente, osserviamo che $|f(x)| \leq \frac{|\sin(x)|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ dal momento che la funzione $\frac{1}{1+x^2}$ è integrabile abbiamo la tesi.

Una funzione f tale che il suo modulo sia integrabile si dice assolutamente integrabile. Mantenendo l'anologia con le serie abbiamo dunque che assoluta integrabilità (assoluta convergenza) implica l'integrabilità (convegenza semplice). Anche in questo caso esistono casi in cui la funzione è integrabile ma non assolutamente integrabile. Un esempio classico è dato dalla funzione $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ che è integrabile in senso improprio in $[0,\infty)$ ma non è integrabile assolutamente in questo intervallo (vedi Courant John Vol I pag. 310 e pag. 358).
Grazie alla Proposizione 3 possiamo dimostrare il seguente risultato valido per intervalli limitati.

Proposizione 4 *Sia f una funzione continua e limitata in un insieme $[a,b] \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, allora f è assolutamente integrabile in (a,b).*

Dimostrazione Per ipotesi esiste una costante M tale che $|f(x)| \leq M$ in $[a,b] \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, dal momento che in un intervallo limitato una costante è integrabile la tesi segue dal confronto (Proposizione 1 Lezione I) e dalla Proposizione 1.

Esempio 6 La funzione $f(x) = \cos(\frac{1}{x^2})$ è integrabile in un qualsiasi intervallo limitato. Infatti questa funzione è continua $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed è limitata in modulo da 1 su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7 Dire per quali $\alpha > 0$ è integrabile in senso improprio la funzione $\frac{\sin(x^\alpha + x^3)}{x^2}$ nell'intervallo $(0, +\infty)$.